Λογισμος ΙΙ, Σειρές *Fourier*

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2024

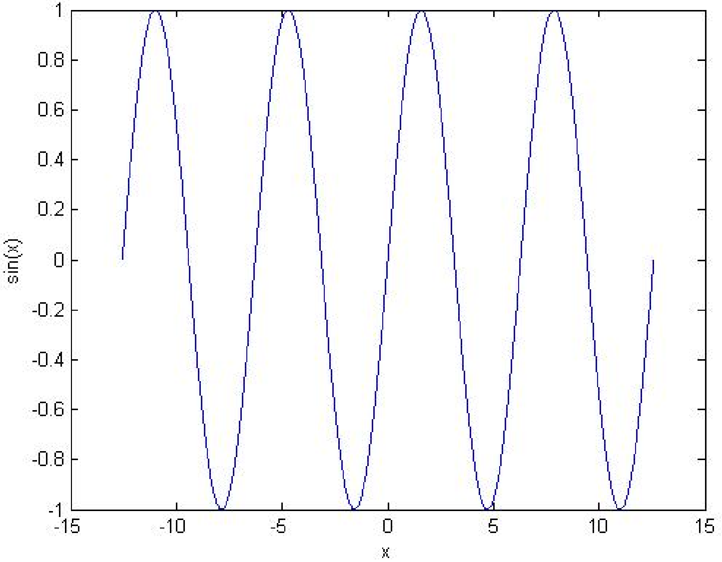
Οι συναρτήσεις $\cos(nx)$ και $\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

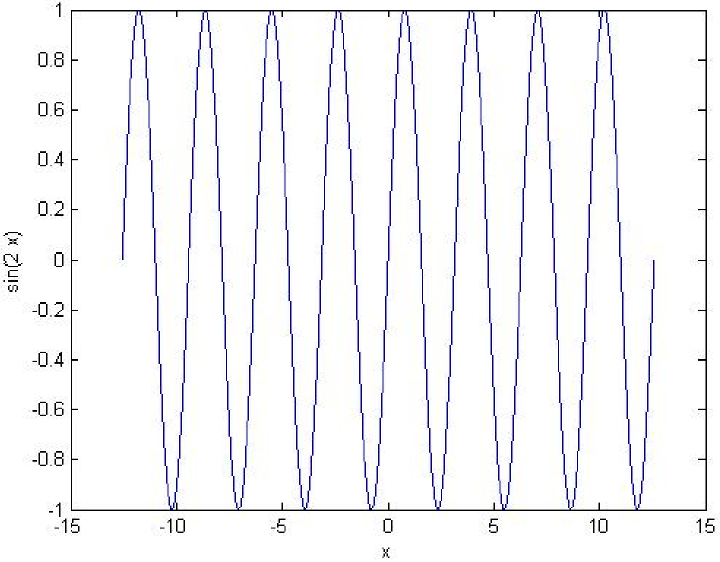
Οι συναρτησεις αυτές είναι περιοδικες με περιοδο $T_n = \frac{2\pi}{n}$.

