Λογισμος ΙΙ, Ακολουθιες Συναρτήσεων

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2023

Ακολουθίες συναρτήσεων.

Ορισμός

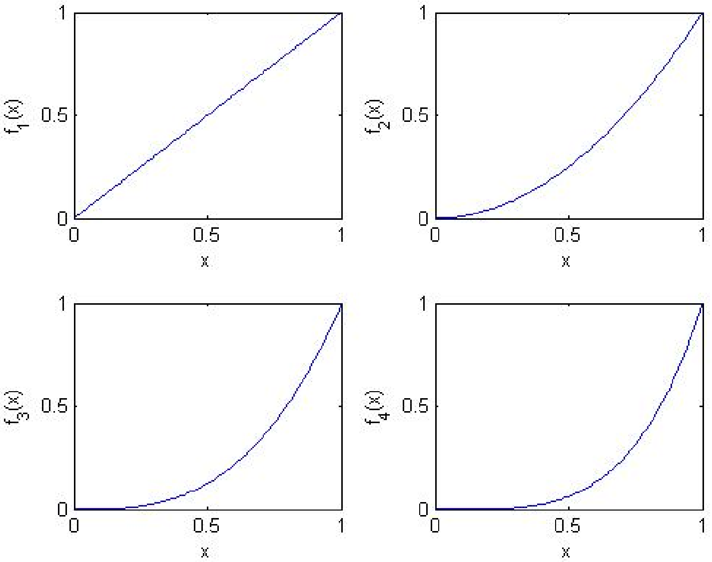
Έστω οι συναρτήσεις $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Η συλλογή όλων των πραγματικών ακολουθίων* $\{f_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$, *ονομάζεται* **ακολουθία συναρτήσεων** *και συμβολίζεται* $\{f_n\}$.

Παράδειγμα

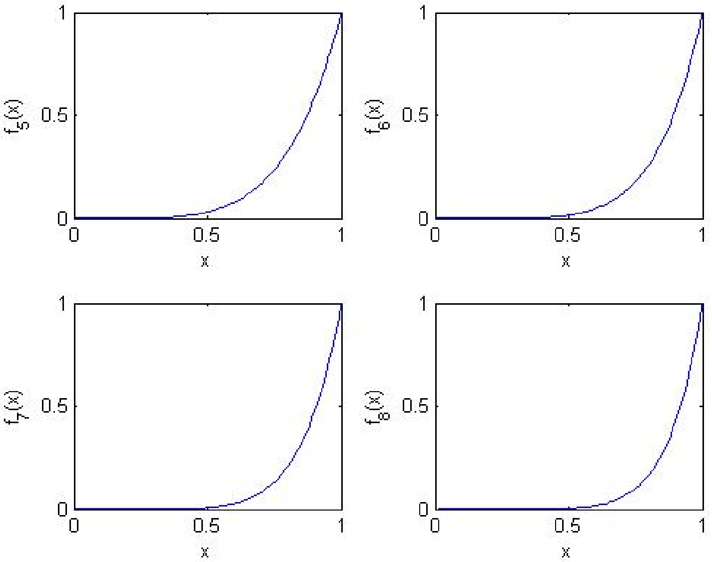
Ας πάρουμε την οικογένεια συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Π.χ. για* $n = 1$ *η* $f_1(x) = x$, *για* $n = 2$ *η* $f_2(x) = x^2$, *κ.ο.κ.*

