ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Αθ. agiannaco@aueb.gr

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

4 ώρες – ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ (ΛΕΠΤΟΜΕΡΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ)

ώρες γρ.

12.00-13.00 ΤΕΤΑΡΤΕΣ 13.00 – 15.00 Αξ2

12.00-13.00 ΠΕΜΠΤΕΣ "

2 ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Κ. ΜΑΜΑΛΟΥΚΑΣ

e-class ~~Μα~~ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ 2024

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ) — ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ
- ΠΡΟΟΔΟΣ (± ΠΑΣΧΑ) — ″
- ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ [ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ή ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ
  ή και τα 2
  + BONUS ΣΤΗΝ ΤΕΛΙΚΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ]

* ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

MARSDEN + TROMBA Διανυσματικός Λογισμός

Διαφάνειες / Σημειώσεις

1. ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
   - ΟΡΙΣΜΟΥΣ
   - ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ / ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
   - ΧΡΗΣΗ ΟΛΩΝ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ
2. ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΛΥΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ
3. ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΥΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι — Συναρτήσεις, ακολουθίες στο $\mathbb{R}$

$(x_n) \subset \mathbb{R}$

Συμπεριφορά όταν το $n \to \infty$

$\rho > 0$ επιτόκιο ετήσιο

x_0

$$x_1 = x_0 + \underbrace{\rho x_0}_{\text{τόκος}} = (1+\rho)x_0$$

$$x_2 = x_1 + \rho(1+\rho)x_0 = (1+\rho)^2 x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1+\rho)^n x_0$$

$\boxed{\text{Όριο}}$ Τι κάνει το x_n για n αρκετά μεγάλο.

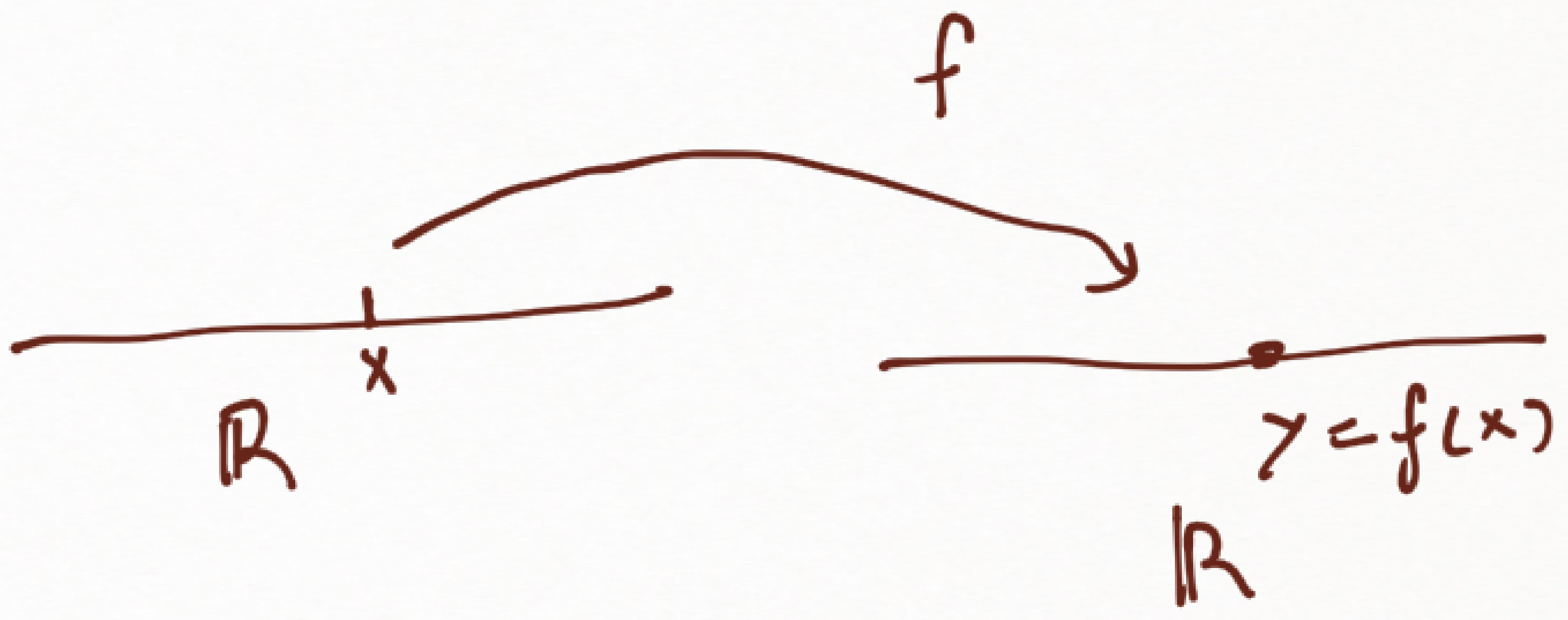
$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \iff \forall \varepsilon>0 \quad \exists\, N\in\mathbb{N} \ \text{τ.ω.} \quad |x_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, n>N$$