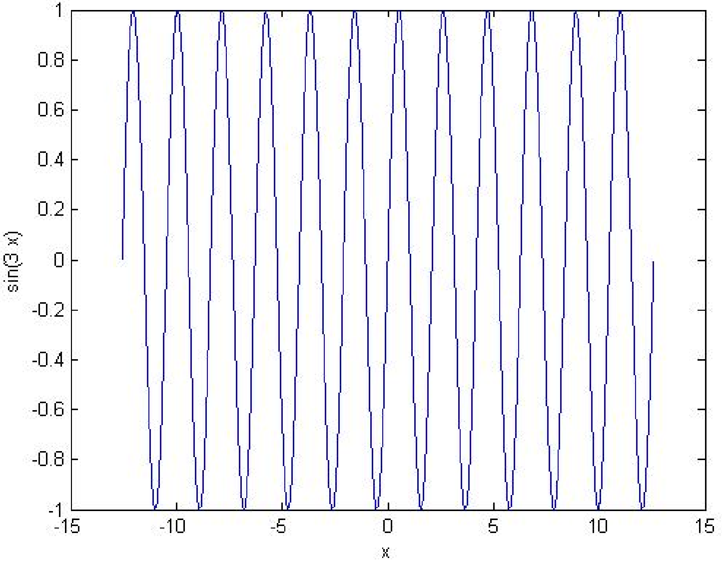
Έχουν την ιδιότητα

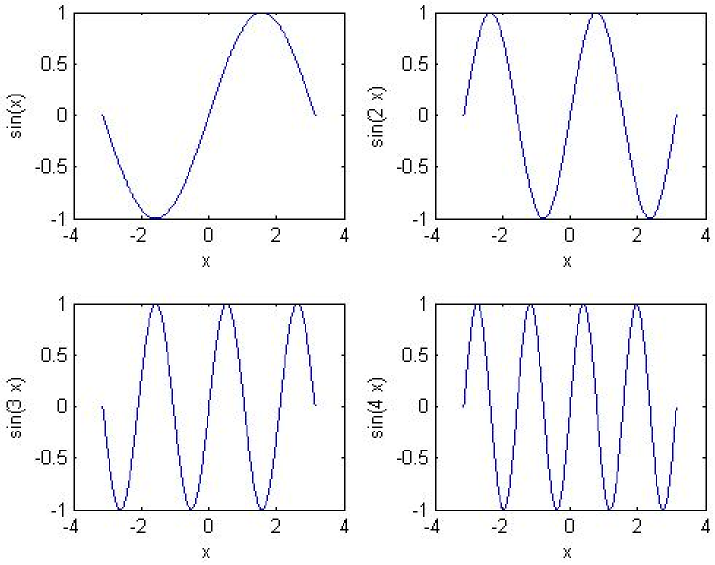
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \pi\,\delta_{n,m},$$

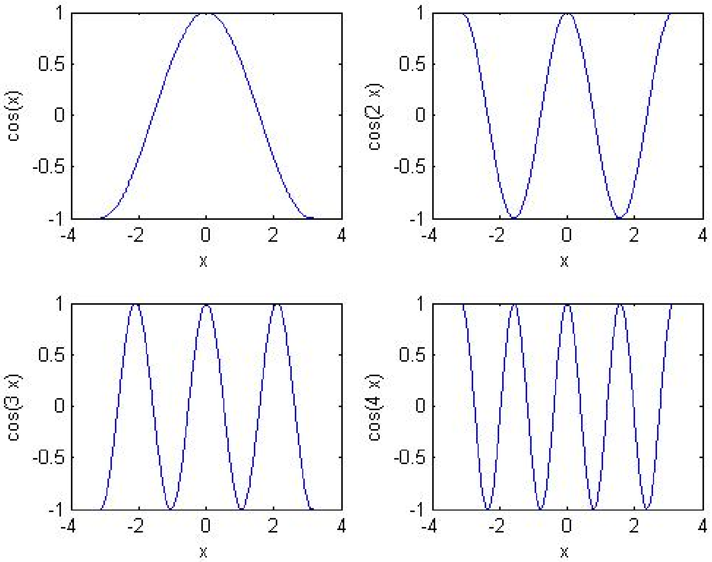
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
sin(x)
-15
-10
-5
0
5
10
15
x

