Εισαγωγή στην Μαθηματική Ανάλυση
με εφαρμογές στις Πιθανότητες και την Στατιστική

Α. Ν. Γιαννακόπουλος,
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

3 Οκτωβρίου 2023

I see it but I don't believe it

Cantor on a letter to Dedekind
upon the discovery that $[0,1]$ and
$[0,1] \times [0,1]$ have the same cardinality.
Georg Cantor, Mathematician 1845-1918

Your proposition may be good,
But let's have one thing understood,
Whatever it is, I'm against it.
And even when you've changed it or condensed it,
I'm against it.

Prof. Quincy Adams Wagstaff (aka Groucho Marx)
in "Horsefeathers" (1932, Paramount Pictures)
Groucho Marx, Comedian 1890-1977

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές εισαγωγικές έννοιες

1.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε ορισμένες βασικές έννοιες απο την θεωρία συνόλων και σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση της πραγματικής ανάλυσης. Ορισμένες απο τις έννοιες αυτές έχουν αρκετό ενδιαφέρον και απο μόνες τους εφόσον βρισκουν σημαντικές εφαρμογές στις πιθανότητες και στην στατιστική.

1.2 Σύνολα και πράξεις συνόλων.

Ένα **σύνολο** A είναι μία συλλογή ομοειδών αντικειμένων ή εννοιών. Αν το αντικείμενο ή η έννοια x συμπεριλαμβάνεται στην σύλλογή A θα λέμε ότι το x ανήκει στο σύνολο A και θα το συμβολίζουμε $x \in A$. Αν όχι θα λέμε ότι το x δεν ανήκει στο σύνολο A και θα το συμβολίζουμε $x \notin A$. Ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται το **κενό σύνολο** και συμβολίζεται $\emptyset$.

Παράδειγμα 1.2.1. *Η συλλογή των αριθμών $2, 4, 6$ αποτελεί ένα σύνολο το οποίο θα συμβολίζουμε $A = \{2, 4, 6\}$. Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$. Όμως, π.χ. $8 \notin A$.*

Λέμε ότι ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου S, και το συμβολίζουμε $A \subset S$, αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του S αλλά δεν ισχύει το ανάποδο. Δηλαδή,

$$A \subset S \iff \{a \in A \implies a \in S\}$$

Παράδειγμα 1.2.2. *Αν $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ τότε $A \subset S$ αλλά $S \not\subset A$.*

Παράδειγμα 1.2.3. *Αν $S = \{x \mid -1 < x \leq 1\}$ και $A = \{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}\}$ τότε $A \subset S$ αλλά $S \not\subset A$.*

Οι βασικές πράξεις μεταξύ των συνόλων είναι η **ένωση**, η **τομή** και το **συμπλήρωμα**.

▷ Η ένωση δύο συνόλων A και B μας δίνει ένα καινούργιο σύνολο το οποίο συμβολίζουμε με $A \cup B$ και περιέχει τα στοιχεία του A ή του B:

$$c \in A \cup B \iff c \in A \text{ ή } c \in B$$

▷ Η τομή δύο συνόλων A και B μας δίνει ένα καινούργιο σύνολο το οποίο συμβολίζουμε με $A \cap B$ και περιέχει τα **κοινά στοιχεία** των A και B:

$$c \in A \cap B \iff c \in A \text{ και } c \in B$$

▷ Για ένα σύνολο $A \subset S$ μπορούμε να ορίσουμε το **συμπληρωματικό** του σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε A^c, και το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία του S τα οποία **δεν** περιέχονται στο S:

$$b \in A^c \iff b \in S \text{ και } b \notin A$$

Μία χρήσιμη ιδιότητα της τομής και της ένωσης είναι η ακόλουθη,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Κάνοντας χρήση της έννοιας του συμπληρωματικού συνόλου μπορούμε να ορίσουμε την διαφορά δύο συνόλων A και B τα οποία είναι και τα δύο υποσύνολα του ίδιου συνόλου S. Η διαφορά του A απο το B συμβολίζεται με $A \setminus B$ και το σύνολο αυτό περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Συνεπώς

$$c \in A \setminus B \iff c \in A \ \textbf{αλλά} \ c \notin B.$$

Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να οριστεί και για περισσότερα απο δύο σύνολα. Για τρία σύνολα

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 := (A_1 \cup A_2) \cup A_3,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 := (A_1 \cap A_2) \cap A_3,$$

και συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο για περισσότερα των τριών. Εν γένει

$$A_1 \cup \cdots A_{n-1} \cup A_n := (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n,$$
$$A_1 \cap \cdots A_{n-1} \cap A_n := (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n,$$

για οποιοδήποτε n φυσικό αριθμό. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

Προφανώς

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff x \in \text{σε κάποιο απο τα } A_1 \cdots A_n \iff \exists\, i \in \{1, \cdots, n\} \text{ τέτοιο ώστε } x \in A_i,$$
$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x \in \text{σε κάθε ένα απο τα } A_1 \cdots A_n \iff \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}\ x \in A_i,$$

Οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται και για άπειρα το πλήθος σύνολα ($n = \infty$)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ για κάποιο } i = 1, 2, \cdots\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \cdots\}.$$

Οι ακόλουθοι κανόνες, γνωστοί και ως νόμοι του De Morgan , συνδέουν την ένωση, την τομή και την συμπλήρωση, και είναι πολύ χρήσιμοι,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c.$$

Στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να θέσουμε $n = \infty$.

Παράδειγμα 1.2.4. *Ας θεωρήσουμε τα σύνολα*

$$A = \{2, 4, 6\}, \ \ B = \{1, 3, 5\}$$

Τότε,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ \ A \cap B = \emptyset.$$

Παράδειγμα 1.2.5. *Έστω* $A_i = \{x \mid -\frac{1}{i^2} < x \leq \frac{1}{i^2}\}$. *Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι*

$$\bigcup_{i=1}^{6} A_i = \{x \mid -1 < x \leq 1\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{6} A_i = \{x \mid -\frac{1}{36} < x \leq \frac{1}{36}\}.$$

Παράδειγμα 1.2.6. *Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.2.2 μπορούμε να δούμε ότι* $A^c = \{1, 3, 5\}$.

Παράδειγμα 1.2.7. *Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.2.3 μπορούμε να δούμε ότι*

$$A^c = \{x \mid -1 < x \leq -\frac{1}{2}, \text{ ή } \frac{1}{2} < x \leq 1\}.$$

Παράδειγμα 1.2.8. *Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.2.5 μπορούμε να δούμε ότι*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid -1 < x \leq 1\}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}.$$

Σχόλιο 1.2.9. *Εφιστούμε την προσοχή στο ότι πολλές φορές ιδιότητες που ισχύουν για κάθε πεπερασμένο* n *δεν ισχύουν απαραίτητα στην περίπτωση όπου* $n = \infty$. *Η παρατήρηση αυτή αποτελεί και βασικό θέμα της ανάλυσης. Χαριτολογώντας θα μπορούσαμε να πούμε οτι ανάλυση είναι η τέχνη του να περνάς απο το πεπερασμένο στο άπειρο.*

Πολλές μαθηματικές εκφράσεις μπορούμε να τις μεταγράψουμε με την γλώσσα των συνόλων και αυτό μας δίνει ένα πολύ καλό εναλλακτικο τρόπο έκφρασης. Για παράδειγμα, η πρόταση $x \in \bigcup_n A_n$ σημαινει οτι υπάρχει κάποιο n τέτοιο ωστε να ισχύει $x \in A_n$. Συνεπώς, αντί να γράψουμε $\exists\, n$ τέτοιο ωστε $x \in A_n$ μπορούμε ισοδυναμα να γράψουμε $x \in \bigcup_n A_n$. Με τον ίδιο τροπο, η έκφραση $x \in \bigcap_n A_n$ σημαινει οτι για κάθε n ισχύει $x \in A_n$. Συνεπώς, αντί να γράψουμε $\forall\, n\, x \in A_n$ μπορούμε ισοδυναμα να γράψουμε $x \in \bigcap_n A_n$.