Αν περιμένω αρκετά $n > N$ τότε το x_n θα αρκετά κοντά στο L για τα $n > N$

Συναρτήσεις

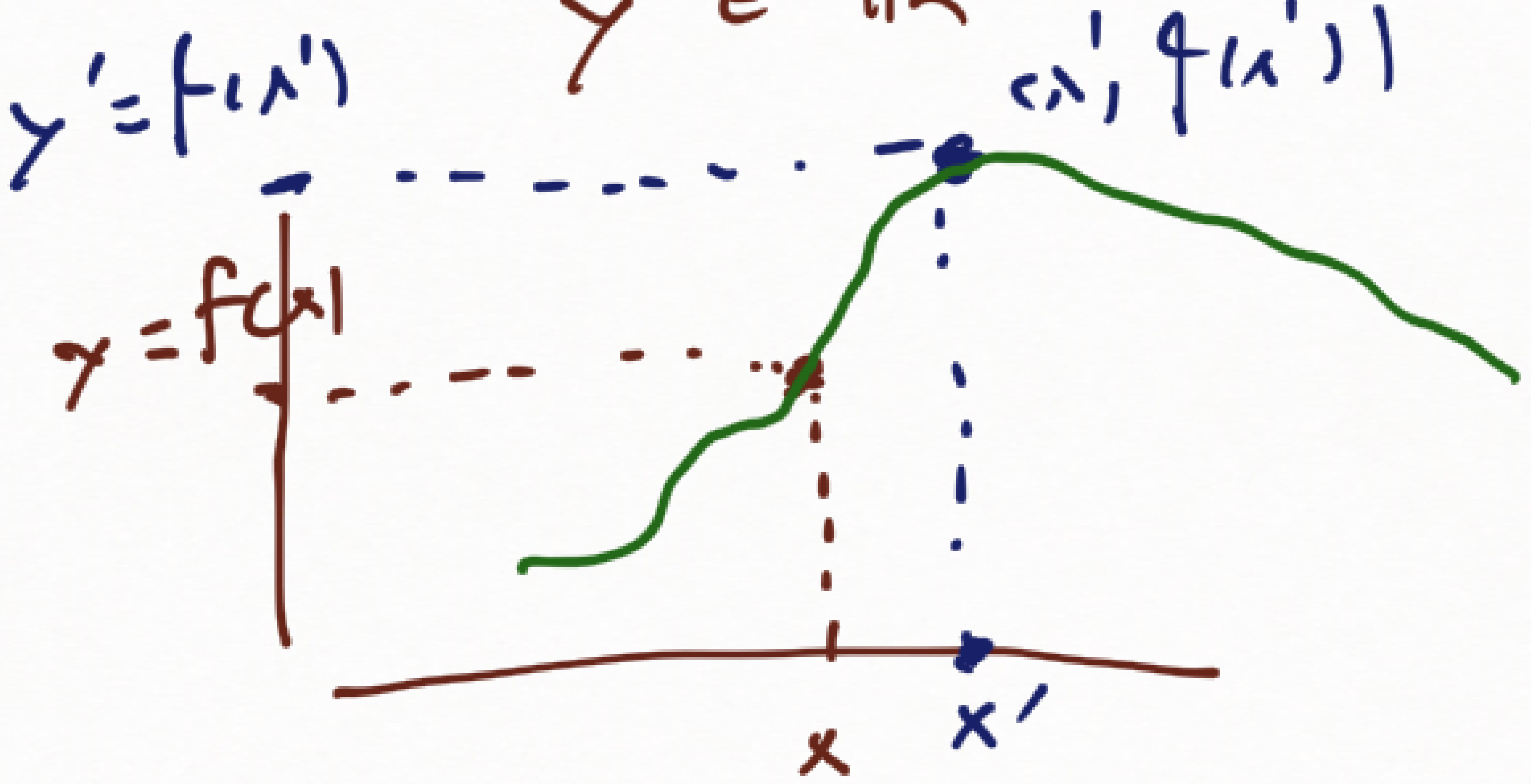
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$