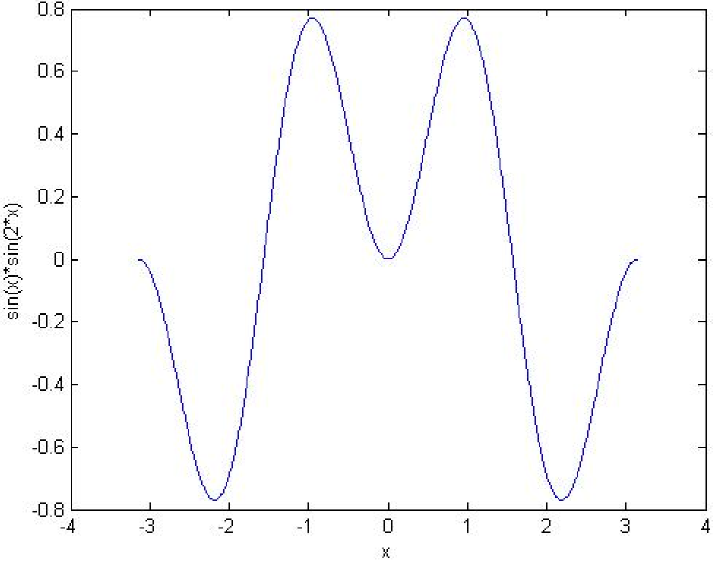

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-15
-10
-5
0
5
10
15
x
sin(2 x)

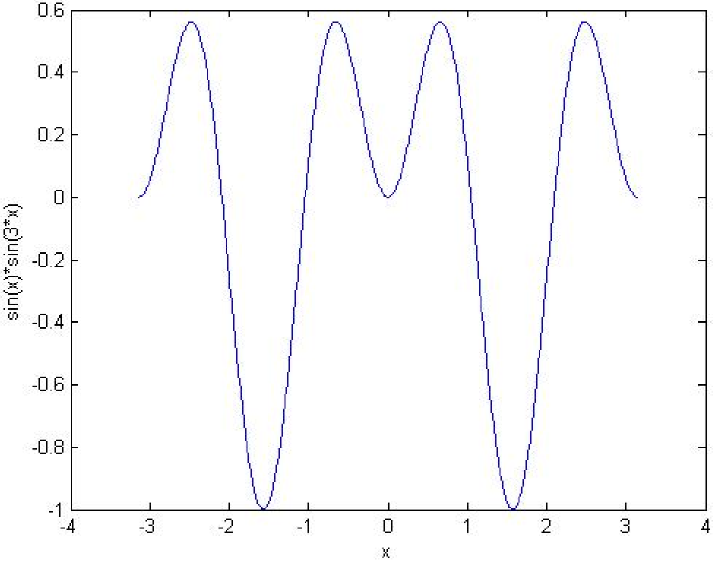

sin(3 x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-15
-10
-5
0
5
10
15
x

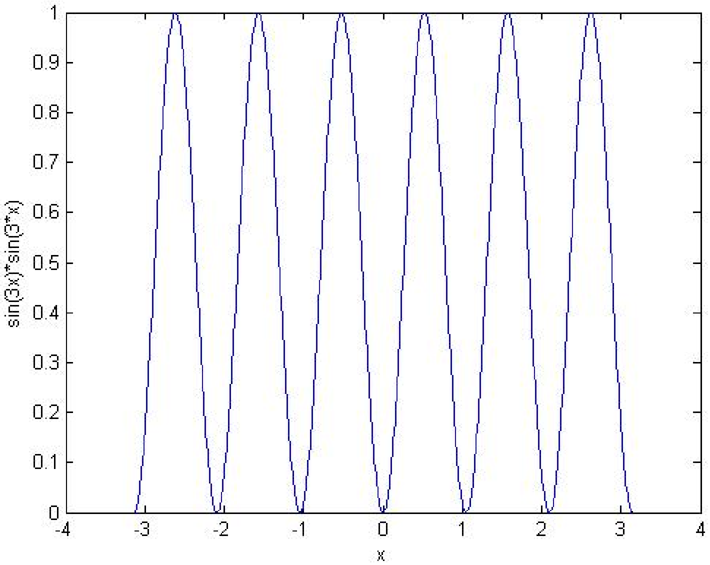

sin(x)
sin(2 x)
sin(3 x)
sin(4 x)
x
1
0.5
0
-0.5
-1
-4
-2
0
2
4



1
0.5
0
-0.5
-1
-4
-2
0
2
4
x
cos(x)
cos(2 x)
cos(3 x)
cos(4 x)