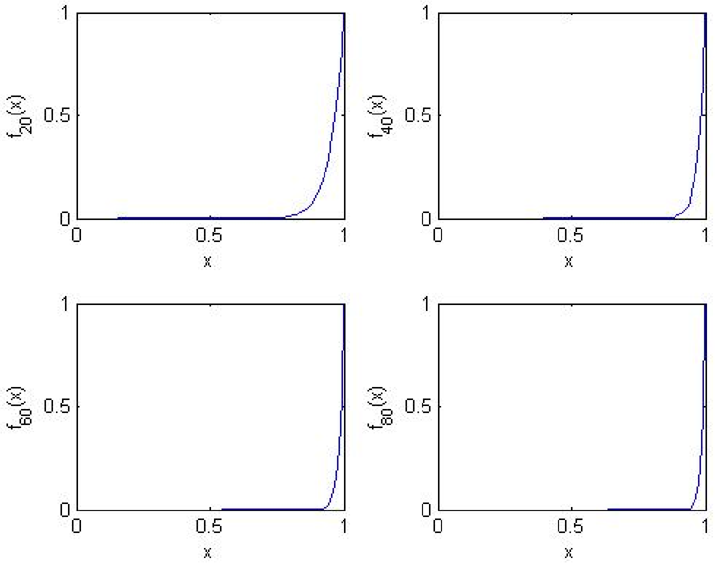
Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ *είναι η συλλογή πραγματικων ακολουθίων* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [0,1]$.

Π.χ. για $x = 0$ *παίρνουμε την σταθερή ακολουθία* $\{a_n\} = \{f_n(0)\}$ *με* $a_n = f_n(0) = 0$ *για κάθε* n, *για* $x = \frac{1}{2}$ *παίρνουμε την ακολουθία* $\{a_n\} = \{f_n(\frac{1}{2})\}$ *με* $a_n = f_n(\frac{1}{2}) = 2^{-n}$ *για κάθε* n *κ.ο.κ.*



f_1(x)
f_2(x)
f_3(x)
f_4(x)
x
0
0.5
1


1
0.5
0
0
0.5
1
x
f5(x)
1
0.5
0
0
0.5
1
x
f6(x)
1
0.5
0
0
0.5
1
x
f7(x)
1
0.5
0
0
0.5
1
x
f8(x)


1
0.5
0
0
0.5
1
x
f20(x)
f40(x)
f60(x)
f80(x)

Ορισμός (Σημειακή σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων)

Λεμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ **συγκλίνει** *στην συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *(σημειακά) αν για κάθε* $x \in I$ *και για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *για* $n > N$. *Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *ή πιο απλά για συντομία τον συμβολισμό* $f_n \to f$.

Εν γένει το N του παραπάνω ορισμού εξαρτάται τόσο απο την επιλογή του $x \in I$, όσο και απο την επιλογή του $\epsilon > 0$, και για να δώσουμε έμφαση σε αυτό θα γράφουμε $N = N(x, \epsilon)$.

Παράδειγμα

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f_n(x) = x^n$, *συγκλίνει στην συνάρτηση* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Μπορούμε να δούμε ότι για την ακολουθία συναρτήσεων αυτή, το N *για το οποίο ικανοποιείται ο Ορισμός είναι το* $N = N(x,\epsilon) = \left[\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(x)}\right] + 1$.

᾿λλα παραδειγματα ακολουθιών συναρτήσεων είναι οι ακολουθίες μερικων αθροισματων $\{S_n\}$ για την σειρά Taylor ή για την σειρά Fourierγια κάποια συνάρτηση f.

Στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση της ακολουθίας μερικών αθροισματων $\{S_n\}$ σχετιζεται με το πόσο αξιόπιστα μπορώ να προσεγγίσω την τιμή της συναρτησης f σε κάποιο σημειο $x \in I$ απο κάποιο μελος της ακολουθίας των συναρτήσεων των μερικων αθροισματων S_N υπολογισμένο στο σημειο x.

Γιατί χρειαζόμαστε ακολουθίες συναρτήσεων;

Παράδειγμα (**Ορισμός νεων συναρτήσεων σαν όριο ακολουθίας κάποιων πιο απλών συναρτήσεων.**)

Όπως έχετε δει πολλές συναρτήσεις μπορούν να γραφούν σαν δυναμοσειρές κάνοντας χρήση π.χ. του αναπτύγματος Taylor.

