Ανάλυση
Φυλλάδιο ασκήσεων 4

1. Δείξτε ότι αν η f είναι κοίλη συνάρτηση ενα τοπικό μέγιστο είναι και ολικό μέγιστο.
2. Δείξτε ότι αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}[X] = 0$ και $X \in [-1, 1]$ τότε
$$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \ \ \forall\, t \geq 0.$$
3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι f κυρτή αν και μόνο αν
$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_1)(x_1 - x_2), \ \ \forall\ x_1, x_2$$
4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι f κυρτή αν και μόνο αν
$$(f'(x_1) - f'(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0 \ \ \forall\ x_1, x_2$$
5. Δείξτε ότι αν f αυστηρά κυρτή τότε το ελάχιστο είναι μοναδικό.
6. Δείξτε ότι αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ κυρτή τοτε αν η f επιτυγχάνει ολικό μέγιστο σε ένα σημείο $x^* \in (a, b)$ τότε είναι σταθερή.
7. Δείξτε ότι μια συνάρτηση κατανομής έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος απο ασυνέχειες.
8. Δείξτε οτι αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy το ίδιο συμβαίνει και για την $(f(x_n))$.
9. Δείξτε ότι η συναρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή
10. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -\ln(x)$ είναι κυρτή.
11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln(x))$ είναι κοίλη και χρησιμοποιωντας την πληροφορία αυτή δείξτε ότι
$$\ln(\frac{1}{2}(x + y)) \geq \sqrt{\ln x \ \ \ln y}$$
12. Δείξτε την ανισότητα του Jensen : Αν f κυρτή τότε
$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$
για $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
13. Δείξτε ότι για $a_1, \cdots, a_n > 0$ και $\lambda_i \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ισχύει ότι
$$a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$
Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα του γεωμετρικού και του αριθμητικού μέσου. ψ
14. Δείξτε την ανισότητα του Young
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \ \ \forall\ a, b \geq 0$$
και για $p, q \in (1, \infty)$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
15. Δείξτε την ανισότητα του Holder
$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$
με p, q όπως παραπάνω