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
sin(x)*sin(2*x)
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x
sin(x)*sin(3*x)


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x
sin(3x)*sin(3*x)

Σειρές Fourier

Αν f κατά τμήματα συνεχης στο $[-\pi, \pi]$ η σειρά Fourier της f είναι η σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

με συντελεστές,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{αν} \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

με $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_n &= 0, \\
b_n &= -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad n \quad \text{αρτιο} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{αν} \quad n \quad \text{περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5x) + \cdots \\ = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x)\end{aligned}$$

όπου αναπαραστήσαμε τους περιττούς με $n = 2k - 1,\ k = 1, 2, \cdots$

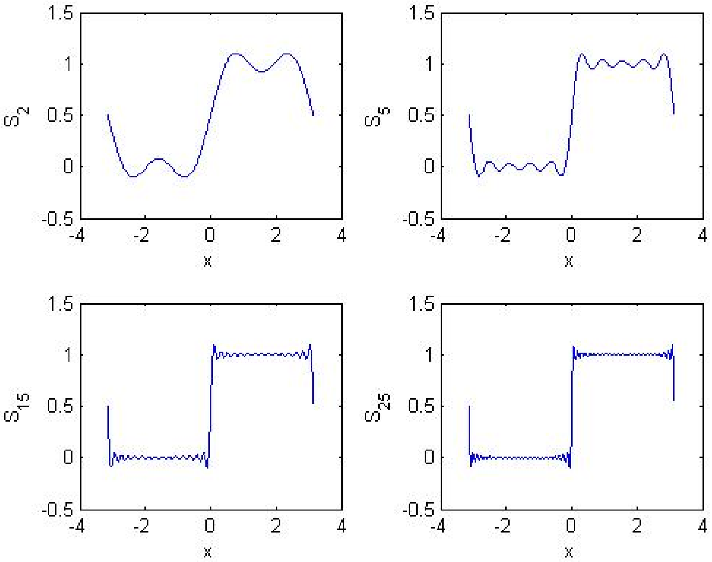
Τα μερικα αθροίσματα της σειράς Fourier για την f προσεγγίζουν την συνάρτηση f.

Αν

$$S_K(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

τότε όσο πιο μεγάλο γινεται το K τόσο πιο μικρό το σφάλμα

$$|S_K(s) - f(x)|$$



S_2
S_5
S_{15}
S_{25}
x

Θεώρημα

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *μια συναρτηση κατά τμήματα αυνεχης και*

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

η σειρά Fourier που παράγεται απο την συνάρτηση αυτή.

- *Αν το σημειο* $x \in [-\pi, \pi]$ *ειναι σημειο συνέχειας της* f *τότε* $F(x) = f(x)$.
- *Αν το σημείο* $x \in [-\pi, \pi]$ *ειναι σημείο ασυνέχειας της* f *τοτε* $F(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Η ταυτότητα του Parseval

Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, και

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

η σειρά Fourier για την συνάρτηση f, τότε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Πως προέκυψε η ταυτότητα του Parseval ;

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

Αυτό σημαίνει

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

ή ισοδυναμα

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x), \quad f_N(x) := \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

Για την απόδειξη της ταυτότητας Parseval χρησιμοποιήσαμε την παραδοχή ότι

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx))dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx$$

δηλ. εναλλάξαμε την πράξη του ορίου με την πράξη της ολοκλήρωσης.

Αυτό δεν μπορεί να γίνει πάντοτε! Σημειακή vs ομοιόμορφη συγκλιση

ʼρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός

Μία συναρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ *ονομαζεται*

- *άρτια αν* $f(-x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in I$,
- *περιττή αν* $f(-x) = -f(x)$ *για κάθε* $x \in I$.