Σαν ένα παράδειγμα ας πάρουμε την εκθετικη συνάρτηση η τιμή της οποίας για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *ορίζεται ως μια αριθμητική σειρά* $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

Ένας τρόπος να δείτε αυτή τη σειρά είναι να ορίσετε τα μερικά αθροίσματα $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ *και τότε η σειρά μπορεί να γραφεί ως* $f(x) = \lim_{n\to} f_n(x)$.

Συνεπώς το άθροισμα της σειράς μπορεί να εκφραστεί σαν το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων, της ακολουθιας $\{f_n\}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ με $f_n(x)$ όπως παραπάνω για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει όριο το όριο της είναι η συνάρτηση του εκθετικού.

Οι ακολουθιες συναρτήσεων και η διαδικασια του ορίου μας επιτρέπουν να επεκτεινουμε το σύμπαν των γνωστων συναρτήσεων ορίζοντας καινουργιες συναρτήσεις σαν το όριο ακολουθιών γνωστών συναρτήσεων!

Παράδειγμα (**Εμπειρική συνάρτηση κατανομής**)

Ας υποθέσουμε οτι παίρνουμε ενα τυχαίο δείγμα $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ *απο* n *παρατηρήσεις.*

Με βάση αυτό το δείγμα μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ *ως*

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η τιμή της συνάρτησης στο $x \in \mathbb{R}$, *μας εκφράζει τον αριθμό των στοιχείων του δείγματος μας που είναι μικρότερα ή ίσα απο την τιμή* x *διαιρεμένο με τον αριθμό των στοιχείων του δείγματος, οπότε μπορεί να κατανοηθεί σαν το ποσοστό των στοιχείων του δειγματος που είναι μικρότερα απο την τιμή* x.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό το ποσοστό σαν μια πιθανότητα, η τυχαία μεταβλητή X που θεωρούμε οτι το δείγμα μας αποτελείται απο πραγματοποιήσεις της, να πάρει τιμές μικρότερες ή ισες του x.

Η συνάρτηση f_n που ορίστηκε με αυτό τον τρόπο ονομαζεται **εμπειρική συνάρτηση κατανομής** και παίζει σημαντικό ρόλο στην στατιστική και συγκεκριμένα στην μη παραμετρική στατιστική.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, \cdots\}$ και υπολογίζουμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής πρώτα χρησιμοποιώντας ένα σημείο του δείγματος, f_1, μετα τα πρώτα 2, f_2, κλπ, δηλαδή υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ για $n = 1, 2, \cdots$ με

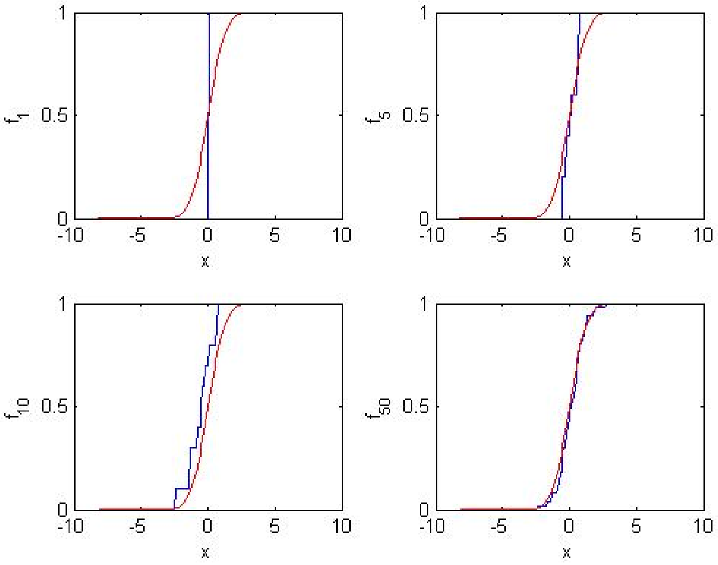
$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \mathbf{1}_{\{x_1 \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
f_2(x) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_{\{x_1 \leq x\}} + \mathbf{1}_{\{x_2 \leq x\}}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \\
&\cdots \\
f_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ η οποία είναι μια ακολουθία εμπειρικών κατανομών.

