Ανάλυση
Φυλλάδιο ασκήσεων 7

1. Δείξτε ότι η $d(x,y)=(x-y)^2$ δεν είναι μετρική στον $\mathbb{R}$.
2. Δείξτε ότι η $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ είναι μετρική στον $\mathbb{R}$.
3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Βρείτε τις τιμές του $k\in\mathbb{R}$ για τις οποίες
   (α) Ο (X,kd) είναι μετρικός χώρος
   (β) Ο $(X,d+k)$ είναι μετρικός χώρος
4. Δείξτε ότι στον χώρο των ακολουθιών S με στοιχεία τις ακολουθίες $x=(x_n)$, η $d(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|$ είναι μετρική.
5. Για οποιοδήποτε σύνολο X η διακριτή μετρική ορίζεται απο τον τύπο
   $$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$
   Δείξτε οτι είναι μετρική.
6. Δείξτε οτι η
   $$d(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt$$
   είναι μετρική στον $C[a,b]$.
7. Δείξτε την γενικευμένη τριγωνική ανισότητα
   $$d(x_1,x_n)\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n).$$
8. Δείξτε οτι την ανάστροφη τριγωνική ανισότητα
   $$|d(x,z)-d(y,z)|\leq d(x,y).$$
9. Δείξτε ότι
   $$|d(x,y)-d(z,w)|\leq d(x,z)-d(y,w).$$
10. Δείξτε ότι η ιδιότητα $d(x,y)\geq 0$ μπορεί να ακολουθήσει απο τις ιδιότητες
    $$(a)\ \ d(x,y)=0,\iff x=y,$$
    $$(b)\ \ d(x,y)=d(y,x),$$
    $$(c)\ \ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$
11. Βρείτε μια ακολουθία $x=(x_n)$, ή οποία ικανοποιεί την ιδιότητα $x\in\ell^p$, $p>1$ αλλά $x\not\in\ell^1$.
12. Βρείτε μια ακολουθία $x=(x_n)$ η οποία ικανοποιεί $x_n\to 0$ αλλά δεν ανήκει σε κανένα χώρο ℓ^p.
13. Δείξτε οτι αν (X_1,d_1), (X_2,d_2) μετρικοί χώροι τότε και ο $(X_1\times X_2,d_1+d_2)$ είναι επίσης μετρικός χώρος.
14. Δείξτε ότι η $d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}$ είναι μετρική στον χώρο των ακολουθιών S.