Παράδειγμα

- *Οι συναρτήσεις* $\cos(nx)$ *είναι άρτιες συναρτήσεις ενω οι* $\sin(nx)$ *είναι περιττές.*
- *Οι συναρτήσεις* x^{2m} *είναι άρτιες συναρτήσεις ενώ οι* x^{2m+1} *είναι περιττές.*

Ας πάρουμε μια συναρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Αν f άρτια τότε η σειρά Fourier της f θα περιλαμβάνει μονο όρους $\cos(nx)$ και τον σταθερό ορο!

Αν f περιττή τότε η σειρά Fourier της f θα περιλαμβάνει μονο όρους $\sin(nx)$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, *η οποία ορίζεται ως* $f(x) = x^2$.

Υπολογιστε την σειρά Fourier και χρησιμοποιήστε την για να δειξετε οτι

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

και οτι

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Η συναρτηση f είναι άρτια συνεπώς η σειρά Fourier θα περιέχει μόνο συνημίτονα.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x}{n}\sin(nx)dx \\ &= 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)dx \\ &= \frac{4}{n^2}(-1)^n. \end{aligned}$$

Η σειρά Fourier για την f ειναι η

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx).$$

Για $x = 0$ η σειρά Fourier $F(0)$ συγκλίνει στην τιμή $f(0) = 0$, συνεπώς

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(n0),$$

και επειδή $\cos(n0) = 1$ έχουμε οτι

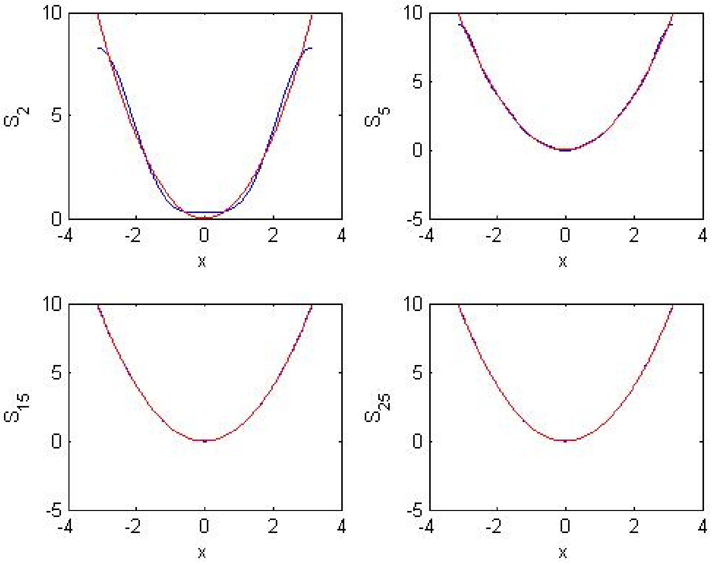
$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Για $x = \pi$ η σειρά Fourier $F(0)$ συγκλίνει στην τιμή $f(\pi) = \pi^2$, συνεπώς

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(n\pi),$$

και επειδή $\cos(n\pi) = (-1)^n$ έχουμε οτι

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$


10
5
0
-4
-2
0
2
4
x
S2
S5
S15
S25
-5

Τι συμβαίνει αν $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$;

Ο μετασχηματισμός $y = \frac{\pi}{L}x$ απεικονίζει το διάστημα $[-L, L]$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή η σειρά Fourier για μια περιοδική συναρτηση με περίοδο $2L$, με βασικό πεδίο ορισμού $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ θα έχει την μορφή,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

για

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

ʼρτιες επεκτάσεις συναρτήσεων και συνημιτονοειδείς σειρές

Ας υποθέσουμε οτι μια συναρτηση ορίζεται μόνο στο $[0, L]$ και όχι σε όλο το $[-L, L]$, δηλαδή $f : [0, L] \to \mathbb{R}$.