1.3 'κολουθίες συνόλων

Θα εισάγουμε τώρα ορισμένες βασικές έννοιες σχετικά με τις ακολουθίες συνόλων.

Ορισμός 1.3.1. *Μια άπειρη συλλογή απο σύνολα* $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$ *ονομάζεται ακολουθία συνόλων.*

Παράδειγμα 1.3.2. *Η συλλογή συνόλων* $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$ *του παραδείγματος 1.2.5 αποτελεί μια ακολουθία συνόλων.*

Σε πολλές περιπτώσεις έχει νόημα να ρωτήσουμε την ερώτηση,

> Ποιό είναι το σύνολο των κοινών στοιχείων όλων των A_n απο κάποιο n και πάνω·

ή την ερώτηση

> Ποιό είναι το σύνολο των κοινών στοιχείων άπειρων το πλήθος A_n·

Το πρώτο σύνολο το ονομάζουμε το **κάτω όριο** την ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}$ ενώ το δεύτερο το ονομάζουμε το **άνω όριο** της ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}$.

Ορισμός 1.3.3 (Άνω και κάτω όριο ακολουθίας συνόλων)**.**

1. *Το* **κάτω όριο** *της ακολουθίας συνόλων* $\{A_n\}$ *είναι το σύνολο*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

2. *Το* **άνω όριο** *της ακολουθίας συνόλων* $\{A_i\}$ *είναι το σύνολο*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

Σχόλιο 1.3.4. *Το άνω και κάτω όριο μιας ακολουθία συνόλων έχει την ακόλουθη ερμηνεία:*

1. *Το κάτω όριο μιας ακολουθίας συνόλων είναι το σύνολο όλων των στοιχείων x, τέτοια ώστε το x να ανήκει σε όλους τους όρους της ακολουθίας A_n απο κάποιο δείκτη n^* και μετά. Με άλλα λόγια, το x ανήκει σε όλα τα μέλη της ακολουθίας $\{A_n\}$ εκτός από ένα πεπερασμένο το πλήθος αριθμό των συνόλων $A_1, A_2, \cdots, A_{n^*-1}$. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε μαθηματικά ως*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \mid \exists\, n^* \text{ έτσι ώστε } x \in A_{n^*}, A_{n^*+1}, \cdots\}.$$

Για το λόγο αυτό πολλές φορές στις πιθανότητες ερμηνεύουμε το άνω όριο μιας ακολουθίας συνόλων σαν τα γεγονότα τα οποία είναι κοινά σε όλες τις παρατηρήσεις εκτός απο πεπερασμένες το πλήθος απο αυτές.

2. *Το άνω όριο μιας ακολουθίας συνόλων είναι το σύνολο όλων των στοιχείων x τα οποία ανήκουν σε άπειρα το πλήθος απο τα σύνολα αυτά, δηλαδή*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \mid x \in A_n \text{ για άπειρους το πλήθος δείκτες } n\}.$$

Για το λόγο αυτό πολλές φορές στις πιθανότητες ερμηνεύουμε το άνω όριο μιας ακολουθίας συνόλων σαν τα γεγονότα τα οποία συμβαίνουν άπειρα συχνά (infinitely often).

Εν γένει ισχύει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Ορισμός 1.3.5. *Αν για μια ακολουθία συνόλων $\{A_n\}$ ισχύει $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ τότε λέμε ότι το όριο της ακολουθίας υπάρχει και συμβολίζουμε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Παράδειγμα 1.3.6. *Αν για την ακολουθία συνόλων $\{A_n\}$ ισχύει $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ (αύξουσα ακολουθία) τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παράδειγμα 1.3.7. *Αν για την ακολουθία συνόλων $\{A_n\}$ ισχύει $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ (φθίνουσα ακολουθία) τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παράδειγμα 1.3.8. *Αν $A_n = \{x \mid 1 - \frac{1}{n} < x < 2 + \frac{1}{n}\}$ τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \{x \mid 1 \le x \le 2\}.$$

Παράδειγμα 1.3.9. *Αν A_n ξένα μεταξύ τους τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset.$$

1.4 Οι πραγματικοί αριθμοί.

Θεωρούμε μία βασική εξοικείωση με τους πραγματικούς αριθμούς, το σύνολο των οποίων θα ονομάζουμε $\mathbb{R}$.
Στο σύνολο αυτό ορίζονται οι πράξεις της **πρόσθεσης** και του **πολλαπλασιασμού**.
Οι πράξεις αυτες έχουν τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες,

Πρόσθεση	**Πολλαπλασιασμός**
$a+b=b+a$	$a\,b=b\,a$
$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\,(b\,c)=(a\,b)\,c$
$a\,(b+c)=a\,b+a\,c$	

Στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν και δύο ειδικά στοιχεία σχετικά με τις πράξεις αυτές, το 1 και το 0. Το 1 έχει την ιδιότητα του να αφήνει οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}$ **αμετάβλητο** ως προς τον πολλαπλασιασμό,

$$1\,a = a, \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

και το 0 έχει την ιδιότητα του να αφήνει οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}$ **αμετάβλητο** ως προς την πρόσθεση με αυτό,

$$0 + a = a, \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

Επίσης για κάθε στοιχείο $a \in \mathbb{R}$, υπάρχουν δύο στοιχεία, τα οποία θα τα συμβολίζουμε αντίστοιχα με $-a$ και a^{-1} και τα οποία έχουν την ιδιότητα,

$$\begin{aligned} a + (-a) = (-a) + a &= 0 \\ a\,a^{-1} = a^{-1}\,a &= 1 \end{aligned}$$

Όσοι απο εσάς έχουν κάποια στοιχειώδη εξοικείωση με την άλγεβρα, θα αναγνωρίσουν ότι το $\mathbb{R}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, με αυτές τις ιδιότητες είναι ένα **σώμα** (**field**).

Μπορούμε να βάλουμε ορισμένες ακόμα ιδιότητες στο $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, μπορούμε να βρούμε ένα ειδικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το οποίο ας το συμβολίσουμε με P το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες

1. Αν $a \in\mathbb{R}$, τότε μπορεί να συμβεί μόνο ένα απο τα τρια επόμενα: είτε $a \in P$, είτε $a = 0$ είτε $-a \in P$,
2. Αν $a, b \in P$ τότε και $a + b \in P$,
3. Αν $a, b \in P$ τότε και $a\,b \in P$.

Το σύνολο P, περιέχει τα **θετικά στοιχεία** του $\mathbb{R}$. Αν το a είναι θετικό τότε το $-a$ λέμε ότι είναι **αρνητικό**. Πολλές φορές για το σύνολο P θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{R}^+$.

Στην γλώσσα της άλγεβρας, ένα πεδίο το οποίο έχει ένα τέτοιο υποσύνολο P ονομάζεται **διατεταγμένο σώμα, (ordered field)**. Συνεπώς το $\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα.

Μία άλλη πολύ σημαντική ιδιότητα του $\mathbb{R}$, το οποίο σχετίζεται με την ιδιότητα του το να είναι διατεταγμένο σώμα, είναι ότι σε αυτό μπορούμε να ορίσουμε μία **σχέση διάταξης**, η οποία είναι η γνωστή μας σχέση της ανισότητας $<$.

Ορισμός 1.4.1. *Λέμε ότι $a < b$, για δύο $a, b \in\mathbb{R}$ αν $b - a \in P$. Αυτό θα το συμβολίζουμε με $b - a > 0$.*

Η σχέση της ανισότητας έχει τις εξής ιδιότητες,

1. Για δύο οποιαδήποτε $a, b \in\mathbb{R}$ ισχύει **μόνο ένα** απο τα τρία επόμενα ενδεχόμενα, είτε $a < b$, είτε $a > b$ είτε $a = b$.
2. Αν $a < b$ και $b < c$ τότε και $a < c$.
3. Αν $a < b$ τότε και $a + c < b + c$ για κάθε $c \in\mathbb{R}$.
4. Αν $a < b$ και $c > 0$ τότε $a\,c < b\,c$.

Λόγω των ιδιοτήτων (i) και (ii) λέμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι ένα **ολικά διατεταγμένο σώμα (totally ordered field)** με την σχέση διάταξης $<$.