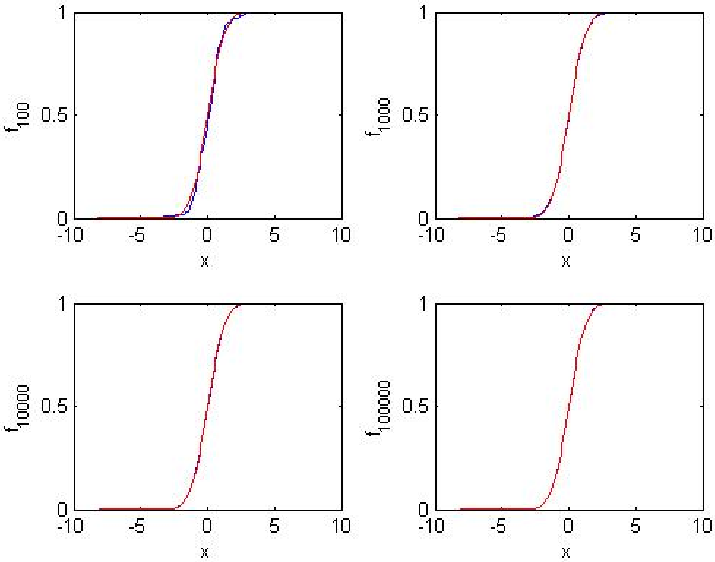
Η εμπειρία μας απο την στατιστική μας λέει οτι στο όριο όπου το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της εμπειρικης κατανομής είναι επαρκώς μεγάλο, η εμπειρική κατανομή θα είναι μια επαρκώς καλή προσέγγιση της πραγματικής κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία θεωρούμε οτι είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Είναι λοιπόν χρήσιμο να γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ και να μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε.

Ο παραπάνω ορισμός για το όριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σκοπό αυτό.



1
0.5
0
-10
-5
0
5
10
x
f1
f5
f10
f50



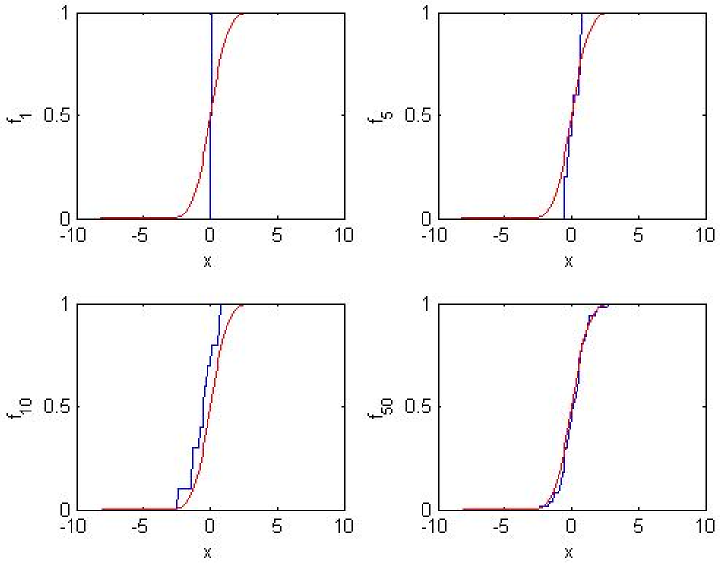
1
0.5
0
f_{100}
-10
-5
0
5
10
x
f_{1000}
f_{10000}
f_{100000}

Φυσικά η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_n\}$ εξαρτάται το δειγμα $\{X_1, X_2, \cdots, X_N\}$ το οποίο έχουμε πάρει.