$x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $y \in \mathbb{R}$

De Cartes

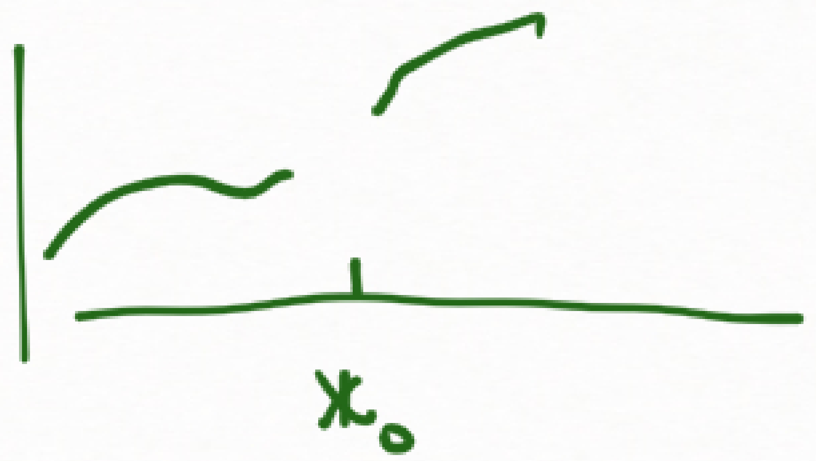


γράφημα
της συνάρτησης f

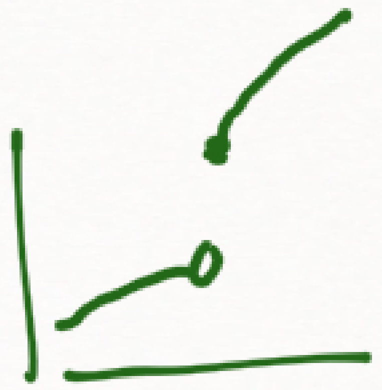
οπτικοποίηση

$(x, f(x))$

Θεματική Συναρτήσεις Όριο $f(x)$



Συνέχεια



Ασυνέχεια

$x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff$$ Όσο το x πλησιάζει στο x_0

τόσο η $f(x)$ " L

Πλησιάζω: Απόσταση μεταξύ σημείων

x κοντά στο x_0 αν απόσταση $|x - x_0| < \epsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ τ.ω.