1.5 'λλα σύνολα.

'λλα σύνολα τα οποία μας ενδιαφέρουν είναι τα ακόλουθα:

- ▷ Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \cdots\}$.
- ▷ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- ▷ Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$.

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ για τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}$,

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ | \ a \leq x \leq b\},$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ | \ a \leq x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ | \ a < x \leq b\},$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ | \ a \leq x < b\}.$$

Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί έχουν τις εξής πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες σε σχέση με τους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόταση 1.5.1 (Ιδιότητες ρητών και αρρήτων)**.**

1. *Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a, b, $(a < b)$, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός r.*

2. *Μεταξύ δύο ρητών υπάρχει πάντοτε ένας άρρητος.*

3. *Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a, b, $(a < b)$, υπάρχει κάποιος άρρητος αριθμός t.*

Λέμε λοιπόν ότι οι ρητοί είναι **πυκνοί** στους πραγματικούς αριθμούς, και ότι οι άρρητοι είναι **πυκνοί** στους πραγματικούς αριθμούς. Η πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς είναι πολύ σημαντική ιδιότητα και μας βοηθάει στο να εκφράσουμε ορισμένες προτάσεις σε πιο βολική μορφή.

Παράδειγμα 1.5.2. *Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b. Θα ισχύει $a < b$ αν και μόνο αν υπάρχει ρητός αριθμός r_n τέτοιος ώστε $a < r_n < b$.*

Παράδειγμα 1.5.3. *Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b. Θα ισχύει $a \leq b$ αν και μόνο αν $a < b + \frac{1}{n}$ για καθε n.*

Παράδειγμα 1.5.4. *Κάνοντας χρήση των ρητών αριθμων μπορούμε να έχουμε ορισμένες πολύ χρήσιμες εκφράσεις. Για παράδειγμα*

$$(a,b] = \bigcap_n \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Προσπαθείστε μόνοι σας να δώσετε και άλλα τέτοια παραδειγματα.

1.6 Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 1.6.1. *Δυο σύνολα A και B ονομάζονται* **ισοδύναμα** *(και συμβολίζουμε $A \sim B$) αν υπάρχει 1-1 απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων τους. Αν $A \sim B$ λέμε ότι τα δυο σύνολα εχουν τον ιδιο πληθάριθμο.*

Παράδειγμα 1.6.2. *Το σύνολο $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο $\{1,2,3,4\}$ και ισοδύναμο με το σύνολο $\{\flat, \natural, \sharp, \triangle\}$. Και τα τρια αυτά σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.*

Παράδειγμα 1.6.3. *Το σύνολο των αρτιων ειναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικων αριθμών. Το σύνολο των περιττών είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικων αριθμών. Το σύνολο των ρητων είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Το σύνολο των ρητών δεν είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών.*

Ορισμός 1.6.4. *Ένα σύνολο A λέμε ότι έχει* **πληθάριθμο** *n αν είναι ισοδύναμο με το $\{1,2,\cdots,n\}$, δηλαδη μπορεί να βρεθεί μία $1-1$ απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου αυτού και του $\{1,2,\cdots,n\}$. Συμβολίζουμε* $\mathrm{card}(A)$.

Παράδειγμα 1.6.5. *Το σύνολο $\{2,4,6,8,10\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{1,2,3,4,5\}$ και έχει πληθάριθμο 5.*

Παράδειγμα 1.6.6. *Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7 = 0\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{1,2\}$ και έχει πληθάριθμο 2.*

Ορισμός 1.6.7. *Ένα σύνολο ονομάζεται* **πεπερασμένο** *αν ο πληθαριθμός του είναι πεπερασμένος αριθμός, ή είναι το κενό σύνολο. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται* **μη πεπερασμένο** *ή* **άπειρο** *σύνολο.*

Παράδειγμα 1.6.8. *Το σύνολο $\{1,2,4,6,8\}$ είναι πεπερασμένο ενώ το σύνολο των ρητών είναι άπειρο.*

Ορισμός 1.6.9. *Ένα σύνολο ονομάζεται* **αριθμήσιμο** *αν μπορεί να βρεθεί μία 1-1 απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου αυτού και του* $\mathbb{N}^+$ *. Ένα σύνολο για το οποία δεν είναι αυτό δυνατό, ονομάζεται* **μη αριθμήσιμο***.*

Ισχύουν τα ακόλουθα:

▷ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

▷ Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

▷ Το σύνολο των αρρήτων αριθμών, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **δεν** είναι αριθμήσιμο.

▷ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$, **δεν** είναι αριθμήσιμο.

▷ Τα σύνολα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$,$[a, b)$, **δεν** είναι αριθμήσιμα.

Παράδειγμα 1.6.10. *Ας δούμε γιατί το σύνολο* $[0, 1]$ *δεν είναι αριθμήσιμο. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι κάθε πραγματικός αριθμός* x *μπορεί να γραφεί σαν μία ακολουθία από φυσικούς αριθμούς (η οποία μπορεί να μην τελειώνει ποτέ),* $x = a_0.a_1a_2\cdots$*, όπου* $0 \leq a_n \leq 9$ *για κάθε* $n \geq 1$*. Για να το κάνουμε αυτό παίρνουμε ως* a_0 *τον μεγαλύτερο φυσικό τέτοιο ωστε* $a_0 \leq x$*, μετά ορίζουμε ως* a_1 *τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό τέτοιο ώστε* $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x$*, και εν γένει ως* a_n *τον μεγαλύτερο φυσικό τέτοιο ωστε*

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots \frac{a_n}{10^n} \leq x$$

και συνεχίζουμε επ΄ άπειρον. Ο κάθε πραγματικός αριθμός x *μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως μια ακολουθια* $a_0.a_1a_2\cdots$*. Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν το άπειρο άθροισμα* $x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$*. Αν ενδιαφερόμαστε για τα στοιχεία του* $[0, 1]$ *τότε* $a_0 = 0$*.*

Ας υποθέσουμε οτι το $[0, 1]$ *είναι αριθμήσιμο και θα δούμε οτι θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Εφόσον το* $I = [0, 1]$ *είναι αριθμήσιμο μπορούμε να βρούμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμων και των στοιχείων του συνόλου* $[0, 1]$*. Έστω λοιπόν* x_1 *το πρώτο στοιχείο του* I*,* x_2 *το δεύτερο,* x_3 *το τρίτο κ.ο.κ. Συνεπώς,* $I = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$*. Κάθε ενα απο αυτά τα στοιχεία έχει μια δεκαδική αναπαράσταση, έστω* $x_m = .a_{m1}a_{m2}a_{m3}\cdots$*, όπου ο δείκτης* m *συμβολίζει το ότι η ακολουθία* $\{a_{mn}\}$*,* $n = 1, 2, \cdots$ *αντιστοιχεί στην δεκαδική αναπαράσταση του πραγματικού αριθμού* x_m*. Εφόσον όλοι οι αριθμοί* $x_m \in [0, 1]$*, το* $a_{m0} = 0$ *και παραλείπεται. Το σύνολο* I *μπορεί λοιπόν να αναπαρασταθει σαν ενας πίνακας με άπειρες γραμμές και άπειρες στήλες που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς* a_{mn}*,*

$$\begin{array}{cc} x_1 & \rightarrow \\ x_2 & \rightarrow \\ x_3 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ x_n & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \end{array} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση μας, οι γραμμές του παραπάνω πίνακα περιέχουν **όλους** *τους πραγματικούς αριθμούς στο διαστημα* $[0, 1]$*. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αριθμο* $y \in [0, 1]$ *με δεκαδική αναπαράσταση* $.b_1b_2b_3\cdots$ *ο οποίος δεν αντιστοιχεί σε καμία γραμμή του παραπάνω πίνακα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Ας πάρουμε την διαγωνιο του πίνακα αυτού* $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$*. Αν* $a_{11} = 1$ *θέτουμε* $b_1 = 2$ *αλλιώς* $b_1 = 1$*. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, στο n-οστό βήμα αν* $a_{nn} = 1$ *θέτουμε* $b_n = 2$ *αλλιώς* $b_n = 1$ *κ.ο.κ. Φτιάχνουμε κατ΄ αυτόν τον τρόπο τον πραγματικό αριθμό* $.b_1b_2\cdots$*. Η ακολουθία* $b_1b_2\cdots$ *δεν συμπίπτει (εκ κατασκευής) με καμία απο τις γραμμες του παραπάνω πίνακα, αρα φτιάξαμε ένα αριθμό στο διάστημα* $[0, 1]$ *που δεν συμπίπτει με την απαρίθμηση* $I = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$*. Συνεπώς οδηγηθήκαμε σε άτοπο, άρα το* $[0, 1]$ *δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. Το επιχείρημα αυτό οφείλεται στον Georg Cantor και είναι το περίφημο διαγώνιο επιχείρημα του το οποίο δημοσιευθηκε το 1891.*