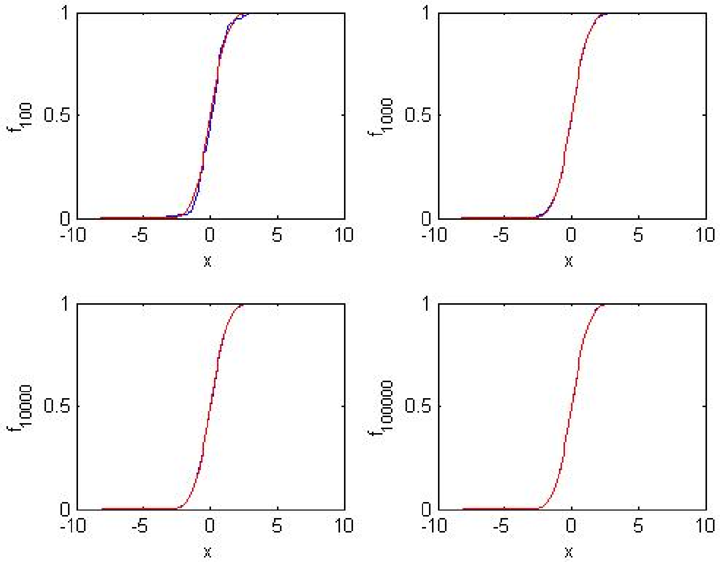
Εφόσον κάθε φορά που επαναλαμβάνω το πείραμα θα πάρω διαφορετικό δείγμα, θα πάρω κάθε φορά και μια διαφορετική ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$.

Θα πάρω λοιπόν μια τυχαια ακολουθια συναρτήσεων.

Παρότι όμως τα μέλη της ακολουθιας είναι τυχαίες συναρτήσεις, το όριο δεν ειναι τυχαίο και είναι πάντοτε το ίδιο και ίσο με την θεωρητική συναρτηση κατανομής F για καθε δείγμα!



1
0.5
0
f_1
-10
-5
0
5
10
x
1
0.5
0
f_5
-10
-5
0
5
10
x
1
0.5
0
f_{10}
-10
-5
0
5
10
x
1
0.5
0
f_{50}
-10
-5
0
5
10
x



f_{100}
f_{1000}
f_{10000}
f_{100000}
x
0
0.5
1
-10
-5
0
5
10

Προβλήματα της σημειακής σύγκλισης

Η σημειακή σύγκλιση παρουσιάζει σοβαρά προβλήματα τα οποία μας δημιουργούν δυσκολίες όταν προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε συναρτήσεις απο ακολουθιες πιο απλών συναρτήσεων.

Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να διατηρήσει την ιδιότητα της συνέχειας.

Η ακολουθια συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \cdots$, συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad x \in [0,1), \\ 1 & \text{για} \quad x = 1, \end{cases}$$

δηλαδη $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ καθώς $n \to \infty$.

Για οποιοδήποτε πεπερασμένο n η συναρτηση f_n είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Το όριο της ακολουθίας αυτών των συνεχών συναρτήσεων f δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο $x = 1$!

Το (σημειακό) όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητα μια συνεχής συνάρτηση.

Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε και ως την αδυναμία εναλλαγής δύο ορίων, εν γένει αναμένουμε

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \neq \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)!$$

Προβλήματα με την παραγώγιση

Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της παραγώγισης, δηλαδή μια αν μια ακολουθία συναρτήσεων αποτελείται απο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο σημείο, δεν είναι απαραίτητο οτι το όριο της ακολουθίας αυτής είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο αυτό, και ακόμα και αν είναι δεν είναι απαραίτητο ότι το όριο της ακολουθίας των παραγώγων θα συμπίπτει με την παράγωγο του ορίου της ακολουθίας!