$|f(x) - L| < \varepsilon$ για $|x - x_0| < \delta$

$\forall \; (x_n) \quad x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to L$

Συνέχεια: Μικρές μεταβολές στο $x \longrightarrow$ Μικρές μεταβολές στο $f(x)$

Παράγωγος

Ρυθμ. μεταβολής της τιμής μιας συνάρτησης

$x \mapsto f(x)$

$x + \Delta x \mapsto f(x+\Delta x)$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} f'(x)$$

$f'(x) > 0$ αύξηση της τιμής της συνάρτησης

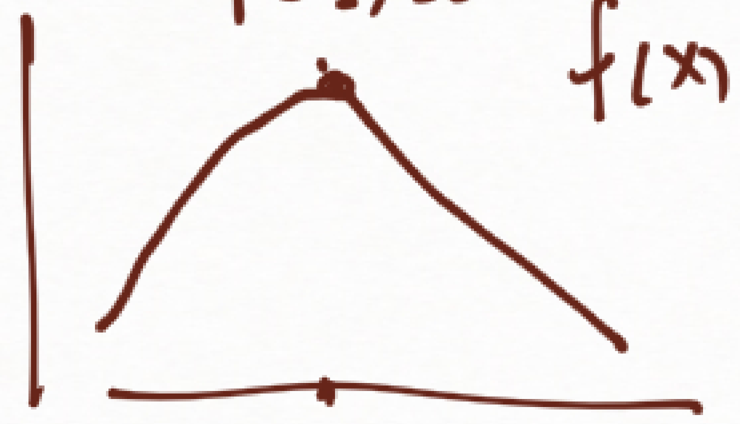
$f'(x) < 0$ μείωσης "

Taylor

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)(\Delta x)^3 + \dots$$

$f(x)$ $\quad f'(x) \geq 0$

$f'(x_0) = 0$ $\quad f'(x) \leq 0$



x_0 $\quad x$

$x \to f'(x)$ συνάρτηση

$f'(x)$

x

ΜΕΓΙΣΤΟ

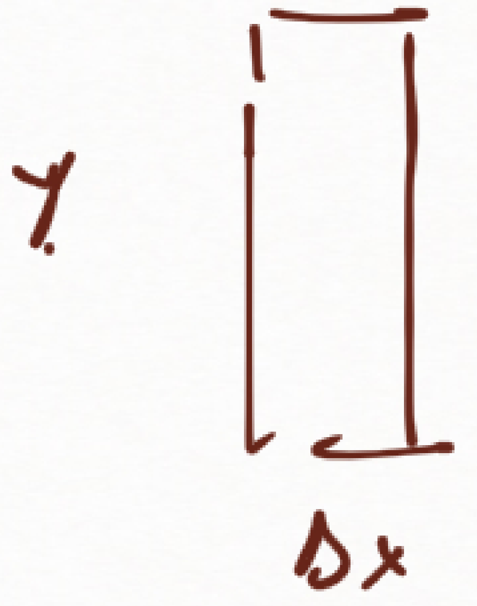
$$\begin{cases} x_0 \quad \underline{\text{μέγιστο}} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \\ x_0 \quad \underline{\text{ελάχιστο}} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

(κρίσιμο σημείο)