Παράδειγμα 1.6.11. *Έχουμε δει ότι ισχύει*

$$(a, b] = \bigcap_n \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Το σύνολο $(a, b]$ *μπορεί να γραφεί σαν αριθμήσιμη τομή των συνόλων* $A_n = (a, b + \frac{1}{n})$*.*

Αν τα A και B είναι πεπερασμενα σύνολα, τότε $A \subset B$ αν και μόνο αν $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο τότε δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο με κανένα γνήσιο υποσύνολο του. Αυτό **δεν** ισχύει για τα άπειρα σύνολα, αν ένα σύνολο A είναι άπειρο τότε υπάρχει ένα γνήσιο υποσύνολο του $B \subset A$ τέτοιο ωστε $A \sim B$. Μάλιστα, μπορούμε να αποδείξουμε οτι τα άπειρα υποσύνολα αριθμήσιμων συνόλων είναι και αυτά αριθμήσιμα συνολα.

Τι μπορούμε να πούμε για τον πληθάριθμο απείρων συνόλων;

Ορισμός 1.6.12. *Ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικων αριθμών* $\mathbb{N}^+$ *συμβολίζεται με* $\aleph_0$ *(άλεφ μηδέν).*

Όλα τα αριθμήσιμα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο ο οποίος είναι ο $\aleph_0$.

Παράδειγμα 1.6.13. *Επειδή το σύνολο* $\mathbb{Q}$ *είναι αριθμήσιμο, ισχύει οτι* $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$.

Με βάση τα παραπάνω, είναι προφανές οτι $\mathrm{card}(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$. Ποιός είναι ο πληθάριθμος των πραγματικων αριθμων;

Ορισμός 1.6.14. *Ο πληθάριθμος του συνόλου των πραγματικων αριθμών συμβολίζεται με* $\mathfrak{c}$ *και ονομάζεται ο πληθάριθμος του συνεχούς.*

Είδαμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο ειδη απείρων συνόλων. Το $\mathbb{N}^+$ και το $\mathbb{R}$, και τα δυο αυτά σύνολα είναι ποιοτικα διαφορετικά (έχουν διαφορετικό πληθάριθμο). Το 1878 ο Georg Cantor διατύπωσε την περίφημη υπόθεση του συνεχούς, σύμφωνα με την οποία κάθε άπειρο σύνολο πραγματικών αριθμών, είτε είναι αριθμήσιμο (δηλαδή έχει πληθάριθμο $\aleph_0$) είτε έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το σύνολο $\mathbb{R}$ (δηλαδή $\mathfrak{c}$). Η υπόθεση αυτή απασχόλησε τους μαθηματικούς (και τον ίδιο τον Cantor) για πολλά χρόνια. Μάλιστα ο David Hilbert το 1900 διατύπωσε την απόδειξη ή την κατάριψη της υπόθεσης του συνεχούς σαν το πρώτο απο τα 23 προβλήματα τα οποία θα απασχολούσαν την μαθηματικη επιστήμη κατά τον 20ο αιώνα. Το 1937 ο Kurt Gödel έδειξε οτι η υπόθεση του συνεχούς είναι συμβατη με τα αξιώματα της θεωριας συνόλων του Zermelo ενώ το 1963 ο Paul Cohen έδειξε ότι η άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς είναι επίσης συμβατή με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Αυτό μας δείχνει οτι η υπόθεση του συνεχούς ανήκει στην 'γκρίζα' ζώνη των μαθηματικών, είναι μια πρόταση για την οποία δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βάση το αξιωματικό μας πλαίσιο σχετικά με το αν είναι ψευδής ή αληθής.

1.7 Η απόλυτη τιμή.

Ορισμός 1.7.1. *Η* ***απόλυτη τιμή*** *ενός πραγματικού αριθμού* x *συμβολίζεται με* $\mid x \mid$ *και ορίζεται ως*

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι ιδιαίτερα χρήσιμες,

$$\begin{aligned} &\mid x \mid \leq c \Longleftrightarrow -c \leq x \leq c \\ &\mid x\, y \mid = \mid x \mid \mid y \mid \\ &\mid x \mid - \mid y \mid \leq \mid x - y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid \end{aligned}$$

Αν αναπαραστήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 με σημεία της πραγματικής ευθείας, τότε η απόλυτη τιμή της διαφοράς $\mid x_1 - x_2 \mid$ παίζει τον ρόλο της **απόστασης** μεταξύ των σημείων αυτών.

Ορισμός 1.7.2. *Έστω* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Το θετικό μέρος του* x *ορίζεται ως* $x^+ := \max(x, 0)$.

2. *Το αρνητικό μέρος του* x *ορίζεται ως* $x^- := \max(-x, 0)$.

Για οποιοδήποτε x ισχύει $x = x^+ - x^-$ και $|x| = x^+ + x^-$. Τόσο το x^+ όσο και το x^- είναι θετικοί αριθμοί.

1.8 sup και inf

Οι έννοιες του ελάχιστου άνω φράγματος (sup) και του μέγιστου κάτω φράγματος (inf) είναι θεμελιώδεις στην ανάλυση.

Θα εισάγουμε πρώτα τις έννοιες του άνω και του κάτω φράγματος για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.8.1 (’νω και κάτω φράγμα συνόλου)**.** *Έστω* $X \subset \mathbb{R}$*.*

1. *Το* X *είναι* **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει κάποιο* $C \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $x \leq C$ *για κάθε* $x \in X$*. Ο πραγματικός αριθμός* C *ονομάζεται ένα* **άνω φράγμα** *του συνόλου* X*.*

2. *Το* X *είναι* **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει κάποιο* $c \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $c \leq x$ *για κάθε* $x \in X$*. Ο πραγματικός αριθμός* c *ονομάζεται ένα* **κάτω φράγμα** *του συνόλου* X*.*

Προφανώς τα άνω και κάτω φράγματα για κάποιο σύνολο **δεν** είναι μοναδικά.

Παράδειγμα 1.8.2. *Έστω* $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *, με* $a < b$*. Οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός* $C \geq b$ *είναι ένα άνω φράγμα του* X *ενώ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός* $c \leq a$ *είναι ένα κάτω φράγμα του* X*.*

Θα ορίσουμε τώρα τις έννοιες του ελάχιστου άνω φράγματος και του μέγιστου κάτω φράγματος.

Ορισμός 1.8.3 (sup και inf)**.** *Έστω* X *ένα υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *το οποίο ειναι μη κενό.*

1. *Ο πραγματικός αριθμός* M *είναι ένα* **ελάχιστο άνω φράγμα** *(supremun) για το* X*, αν το* M *είναι άνω φράγμα για το* X *και για κάθε άλλο ανω φράγμα* M' *του* X *ισχύει* $M \leq M'$*. Συμβολίζουμε* $M = \sup(X)$*. Αν* $X = \emptyset$*,* $\sup(X) := -\infty$ *και αν* X *δεν είναι φραγμένο απο τα ανω* $\sup(X) = +\infty$*.*

2. *Ο πραγματικός αριθμός* m *είναι ένα* **μέγιστο κάτω φράγμα** *(infimum) για το* X*, αν το* m *είναι κάτω φράγμα για το* X *και για κάθε άλλο κάτω φράγμα* m' *του* X *ισχύει ότι* $m' \leq m$*. Συμβολίζουμε* $m = \inf(X)$*. Αν* $X = \emptyset$*,* $\inf(X) := +\infty$ *και αν* X *δεν είναι φραγμένο απο τα κάτω* $\inf(X) = -\infty$*.*

Από τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να δούμε ότι

1. $M = \sup(X)$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ (το x εξαρτάται απο την επιλογή του ϵ) τέτοιο ώστε $M - \epsilon < x \leq M$. Αυτό μας λέει οτι αν ελαττώσουμε το $\sup(X)$ κατα ϵ (για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, το $\sup(X) - \epsilon$ **δεν** είναι ανω φράγμα του συνόλου X.