Ορισμός

Η άρτια επέκταση της $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση $f_e : [-L, L] \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$f_e(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{για} \quad x \in [L, 0), \\ f(x) & \text{για} \quad x \in [0, L], \end{cases}$$

Η συναρτηση αυτή επεκτεινεται περιοδικα για $x \notin [-L, L]$ σύμφωνα με τον κανόνα $f(x + 2L) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f_e είναι μια άρτια συναρτηση η οποία ταυτίζεται με την αρχική συναρτηση f στο διάστημα $[0, L]$

Η σειρα Fourier για την f_e θα είναι μια σειρά που θα περιέχει μόνο όρους $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ και τον σταθερό όρο και ονομαζεται σειρά συνημιτόνων (half range cosine series)
Η σειρά αυτή αποτελεί μια προσέγγιση της αρχικης συναρτηση f στο διάστημα $[0, L]$, μόνο απο συνημίτονα και τον σταθερό όρο,

$$F_c(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_e(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_e(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Περιττες επεκτάσεις συναρτήσεων και ημιτονοειδείς σειρές

Ας υποθέσουμε οτι μια συναρτηση ορίζεται μόνο στο $[0, L]$ και όχι σε όλο το $[-L, L]$, δηλαδή $f : [0, L] \to \mathbb{R}$.

Ορισμός

Η περιττή επέκταση της $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ *είναι μια συνάρτηση* $f_o : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *η οποία ορίζεται ως*

$$f_o(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{για} \quad x \in [L, 0), \\ f(x) & \text{για} \quad x \in [0, L], \end{cases}$$

Η συναρτηση αυτή επεκτεινεται περιοδικα για $x \notin [-L, L]$ *σύμφωνα με τον κανόνα* $f(x + 2L) = f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Η f_e είναι μια περιττή συναρτηση η οποία ταυτίζεται με την αρχική συναρτηση f στο διάστημα $[0, L]$

Η σειρα Fourier για την f_o θα είναι μια σειρά που θα περιέχει μόνο όρους $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ και και ονομαζεται σειρά ημιτόνων (half range sine series)
Η σειρά αυτή αποτελεί μια προσέγγιση της αρχικης συναρτηση f στο διάστημα $[0, L]$, μόνο απο ημίτονα,

$$F_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_o(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *με τύπο* $f(x) = x + x^2$.

Βρείτε την άρτια και την περιττή επέκταση της συνάρτησης αυτής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Υπολογίστε την σειρά συνημιτόνων και την σειρά ημιτόνων (half range series) για την συνάρτηση f.

Η άρτια επέκταση f_e ορίζεται ως

$$f_e(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{για} \quad x \in [-\pi, 0), \\ f(x) & \text{για} \quad x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Επειδή $f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2$, έχουμε ότι

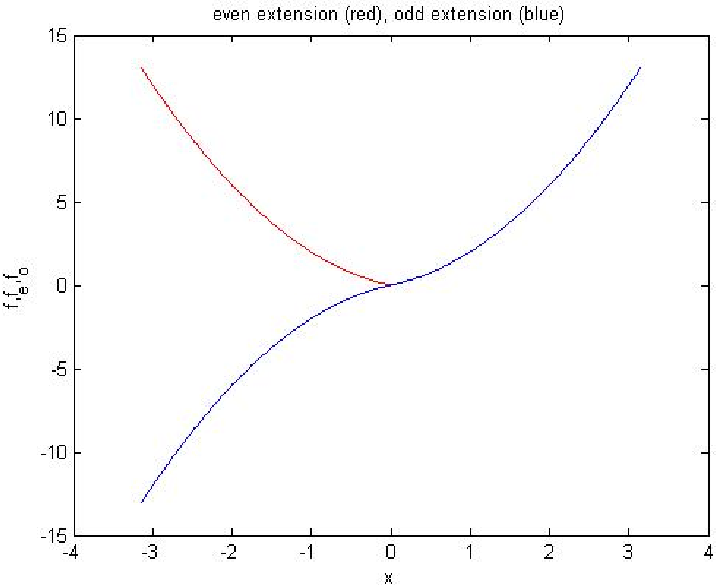
$$f_e(x) = \begin{cases} -x + x^2 & \text{για} \quad x \in [-\pi, 0), \\ x + x^2 & \text{για} \quad x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Η περιττή επέκταση f_o ορίζεται ως