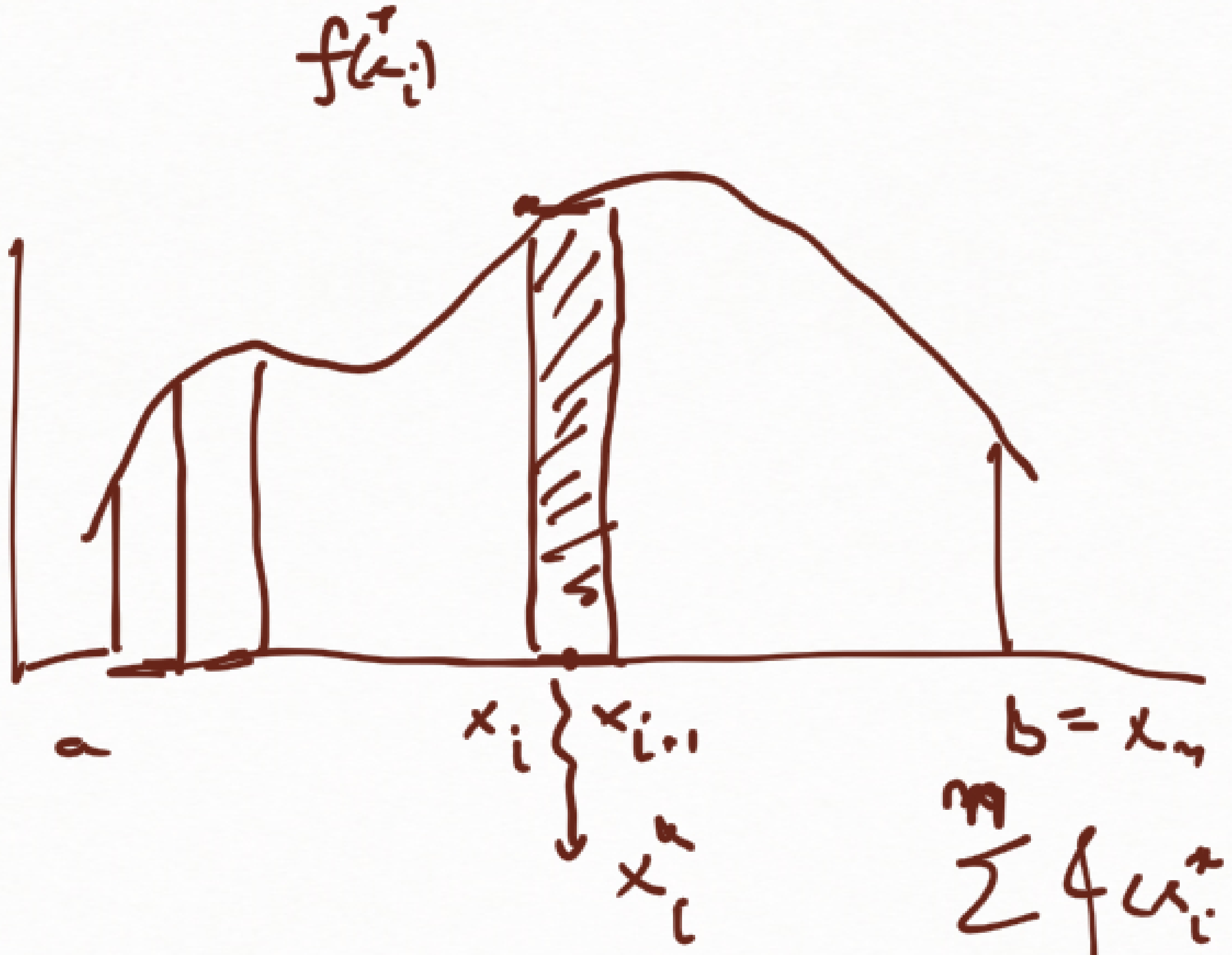
$f''(x_0) \cancel{\geq} 0$ μέγιστ.

≥ 0 ελάχιστ.

Я.к хчеит



$$E = y\,\Delta x$$



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i) = E_n$$

$$E = \lim_{n\to\infty} E_n =: \int_a^b f(x)\,dx$$

Riemann

Αν γνωρίζω τον ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης μπορώ να κατασκευάσω την ίδια την συνάρτηση