2. $m = \inf(X)$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ τέτοιο ώστε $m \leq x < m + \epsilon$. Αυτό μας λέει οτι αν αυξήσουμε το $\inf(X)$ κατα ϵ (για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, το $\inf(X) + \epsilon$ **δεν** είναι κάτω φράγμα του συνόλου X.

Ισχύει πάντοτε οτι $\inf(X) \leq \sup(X)$. Σε αντίθεση με τα άνω και κάτω φράγματα που δεν είναι μοναδικα, το sup και το inf είναι.

Πρόταση 1.8.4. *Το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα για ένα σύνολο* X *είναι* **μοναδικά***.*

Απόδειξη: Έστω $m_1 = \inf(X)$, $m_2 = \inf(X)$ δύο μέγιστα κάτω φράγματα του X. Θα δείξουμε ότι $m_1 = m_2$.

Απο τον ορισμό, εφοσον m_1 είναι μέγιστο κάτω φράγμα του X θα έχουμε ότι το m_1 είναι κάτω φράγμα για το σύνολο X και οποιοδήποτε άλλο κάτω φράγμα του X θα είναι μικρότερο απο αυτό. Συνεπώς, επειδή το m_2 είναι κάτω φράγμα για το X (επειδή έχουμε δεχθεί ότι είναι μέγιστο κάτω φράγμα) θα πρέπει να ισχύει ότι

$$m_2 \leq m_1.$$

Επίσης απο τον ορισμό, εφόσον το m_2 είναι μέγιστο κάτω φράγμα του X θα έχουμε ότι το m_2 είναι κάτω φράγμα για το σύνολο X και οποιοδήποτε άλλο κάτω φράγμα του X θα είναι μικρότερο απο αυτό. Συνεπώς, επειδή το m_1 είναι κάτω φράγμα για το X (επειδή έχουμε δεχθεί ότι είναι μέγιστο κάτω φράγμα) θα πρέπει να ισχύει ότι

$$m_1 \leq m_2.$$

Οι δύο αυτές ανισότητες μας δείχνουν ότι $m_1 = m_2$, άρα το μέγιστο κάτω φράγμα είναι μοναδικό. Η απόδειξη για το ελάχιστο άνω φράγμα αφήνεται σαν άσκηση. ■

Παράδειγμα 1.8.5. *Ας υποθέσουμε ότι* $X = [a, b]$ *για* $a, b \in \mathbb{R}$ *,* $a \leq b$*. Τότε* $\sup X = b$ *και* $\inf X = a$*.*

Το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου X, δεν είναι απαραίτητο να ανήκουν στο σύνολο X.

Παράδειγμα 1.8.6. *Ας υποθέσουμε ότι* $X = (a, b)$ *για* $a, b \in \mathbb{R}$ *,* $a \leq b$*. Τότε* $\sup X = b$ *και* $\inf X = a$*, τα οποία δεν ανήκουν στο* X*.*

Συμβολισμός 1.8.7.

1. *Αν το* $A = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ *ειναι ενα αριθμήσιμο σύνολο, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $\sup(A) = \sup_n x_n$ *και* $\inf(A) = \inf_n x_n$.

2. *Αν* $A \subset \mathbb{R}$ *και* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό*

$$\sup_A f = \sup(f(A)) = \sup(\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}) = \sup(\{f(x) \mid x \in A\}),$$
$$\inf_A f = \inf(f(A)) = \inf(\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\} = \inf(\{f(x) \mid x \in A\})),$$

για το sup *και το* inf *του πεδίου τιμών της συνάρτησης* f.

Παράδειγμα 1.8.8. *Έστω* $X = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$. *Τότε* $\sup(X) = 1$ *και* $\inf(X) = 0$. *Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε* $\sup \frac{1}{n} = 1$ *και* $\inf \frac{1}{n} = 0$.

Παράδειγμα 1.8.9. *Έστω* $A = (0, 1]$ *και* $f : A \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = e^{-x}$. *Έχουμε ότι*

$$\inf_A f = \inf(\{e^{-x} \in \mathbb{R} \mid x \in (0, 1]\}) = e^{-1},$$
$$\sup_A f = \sup(\{e^{-x} \in \mathbb{R} \mid x \in (0, 1]\}) = 1.$$

Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε την διαφορά του μεγίστου στοιχείου ενός συνόλου και του ελαχίστου άνω φράγματος, καθώς και την διαφορά του ελαχίστου στοιχείου ενός συνόλου και του μεγίστου κάτω φράγματος.

Ορισμός 1.8.10. *Έστω* X *ένα υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.

1. *Ο πραγματικός αριθμός* M *ονομάζεται το μέγιστο στοιχείο του* X *αν και μόνο αν* $M \in X$ *και* $M = \sup X$.

2. *Ο πραγματικός αριθμος* m *ονομάζεται το ελάχιστο στοιχείο του* X *αν και μόνο αν* $m \in X$ *και* $m = \inf X$.

Ο ορισμός αυτός τονίζει ότι το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου δεν είναι απαραίτητα στοιχεία του συνόλου αυτού! Φυσικά αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο τότε το sup ταυτίζεται με το μέγιστο στοιχείο του και το inf ταυτίζεται με το ελάχιστο στοιχείο του.

Η ακόλουθη ιδιότητα του $\mathbb{R}$ είναι πολύ σημαντική για την πραγματική ανάλυση.

Αξίωμα 1.8.11 (Ύπαρξη του ελάχιστου άνω φράγματος). *Ένα άνω φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Η ιδιότητα αυτή των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι θεμελιώδους σημασίας για την πραγματική ανάλυση και επάνω της βασίζονται όλα τα βασικά θεωρήματα της.

Σχόλιο 1.8.12. *Η ιδιότητα αυτή που ισχύει για τα υποσύνολα του* $\mathbb{R}$ *και είναι γνωστή ως η ιδιότητα πληρότητας του Dedekind δεν είναι αυτονόητη για κάθε σύνολο. Για παράδειγμα το σύνολο των ρητών αριθμών* $\mathbb{Q}$ **δεν** *έχει αυτή την ιδιότητα! Πολλές φορές λοιπόν, όταν εργαζομαστε σε γενικότερα σύνολα, χρειάζεται να θέσουμε την παραπάνω πρόταση σαν αξίωμα, το οποίο σχετίζεται με το αξίωμα της επιλογής. Το αξίωμα αυτό λέει με απλά λόγια ότι αν έχουμε μια άπειρη συλλογή απο σύνολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο το οποίο θα περιέχει ένα στοιχείο απο κάθε σύνολο της συλλογής αυτής.*

Απο τον ορισμό του sup και του inf μπορούμε να συνάγουμε ορισμένες βασικές τους ιδιότητες.

Πρόταση 1.8.13. *Έστω* $A, B \subset \mathbb{R}$.

1. *Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

2. *Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση (συνάρτηση) $A \mapsto \sup(A)$ σαν μια απεικόνιση απο το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στους πραγματικούς αριθμούς αυτή η απεικόνιση είναι μονότονη (αύξουσα). Με την ίδια λογική, η απεικόνιση $A \mapsto \inf(A)$ είναι φθίνουσα.