Δηλαδή εν γένει

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x)!$$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *με* $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι ακολουθία αυτή συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, *για κάθε* $x \in [0,1]$. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *οι συναρτήσεις* f_n *ειναι παραγωγίσιμες σε κάθε* $x \in [0,1]$ *και μάλιστα* $f_n'(x) = x^{n-1}$.

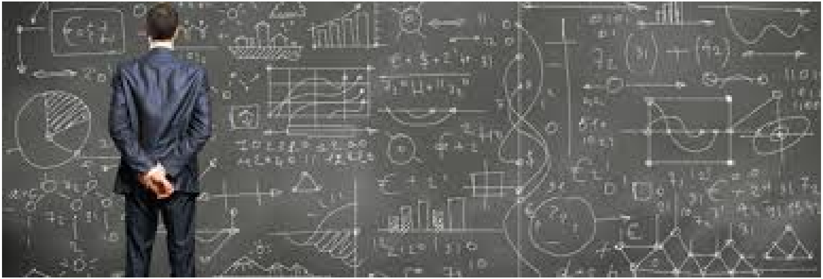
Ας πάρουμε τώρα την ακολουθία των παραγώγων $\{f_n'\}$.

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n'\}$ *συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση* $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Θα περιμέναμε $\phi = f'$ *όμως αυτό* **δεν** *ισχύει εφόσον* $f'(x) = 0$ *για κάθε* $x \in [0,1]$ *και* $\phi(1) = 1$!

Αυτό όμως ειναι ενοχλητικό γιατι χρησιμοποιώ την έννοια του ορίου για να ορίζω καινούργιες συναρτήσεις π.χ. την εκθετική, και θα ήθελα να μπορούσα να υπολογίζω με κάποιο τρόπο την παράγωγο τους!

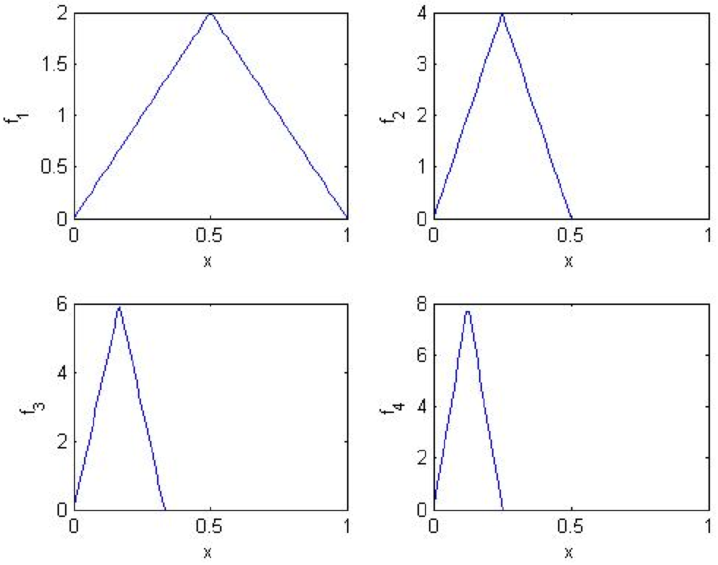


Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της ολοκλήρωσης.

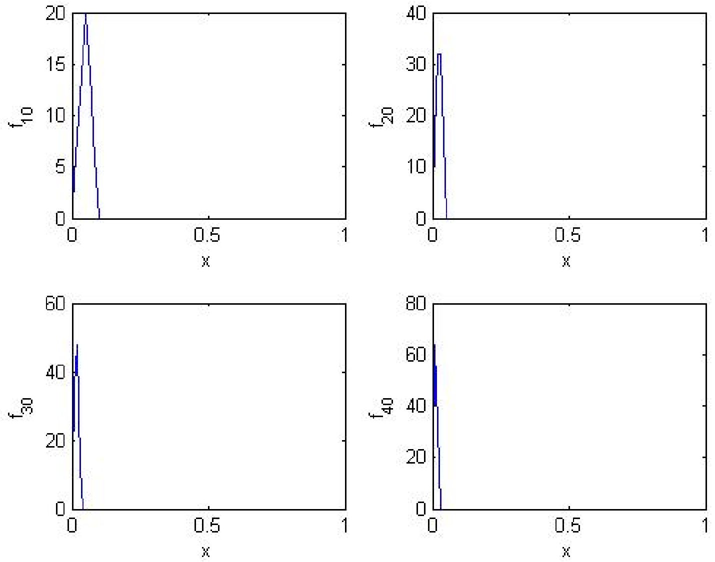
Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *με*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4\,n^2\,x & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ -4\,n^2\,x + 4\,n & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