Leibnitz

Newton

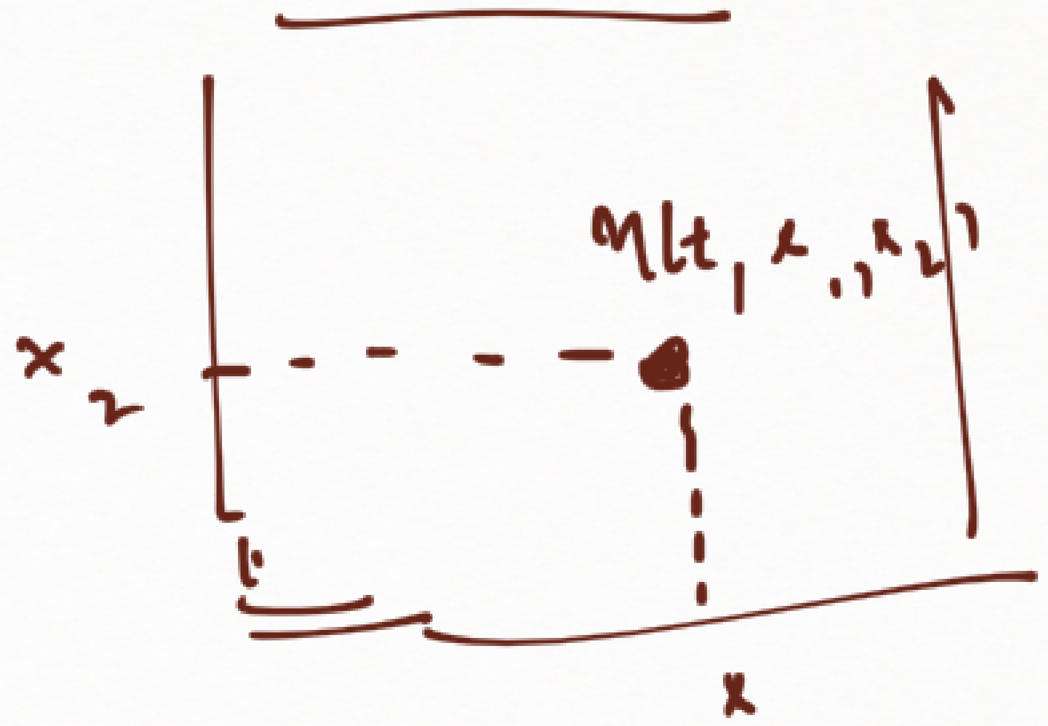
Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λογισμός II

Κάνε το Σχήμα II

Η φύση δεν είναι μονοδιάστατη!

$\eta(t_1) \quad \eta(t_2) \quad \eta(t_3) \quad \dots$



$(t, x_1, x_2) \longmapsto \eta(t, x_1, x_2)$ Συνάρτηση

Τριών μεταβλητών

$(x_1, x_2, \dots, x_{30})$

Απόδοση στο μάθημα 1   2   κοκ

1ο σημαν.

$(10, 1, 2, 4, 9)$

~~(8, 5,~~ ✗

$(9, 1, 2, 4, 10)$

Τότε το $\mathbb{R}$ δεν είναι επαρκές

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ φορές}}$$

διατεταγμένη $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$

- Μελέτη του χώρου $\mathbb{R}^n$
- " απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