Σχόλιο 1.8.14. *Ακόμα και αν* $A \subset B$ *(με αυστηρό εγκλεισμό) εν γένει* $\sup(A) \leq \sup(B)$ *και* $\inf(A) \geq \inf(B)$. *Αυτό συμβαίνει γιατι τα* sup *και* inf *των συνόλων* A *και* B **δεν** *είναι απαραίτητα και στοιχεία των αντίστοιχων συνόλων.*

Παράδειγμα 1.8.15. *Ας θεωρήσουμε το αριθμήσιμο σύνολο* $A = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ *και τα υποσύνολα του* $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. *Αν ορίσουμε ως* $M_n = \sup(A_n)$ *και* $m_n = \inf(A_n)$ *μπορούμε να δούμε ότι* $M_n \geq M_{n+1}$ *και* $m_n \leq m_{n+1}$ *για κάθε* n. *Αυτό προκύπτει άμεσα εφόσον* $A_{n+1} \subset A_n$ *για κάθε* n.

Ορισμός 1.8.16. *Έστω* $A, B \subset \mathbb{R}$ *και* $c \in \mathbb{R}$. *Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\begin{aligned}
c\,A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = c\,y,\ \ y \in A\},\\
A + B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = y + z \text{ για κάποια } y \in A,\ z \in B\},\\
A - B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = y - z \text{ για κάποια } y \in A,\ z \in B\}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.8.17. *Έστω* $A = (0, 1]$, $B = (2, 4)$. *Μπορούμε να δούμε οτι* $2A = (0, 2]$, $-A = [-1, 0)$, $A + B = (2, 5)$ *και* $A - B = (-4, , -1)$.

Πρόταση 1.8.18. *Αν* $A \subset \mathbb{R}$ *και* $c \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
\sup(c\,A) = c\,\sup(A),\ \ \inf(c\,A) = c\,\inf(A), \quad c \geq 0,\\
\sup(c\,A) = c\,\inf(A),\ \ \inf(c\,A) = c\,\sup(A), \quad c < 0.
\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $c = -1$ παίρνουμε την χρήσιμη ιδιότητα

$$\sup(-A) = -\inf(A),\ \ \inf(-A) = -\sup(A).$$

Παράδειγμα 1.8.19. *Ας θεωρήσουμε το σύνολο* $A = \{\frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ *και το σύνολο* $-A = \{-\frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. *Μπορούμε να δούμε ότι* $\sup(-A) = -\inf(A) = 0$ *και* $\inf(-A) = -\sup(A) = -2$.

Πρόταση 1.8.20. *Αν* $A, B \subset \mathbb{R}$, *μη κενά με την ιδιότητα* $x \leq y$ *για κάθε* $x \in A$ *και κάθε* $y \in B$, *τότε* $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Απο αυτό είναι προφανές και ότι $\inf(A) \leq \sup(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B)$.

Παράδειγμα 1.8.21. *Έστω* $A = (0, 2)$ *και* $B = [2, 6)$. *Ισχύει ότι* $2 = \sup(A) \leq \inf(B)$. *Φυσικά ισχύει και ότι* $\inf(A) \leq \inf(B)$ *και* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Πρόταση 1.8.22. *Αν* $A, B \subset \mathbb{R}$, *μη κενά, τότε*

$$\begin{aligned}
\sup(A + B) &= \sup(A) + \sup(B),\\
\inf(A + B) &= \inf(A) + \inf(B),\\
\sup(A - B) &= \sup(A) - \inf(B),\\
\inf(A - B) &= \inf(A) - \sup(B).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.8.23. *Έστω δυο συναρτήσεις* $f, g : I \to \mathbb{R}$. *Με βάσει την Πρόταση 1.8.22 (και τον Συμβολισμό 1.8.7) ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
\sup_I(f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g,\\
\inf_I(f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g.
\end{aligned}$$

Για να το δούμε αυτό ξεκινάμε με την παρατήρηση οτι εν γένει

$$\{f(x) + g(x) \mid x \in I\} \subseteq \{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}, \tag{1.1}$$

εφόσον το σύνολο $\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}$ *αποτελείται απο τις τιμές που παίρνει το άθροισμα* $f(x) + g(x)$ *για το ίδιο* $x \in I$ *ενω εν γένει το* $\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}$ *αποτελείται απο τους πραγματικούς αριθμούς* $f(x) + g(y)$, $x \in I$, $y \in I$ *αλλά δεν ισχύει απαραίτητα οτι* $x = y$ [1]. *Σύμφωνα με τον Συμβολισμό 1.8.7,*

$$\begin{aligned}
\sup_I f &= \sup(\{f(x) \mid x \in I\},\\
\sup_I g &= \sup(\{g(x) \mid x \in I\},\\
\sup_I(f + g) &= \sup(\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

[1] Το παράδειγμα $I = (0, 1)$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$, όπου $\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\} = (1 + e^{-1}, 1 + e)$ και $\{f(x) + g(x) \mid x \in I\} = (2, e^{-1} + e)$ μπορεί να σας βοηθήσει στο να κατανοήσετε την παραπάνω σχέση.

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.8.22,

$$\sup(\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}) = \sup(\{f(x) \mid x \in I\} + \sup(\{g(x) \mid x \in I\} = \sup_I f + \sup_I g.$$

Απο την σχέση (1.1) *και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.8.13 καταλήγουμε στο οτι*

$$\sup(\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}) \leq \sup(\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}),$$

απο την οποία χρησιμοποιώντας την (1.2) *προκύπτει η ανισότητα για τα* sup. *Η ανισότητα για τα* inf *αφήνεται σαν άσκηση.*

1.9 Η αρχή της επαγωγής

Η επαγωγή είναι μία πολύ χρήσιμη αποδεικτική διαδικασία, η οποία μας επιτρέπει να ελέγχουμε την ορθότητα ορισμένων προτάσεων. Χρησιμοποιείται αρκετά σαν εργαλείο στην μαθηματική ανάλυση, οπότε την υπενθυμίζουμε εδώ. Θα παρουσιάσουμε μόνο μία ειδική μορφή της αρχής της επαγωγής, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά συχνά.

Θεώρημα 1.9.1 (Αρχή της επαγωγής)**.** *Έστω μία συλλογή πρότασεων $\{S(n)\}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Αν*

1. *Η πρόταση $S(1)$ είναι αληθής.*
2. *Ισχύει ότι αν για κάποιο n η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής τότε και η πρόταση $S(n+1)$ είναι επίσης αληθής,*

τότε η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.

Παράδειγμα 1.9.2. *Κάνοντας χρήση της αρχής της επαγωγής δείξτε ότι $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.*

Ας θεωρήσουμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Η πρόταση $S(n)$ είναι η πρόταση

$$S(n) = \textit{Ισχύει ότι } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας την επαγωγή.

Εύκολα βλέπουμε ότι η $S(1)$ είναι αληθής. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο n η $S(n)$ είναι αληθής. Τότε θα ισχύει

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Ας ελέγξουμε το κατά πόσον η $S(n+1)$ είναι αληθής δηλαδή το κατά πόσο ισχύει ότι

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}.$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \\ &\frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

’ρα, η $S(n+1)$ είναι επίσης αληθής και απο την αρχή της επαγωγής, η $S(n)$ είναι αληθής για κάθε n.

1.10 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Οι βασικές πράξεις των συνόλων, τόσο για πεπερασμένο όσο και για άπειρο αριθμό συνόλων.
- Τα άνω και κάτω όρια ακολουθίων συνόλων και η ερμηνεία τους. Οι έννοιες αυτές θα χρησιμοποιηθούν πολύ στην θεωρία πιθανοτήτων και ειδικά στα οριακά θεωρήματα τα οποία αποτελούν και την βάση της στατιστικής.
- Η έννοια της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς.

⚃ Η έννοια της απόλυτης τιμής και η ερμηνεία της ως απόστασης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

⚄ Οι έννοιες του inf και sup υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και οι πιθανές διαφορές τους απο τις έννοιες του μεγίστου και του ελαχίστου.

⚅ Η κατανόηση και η χρήση της αρχής της επαγωγής.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

2.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε ορισμένες βασικές έννοιες απο την θεωρία των ακολουθιών πραγματικών αριθμών οι οποίες αποτελούν μία βασική εισαγωγή στις πιο προχωρημένες έννοιες της πραγματικής ανάλυσης (βλ. π.χ. Johnsonbaugh and Pfaffenberger (1981)). Επίσης, οι έννοιες αυτές έχουν αρκετό ενδιαφέρον και απο μόνες τους εφόσον βρισκουν σημαντικές εφαρμογές στις πιθανότητες και στην στατιστική, όπως θα δούμε με λεπτομέρεια σε μία σειρά παραδειγμάτων που θα ακολουθήσουν.