$$f_o(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{για} \quad x \in [-\pi, 0), \\ f(x) & \text{για} \quad x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Επειδή $-f(-x) = -(-x) - (-x)^2 = x - x^2$, έχουμε ότι

$$f_o(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{για} \quad x \in [-\pi, 0), \\ x + x^2 & \text{για} \quad x \in [0, \pi], \end{cases}$$


even extension (red), odd extension (blue)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x
f,f_e,f_o

Η σειρά συνημιτόνων για την f είναι

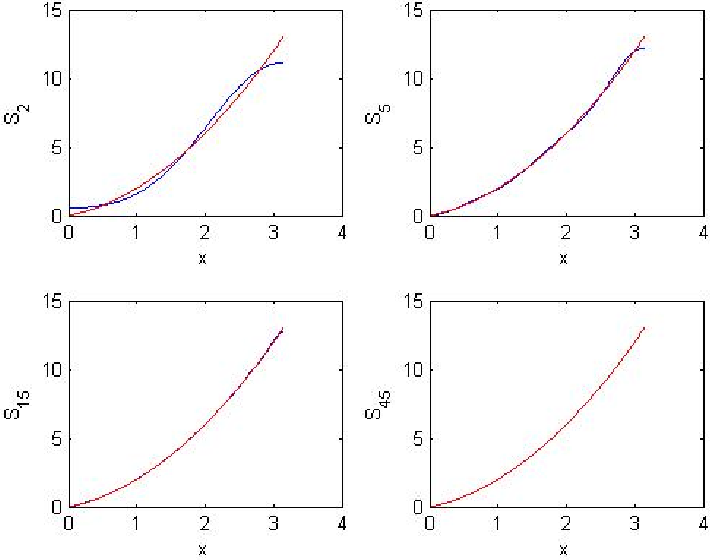
$$F_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad x \in (0, \pi),$$

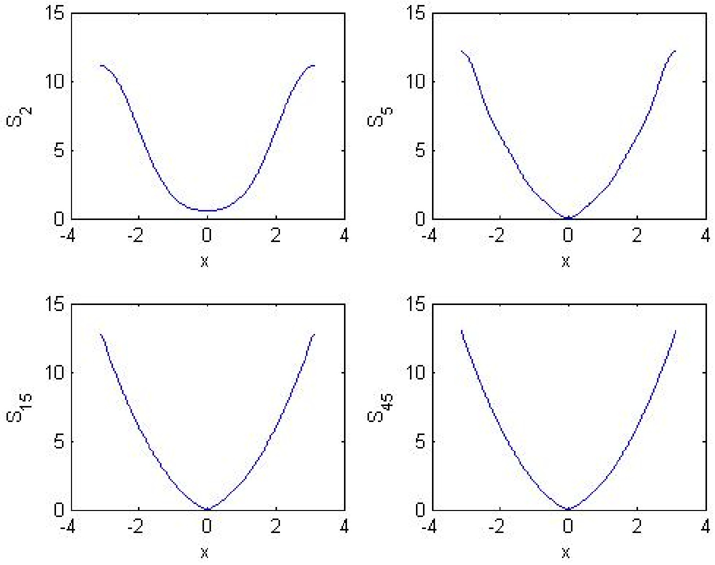
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x + x^2)dx = 2\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x + x^2)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi + 1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\right] \end{aligned}$$