2
1.5
1
0.5
0
f_1
0
0.5
1
x
4
3
2
1
0
f_2
0
0.5
1
x
6
4
2
0
f_3
0
0.5
1
x
8
6
4
2
0
f_4
0
0.5
1
x



f_10
f_20
f_30
f_40
x
x
x
x

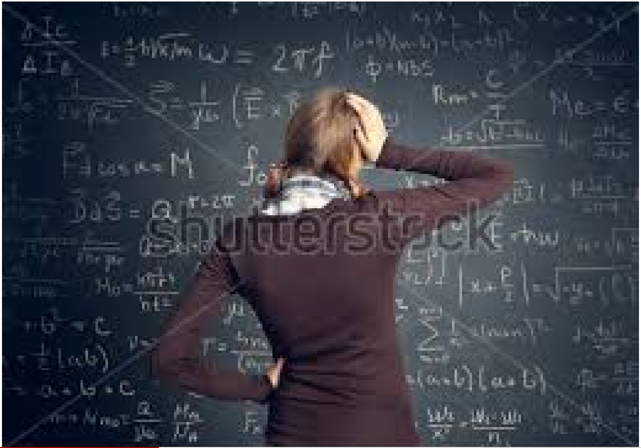
Μπορούμε να δειξουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$, με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ισχύει ότι

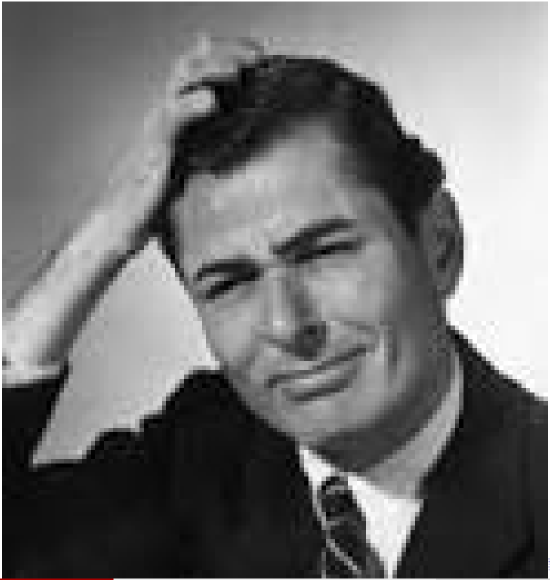
$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Αυτό όμως ειναι ενοχλητικό γιατι χρησιμοποιώ την έννοια του ορίου για να ορίζω καινούργιες συναρτήσεις π.χ. την εκθετική, και θα ήθελα να μπορούσα να υπολογίζω με κάποιο τρόπο το ολοκλήρωμα τους!



Τι να κάνουμε;



Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων

Ολα τα παραπάνω προβλήματα προέρχονται απο το ότι οταν λέμε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$, έχουμε οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπαρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για $n > N$ όμως το N αυτό για το ίδιο ϵ μπορεί να μεταβάλλεται με το x!