2.2 Ο ορισμός της ακολουθίας και της υποακολουθίας

Ορισμός 2.2.1. *Μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$ είναι μία απεικονιση απο το $\mathbb{N}^+$ στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ παίρνουμε ένα πραγματικό αριθμό $a_n \in \mathbb{R}$. Ο κάθε όρος της ακολουθίας συμβολίζεται με a_n και ολόκληρη η ακολουθία συμβολίζεται με $\{a_n\}$, όπου αυτό θα εικαι μια συντομογραφια για το $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Υπάρχουν διάφοροι εναλλακτικοί (και βέβαια ισοδύναμοι) τρόποι για να δει κανείς μια ακολουθία. Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε μια ακολουθία σαν ένα σύνολο $\{a_1, a_2, \cdots\}$ το οποίο είναι ενα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε μια ακολουθία σαν το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

Παράδειγμα 2.2.2. *Παραδείγματα ακολουθιών είναι*

1. *η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \frac{1}{n}$,*
2. *η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = 2^n$,*
3. *η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$, κ.α*

Παράδειγμα 2.2.3. *Ένας επενδυτής έχει τοποθετήσει το αρχικό του κεφάλαιο $a_0 = 1$ σε μία επένδυση που σε κάθε χρονική περίοδο του αποφέρει συνολική απόδοση $(1 + r)$. Αν ονομάσουμε a_n το κεφάλαιο του την n-οστή χρονική περίοδο τότε το a_n θα δίνεται απο τον τύπο*

$$a_n = (1 + r)^n$$

Αν υποθέσουμε ότι ο χρονικός ορίζοντας του επενδυτή είναι άπειρος τότε το κεφάλαιο του θα δίνεται απο την ακολουθία $\{a_n\}$.

Παράδειγμα 2.2.4. *Ένας πληθυσμός λόγω γήρανσης μειώνεται κάθε χρονική περίοδο κατά ποσοστό ίσο με $\mu\%$. Αν ο αρχικός πληθυσμός είναι $a_0 = 1000$, τότε ο πληθυσμός την $n-$οστή χρονική περίοδο θα είναι ίσος προς*

$$a_n = 1000 \left(1 - \frac{\mu}{100}\right)^n$$

Αν υποθέσουμε ότι ο χρονικός ορίζοντας εξέλιξης του πληθυσμού είναι άπειρος τότε ο πληθυσμός θα περιγράφεται απο την ακολουθία $\{a_n\}$.

Πολλές φορές, αντί να δίνεται εκπεφρασμένα η μορφή του a_n, οι όροι της ακολουθίας μπορεί να οριστούν με την βοήθεια αναδρομικών τύπων. Ορισμένες φορές οι αναδρομικοί τύποι μπορεί να επιλυθούν και να δώσουν την γενική μορφή για τον $n-$οστό όρο a_n, ενώ άλλες φορές αυτό δεν είναι πολυ εύκολο ή ακόμα μπορεί να είναι και αδύνατο. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να παράγουμε τους όρους της ακολουθίας με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Παράδειγμα 2.2.5. *Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\{a_n\}$ της οποίας ο γενικός όρος a_n δίνεται απο τον αναδρομικό τύπο*

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_{n+1} = (1+r)\,a_n, \;\; n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Με την βοήθεια της επαγωγής, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$a_n = (1+r)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

δηλαδή η ακολουθία που παράγεται απο τον αναδρομικό αυτό τύπο είναι η ίδια με την ακολουθία που ορίσαμε στο Παράδειγμα 2.2.3.

Παράδειγμα 2.2.6. *Ας θεωρήσουμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ οι όροι της οποίας ικανοποιούν την αναδρομική σχέση*

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \; n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ορισμένους απο τους όρους της ακολουθίας αυτής. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \;\; a_2 = \frac{3}{2} = 1.5, \;\; a_3 = \frac{17}{12} = 1.4167, \;\; a_4 = \frac{577}{408} = 1.4142156, \\ &a_5 = \frac{1393}{985} = 1.4142131, \;\; \cdots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το n τόσο οι αριθμοί που παράγει ο αναδρομικός αυτός τύπος προσεγγίζουν τον αριθμό $\sqrt{2}$. Η ακολουθία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια αριθμητική μέθοδος προσέγγισης της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού 2.

Ορισμένες φορές μας είναι επαρκές, ή ακόμη και απαραίτητο, να επιλέξουμε ορισμένους μόνο όρους απο μία ακολουθία, προσέχοντας ομως να μην χαλάσουμε την (σχετική) διάταξη των ορων της αρχικης ακολουθίας. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Οι νέες ακολουθίες που μπορούμε να παράγουμε επιλέγοντας με κάποιο τρόπο ορισμένους απο τους όρους μίας ακολουθίας ονομάζονται **υποακολουθίες**.

Ορισμός 2.2.7. *Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία στον $\mathbb{R}$ και $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Η σύνθεση της ακολουθίας $\{a_n\}$ με την f, παράγει την νέα ακολουθία $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, η οποία ονομάζεται* **υποακολουθία** *της $\{a_n\}$. Πολλές φορές, συμβολίζουμε την $f(k)$ με μία νέα ακολουθία, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, με την ιδιότητα $n_{k_1} > n_{k_2}$ για $k_1 > k_2$, και την υποακολουθία με $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.*

Σχόλιο 2.2.8. *Αν $\{a_1, a_2, \cdots\}$ μια ακολουθία, μια καινούργια ακολουθία στην οποία κάποιος όρος της αρχικής ακολουθίας θα επαναλαμβάνεται επ΄ άπειρον* **δεν** *μπορεί να θεωρηθεί υποακολουθία της αρχικής ακολουθίας! Αυτό γιατί ο τρόπος επιλογής μας δεν μπορεί να εκφραστεί με μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση επιλογής. Έτσι η $\{a_2, a_4, \cdots a_{2n} \cdots\}$ μπορεί να θεωρηθεί υποακολουθία αλλα η $\{a_1, a_2, a_3, a_3, a_3, \cdots\}$* **δεν** *μπορεί.*

Παράδειγμα 2.2.9. *Ας πάρουμε την ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \frac{1}{n}$.*

- ▷ *Αν επιλέξουμε $f(k) = k^2$ τότε παίρνουμε την υποακολουθία $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ με όρους $a_{f(k)} = \frac{1}{k^2}$. Εναλλακτικός συμβολισμός είναι να πάρουμε την ακολουθία $n_k = k^2$ και να επιλέξουμε απο την ακολουθία a_n τους όρους $a_{n_k} = 1/k^2$.*

- ▷ *Αν επιλέξουμε $f(k) = k!$ τότε παίρνουμε την υποακολουθία $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ με όρους $a_{f(k)} = \frac{1}{k!}$. Εναλλακτικός συμβολισμός είναι να πάρουμε την ακολουθία $n_k = k!$ και να επιλέξουμε απο την ακολουθία a_n τους όρους $a_{n_k} = \frac{1}{k!}$.*

Απο μία ακολουθία μπορούμε να πάρουμε άπειρες υποακολουθίες με διαφορετική επιλογή της συνάρτησης $f(k)$ ή ισοδύναμα της ακολουθίας $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ η οποία καθορίζει τους νέους δείκτες.