<u>Παρ.</u> Βιοστατιστική

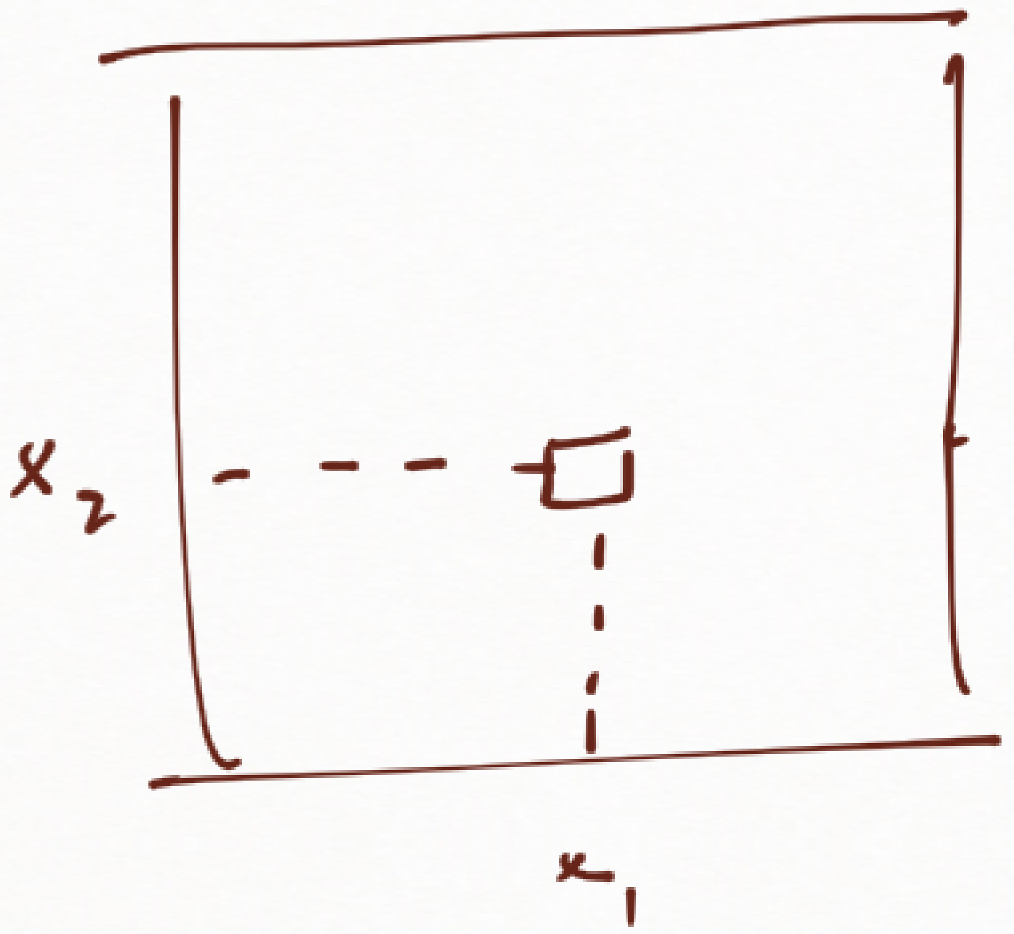
x_1 αρτηριακή πίεση
x_2 βάρος
x_3 Επίπεδο χοληστερίνης
x_4 ηλικία

$y =$ πιθανότητα στεφανιαίας
συμβάματος

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Συνάρτηση $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

Παρ. Περιβαλλοντική [illegible]



$$(t, x_1, x_2) \longmapsto \big(n_1(t, x_1, x_2), n_2(t, x_1, x_2), n_3(t, x_1, x_2), n_4(t, x_1, x_2)\big)$$

n_1	Συγκέντρωση	CO_2
n_2	"	NO
n_3	"	O_3
n_4	"	CH_4

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

— Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ [ακολουθίες σε σύνολο αυτό)

— Όρια

— Παράγωγος   πίνακας μεταβολής όλων των εξόδων $y=(y_1,\dots,y_m)$

ως προς όλες τις εισόδους $x=(x_1,\dots,x_n)$

$m\times n$ πίνακας μεταβολής

$\mathbb{R}^{m\times n}$ Πίνακας m γραμμών

n στηλών

— Ολοκλήρωση   Ολοκλήρωση ως προς περισσότερες από 1 μεταβλητή

Πολλαπλή ολοκλήρωση   Πολλαπλό ολοκλήρωμα.

Ενότητα 1 Το σύνολο $\mathbb{R}^n$, διαφορετικές τοπολογίες, ακολουθίες στο $\mathbb{R}^n$ (συγκλίνουσες κ.ο.κ.)

Ενότητα 2 ~~Απεικ~~ Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

- Όριο
- Συνέχεια

Ενότητα 3 Παραγώγιση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

- Df $\qquad \mathbb{R}^{m \times n}$

* - Μέγιστο - Ελάχιστο - "Σαγματικό" συναρτήσεων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

ΕΝΟΤΗΤΑ 4 Ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

$$\int f \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n \qquad \text{Πολλαπλά ολοκληρώματα}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5 Σειρές Fourier / Προσέγγιση συναρτήσεων σε ορθοκανονικές βάσεις $\{\sin(nx), \cos(nx)\}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Βελτιστοποίηση Υλοποίηση της μεθόδου Steepest Descent
- Πιθανότητες / Στατιστική Πολυμεταβλητές τ.μ.
- Χρονολογικές σειρές / Χρηματοοικονομικά