Ορισμός (**Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων**)

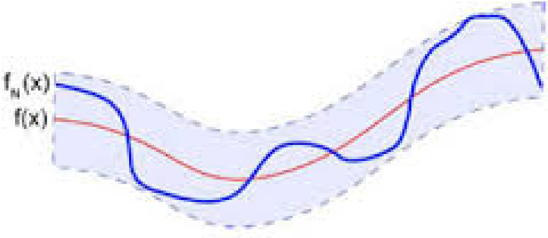
Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, **συγκλίνει ομοιόμορφα** *στην συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n > N$ *να ισχύει* $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$ *για κάθε* $x \in I$.

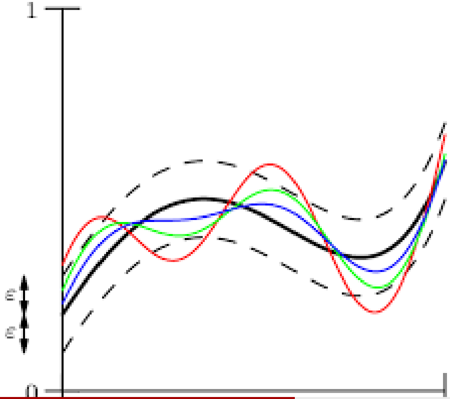
Για να δηλώσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f_n \rightrightarrows f$.

Αν μια σκολουθία συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα τότε σίγουρα συγκλίνει και σημειακά.

Αν μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σημειακά τότε δεν είναι απαραίτητο οτι συγκλίνει και ομοιόμορφα.

Το όριο είναι μοναδικό.


f_N(x)
f(x)


1
0

Παράδειγμα

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ *με τύπο* $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ *δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση* f *με τύπο* $f(x) = 0$ *για* $x \in [0,1)$ *και* $f(x) = 1$ *για* $x = 1$.

Καθώς το x πλησιάζει το 1 (αλλά $x \neq 1$) ο ορισμος της ομοιόμορφης σύγκλισης έχει πρόβλημα!

Παράδειγμα

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f_n = \frac{x^n}{n}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *με* $f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in [0,1]$.

Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}, \ \ \forall x \in [0,1], \ \ n \in \mathbb{N}$$

συνεπώς για κάθε $x \in [0,1]$ *και για κάθε* $\epsilon > 0$ *θα ισχύει* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *εφόσον ισχύει* $\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$.

Για να συμβαίνει αυτό το n *θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση* $n > \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ *άρα μπορούμε να επιλέξουμε ένα* $N^* = N^*(\epsilon) := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ *τέτοιο ωστε η συνθήκη του ορισμού της ομοιόμορφης σύγκλισης να ικανοποιείται.*

Πρόταση (Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων)

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *αν και μόνο αν ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I} |\, f_n(x) - f(x)\,|\right) = 0$$

Θεώρημα (Κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων)

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ***συγκλίνει ομοιόμορφα*** *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ωστε* $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ *για καθε* $x \in I$ *και κάθε* $n, m > N$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα

Έστω $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ *μία ακολουθία συνεχων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει* **ομοιόμορφα** *στην* $f : I \to \mathbb{R}$.

Τότε, η f *είναι συνεχής στο* I.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωση

Πρόταση

Έστω $\{f_n\}$ *μια ακολουθία συναρτήσεων* $f_n : I \to \mathbb{R}$. *Ας υποθέσουμε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *οι συναρτήσεις* f_n *είναι ολοκληρώσιμες και ότι η ακολουθία* $\{f_n\}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην συναρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$, *δηλαδή* $f_n \rightrightarrows f$.

Τότε, και η f *είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παραγώγιση

Πρόταση

Έστω ότι το I είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = [a, b]$ και $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, μία ακολουθία διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Ας υποθέσουμε ότι

1. *Υπάρχει κάποιο $z \in I$ τέτοιο ώστε η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{f_n(z)\}$ να συγκλίνει.*
2. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n'\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I στην συνάρτηση g, δηλαδή $f_n \rightrightarrows g$.*

Τότε, η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I σε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε ότι $f' = g$, δηλαδή

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \ \ \forall x \in I$$