# Λογισμος II, $\mathbb{R}^3$

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2024

# Το $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, 3\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Το σύνολο των αντικειμένων που χρειάζονται 3 πραγματικούς αριθμούς για να περιγραφούν πλήρως.

**Παράδειγμα**

*Ένα σημείο της αίθουσας που για να περιγραφεί χρειάζεται μήκος, πλάτος και ύψος είναι ένα στοιχείο του* $\mathbb{R}^3$.

# Η εξίσωση της ευθειας

Ας θεωρησουμε ένα σημείο με διάνυσμα θέσης $b = (b_1, b_2, b_3)$ και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $a = (a_1, a_2, a_3)$.

Η ευθεία που περνάει απο το $b$ και ειναι παράλληλη στην κατευθυνση $a$ δίνεται απο την σχέση

$$x = b + t\, a, \quad t \in \mathbb{R},$$

ή κατά συνιστώσες

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1 + t\, a_1, \\ x_2(t) &= b_2 + t\, a_2, \\ x_3(t) &= b_3 + t\, a_3. \end{aligned}$$

Ας θεωρησουμε δυο σημεία με διανύσματα θέσης $a = (a_1, a_2, a_3)$ και $b = (b_1, b_2, b_3)$.
Η ευθεία που περνάει απο τα $a$ και $b$ δίνεται απο την σχέση

$$x = a + t\,(b - a), \quad t \in \mathbb{R},$$

ή κατά συνιστώσες

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 + t\,(b_1 - a_1), \\ x_2(t) &= a_2 + t\,(b_2 - a_2), \\ x_3(t) &= a_3 + t\,(b_3 - a_3). \end{aligned}$$

# Το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Αν έχουμε δύο διανύσματα $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ και $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ στον $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να ορίσουμε ένα τριτο διάνυσμα ως

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3. \end{aligned}$$

Ισχυει ότι

$$x \times y = -y \times x,$$
$$x \times x = 0$$

Το διάνυσμα $x \times y$ είναι καθετο στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα $x$ και $y$ και μήκος $\|x\| \|y\| \sin(\theta)$.

# Η εξίσωση του επιπέδου

Έστω $E$ ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ , $a$ ένα διάνυσμα σε αυτό, και $n$ ένα διάσυμα κάθετο σε αυτό.

Το $x$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στο $P$, αν και μόνο αν

$$x - a \text{ παράλληλο στο } P$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\langle x - a, h \rangle = 0.$$

Αυτο μας δείχνει ότι αν $x = (x_1, x_2, x_3)$ τότε

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + D = 0,$$

για κατάλληλες σταθερές $C_1, C_2, C_3, D$.

Απο 3 σημεία $a, b, c$ περνάει ένα και μόνο ένα επίπεδο $P$.

Για να κάθορίσουμε το επίπεδο αυτό αρκεί να σκεφτούμε ότι οποιοδηποτε διάνυσμα που ειναι κάθετο στο $P$ θα πρέπει να είναι κάθετο στα διανύσματα $a - b$ και $c - b$.

Συνεπώς το διάνυσμα

$$n = (a - b) \times (c - b)$$

είναι κάθετο στο επίπεδο.

Η εξίσωση του επιπέδου λοιπόν ειναι

$$\langle x - a, n \rangle = 0.$$

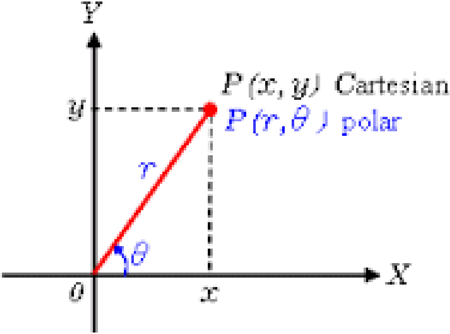
# Συστήματα συντεταγμένων

Στις περιπτώσεις $n = 2, 3$ ένα διάνυσμα $x$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο επίπεδο ή στο χώρο αντίστοιχα.

Όταν μιλάμε για το $x = (x_1, x_2, x_3)$ στο μυαλό μας εχουμε το σημείο $A$ με καρτεσιανές συντεταγμενες $(x_1, x_2, x_3)$.

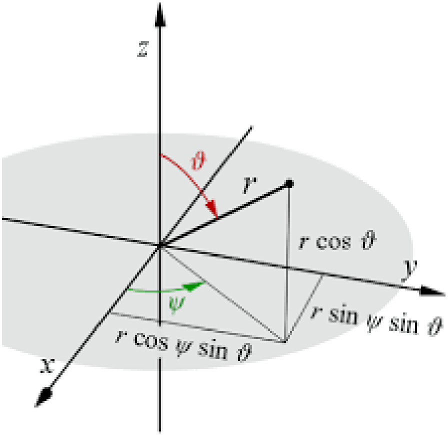
Ας ταυτίσουμε τώρα το διάνυσμα με την θέση αυτού του σημείου και ας προσπαθήσουμε να δούμε εναλλακτικούς τρόπους περιγραφής της θέσης του σημειου $A$.

# Πολικές συντεταγμένες




$$x_1 = r\,\cos(\theta), \quad x_2 = r\,\sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

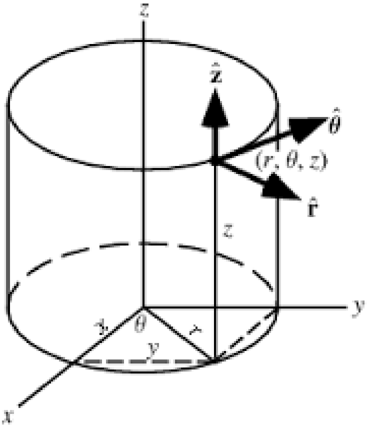
# Σφαιρικές συντεταγμενες




$$x_1 = r\ \cos(\psi)\sin(\theta),\ \ x_2 = r\ \sin(\psi)\ \sin(\theta),\ \ x_3 = r\ \cos(\theta)$$


I don't think this is what the professor meant by "polar coordinates"
igloos make a lot more sense in spherical coordinates, though.
2006
© COURTNEY GIBBONS

# Κυλινδρικές συντεταγμενες




$$x_1 = r\cos(\theta),\ \ x_2 = r\sin(\theta),\ \ x_3 = x_3.$$