'ρα

$$F_c(x) = \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi + 1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\right]\cos(nx), \quad x \in (0, \pi).$$


15
10
5
0
0 1 2 3 4
x
S2
S5
S15
S45



S_2
S_5
S_{15}
S_{45}
x
x
x
x

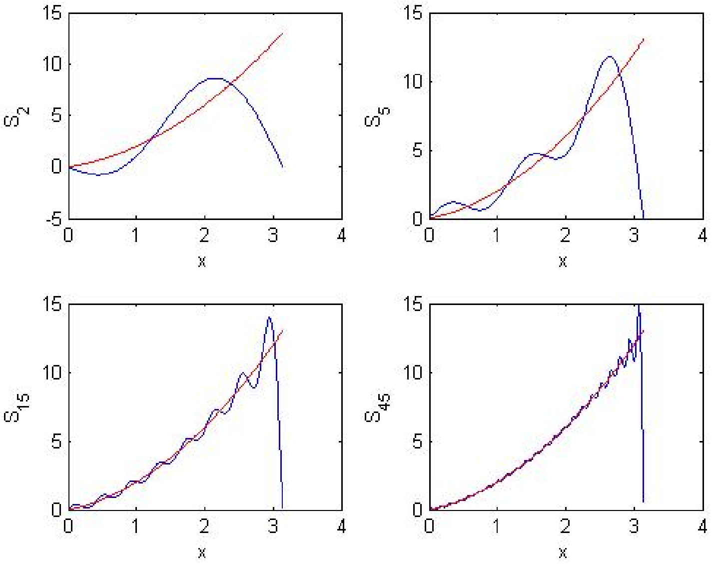
Η σειρά ημιτόνων για την f είναι

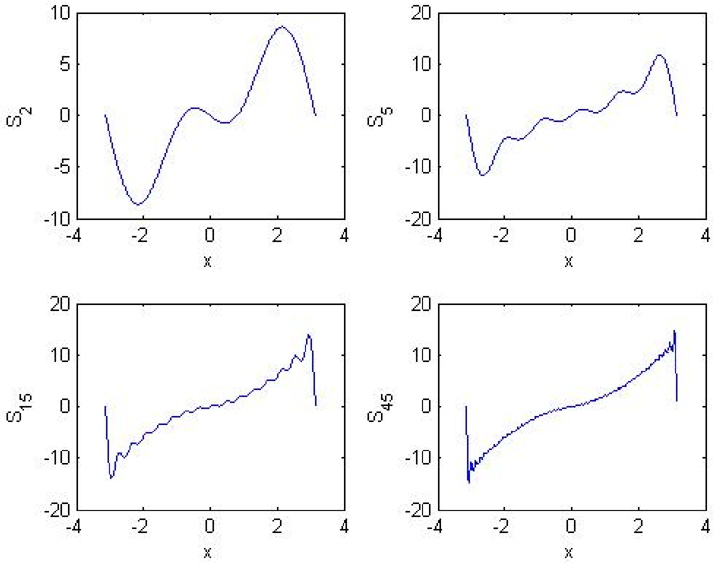
$$F_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad x \in (0, \pi),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + x^2) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2 + \pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right] \end{aligned}$$

'ρα

$$F_s(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^2 + \pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right] \sin(nx), \quad x \in (0, \pi).$$


15
10
5
0
-5
S_2
0 1 2 3 4
x
15
10
5
0
S_5
0 1 2 3 4
x
15
10
5
0
S_{15}
0 1 2 3 4
x
15
10
5
0
S_{45}
0 1 2 3 4
x


10
5
0
-5
-10
-4
-2
0
2
4
x
S_2
20
10
0
-10
-20
-4
-2
0
2
4
x
S_5
20
10
0
-10
-20
-4
-2
0
2
4
x
S_{15}
20
10
0
-10
-20
-4
-2
0
2
4
x
S_{45}