Παράδειγμα 2.2.10. *Ας πάρουμε την ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$.*

- ▷ *Αν επιλέξουμε $f(k) = 2k$ τότε παίρνουμε την υποακολουθία $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ με όρους $a_{f(k)} = (-1)^{2k} = 1$. Εναλλακτικός συμβολισμός είναι να πάρουμε την ακολουθία $n_k = 2k$ και να επιλέξουμε απο την ακολουθία a_n τους όρους $a_{n_k} = 1$.*
- ▷ *Αν επιλέξουμε $f(k) = 2k-1$ τότε παίρνουμε την υποακολουθία $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ με όρους $a_{f(k)} = (-1)^{2k-1} = -1$. Εναλλακτικός συμβολισμός είναι να πάρουμε την ακολουθία $n_k = 2k-1$ και να επιλέξουμε απο την ακολουθία a_n τους όρους $a_{n_k} = -1$.*

Ένας εναλλακτικός (και ισοδύναμος τρόπος) για να καταλάβουμε μία υπακολουθία είναι ο ακόλουθος: Εφόσον μια ακολουθία μπορούμε να την θεωρήσουμε σαν ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $A = \{a_1, a_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$, μια υποακολουθία μπορούμε να την θεωρήσουμε σαν ένα υποσύνολο $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots\} \subset A$. Τόσο, η αρχική ακολουθία όσο και η υποακολουθια που έχουμε επιλέξει έχει άπειρους όρους. Αυτό δεν πρέπει να μας παραξενεύει, εφόσον μια ακολουθία είναι ένα άπειρο σύνολο, μπορεί να έχει γνήσια υποσύνολα τα οποία είναι άπειρα σύνολα.

Με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε υποκολουθίες απο μία αρχική ακολουθία, μπορούμε να ορίσουμε και υποακολουθίες απο μια υποακολουθία κ.ο.κ. Έτσι αν $\{a_n\}$ ειναι η αρχική μας ακολουθία μπορούμε απο αυτή να πάρουμε μια υπακολουθια $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, και μετά απο αυτή πάλι μια άλλη υποακολουθία $\{a_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ και να συνεχίσουμε αυτή την διαδικασία επ' άπειρον. Κάθε υποακολουθία που θα παίρνουμε θα έχει άπειρους όρους.

Συμβολισμός 2.2.11. *Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{a_{n_k}\}$ για μια υποακολουθία της ακολουθίας $\{a_n\}$.*

2.3 Όρια ακολουθιών

Ένα εύλογο ερώτημα είναι το πως συμπεριφέρονται οι όροι μίας ακολουθίας για μεγάλο n. Το ερώτημα αυτό έχει τόσο θεωρητική όσο και πρακτική σημασία. Π.χ. στα πλαίσια των Παραδειγμάτων 2.2.3 και 2.2.4 η ερώτηση αυτή σχετίζεται με την μακροχρόνια συμπεριφορά του κεφαλαίου του επενδυτή ή του πληθυσμού αντίστοιχα. Απαντήσεις σε τέτοιου τύπου ερωτήσεις σχετικά με την συμπεριφορά μιας ακολουθίας για μεγάλα n, σχετίζονται με την μαθηματική έννοια του **ορίου**.

Ορισμός 2.3.1. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ έχει* **όριο** *L, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριμός N τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, $n > N$ να ισχύει $\mid a_n - L \mid < \epsilon$. Θα χρησιμοποιούμε ή τον συμβολισμό $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ή απλά $a_n \to L$.*

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι μία ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο L αν όλοι οι όροι της a_n για $n > N$ βρίσκονται στο διάστημα $(L-\epsilon, L+\epsilon)$, όπου το ϵ εξαρτάται από το N και εν γένει μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό αν επιλέξουμε αρκετά μεγάλο N.

Παράδειγμα 2.3.2. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \frac{1}{n}$ έχει όριο $L = 0$.Πράγματι, $\mid a_n - L \mid = \frac{1}{n} < \epsilon$, αρκεί $n > N := [\frac{1}{\epsilon}]$ όπου με $[\ ]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος.*

Δεν είναι απαραίτητο κάθε ακολουθία να έχει όριο.

Παράδειγμα 2.3.3. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$* **δεν έχει όριο**, *δηλαδή δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός L για τον οποίο να ισχύει ο Ορισμός 2.3.1. Πράγματι, έστω ότι υπήρχε τέτοιο L. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, θα υπήρχε $N \in \mathbb{N}^+$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$L - \epsilon < (-1)^n < L + \epsilon$$

για $n > N$. Τα n αυτά μπορεί να είναι άρτια ή περιττά, και η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει τόσο για τα άρτια όσο και για τα περιττά n, και παρατηρούμε οτι αυτό μας δίνει οτι

$$L - \epsilon < 1 < L + \epsilon \ \text{ για άρτιο } n \tag{2.1}$$

$$L - \epsilon < -1 < L + \epsilon, \ \text{ για περιττό } n. \tag{2.2}$$

Το L θα πρέπει λοιπόν να είναι τέτοιο ωστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει ταυτόχρονα και η (2.1) και η (2.2), το οποίο είναι άτοπο.

Στο παραπάνω παράδειγμα είδαμε μία ακολουθία η οποία δεν έχει όριο, και για να το δείξουμε αυτό χρησιμοποιήσαμε απευθείας τον ορισμό του ορίου. Θα δούμε πολύ σύντομα και άλλα κριτήρια, αρκετά πιο εύκολα στην χρήση, για να συμπεραίνουμε ότι μία ακολουθία δεν έχει όριο.

Το όριο σαν έννοια παρουσιάζει ορισμένες πολύ χρήσιμες ιδιότητες.

Πρόταση 2.3.4. *Το όριο μίας ακολουθίας, αν υπάρχει, είναι* **μοναδικό**.

Απόδειξη: Έστω ότι ο ισχυρισμός μας είναι ψευδής. Τότε, μπορούμε να βρούμε μία ακολουθία $\{a_n\}$ και δύο πραγματικούς αριθμούς L_1 και L_2 τέτοιους ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$.

Εφοσον $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$, από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι για κάθε $\epsilon_1 > 0$ υπάρχει κάποιο $N_1 \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N_1$ να ισχύει

$$| a_n - L_1 | < \epsilon_1, \quad n > N_1$$

Επίσης, εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon_2 > 0$ υπάρχει κάποιο $N_2 \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N_2$ να ισχύει

$$| a_n - L_2 | < \epsilon_2, \quad n > N_2$$

Αν επιλέξουμε $n > max(N_1, N_2)$ τότε οι ανισοτητες αυτές θα ισχύουν ταυτόχρονα. Αφού, όμως ισχύουν για οποιαδήποτε $\epsilon_1 > 0$ και $\epsilon_2 > 0$, δεν μένει παρά να ισχύει $L_1 = L_2$.

Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, ας υποθέσουμε ότι $L_1 \neq L_2$ και χωρίς βλάβη της γενικοτητας ότι $L_2 > L_1$. Ας επιλέξουμε

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{L_2 - L_1}{2}$$

Στην περίπτωση αυτή η πρώτη ανισότητα δίνει $a_n < \frac{L_1+L_2}{2}$ για $n > \max(N_1, N_2)$ ενώ η δεύτερη ανισότητα δίνει $a_n > \frac{L_1+L_2}{2}$. Προφανώς, αυτό είναι αδύνατο άρα $L_1 = L_2$. ■

Αν λοιπόν μία ακολουθία έχει κάποιο όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό, και συνεπώς, οποιαδήποτε υποακολουθία και αν επιλεγεί απο την ακολουθία αυτή θα πρέπει να έχει την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω μία ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Τότε,* **κάθε** *υποακολουθία της, $\{a_{n_k}\}$ θα πρέπει να έχει όριο L, δηλαδη*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L.$$

Απόδειξη: Ας πάρουμε οποιαδήποτε υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ όπου η ακολουθία $\{n_k\}$ είναι γνησίως αύξουσα. Εφοσον η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κάποιο N τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει $| a_n - L | < \epsilon$. Επειδή η $\{n_k\}$ είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει K τέτοιο ωστε $n_K > N$, και για καθε $k > K$ θα ισχύει ότι $n_k > n_K > N$. Άρα, για κάθε $k > K$ ισχύει ότι $|a_{n_k} - L| < \epsilon$. Δείξαμε λοιπόν οτι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε K τέτοιο ώστε $|a_{n_k} - L| < \epsilon$ για $k > K$ συνεπώς $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. ■

Με βαση την Πρόταση 2.3.5 είναι πλέον πολύ εύκολο να δείξουμε ότι μια ακολουθία **δεν** έχει όριο. Αρκεί να βρούμε τουλάχιστον 2 υποακολουθίες της οι οποίες δεν έχουν το ίδιο όριο [1].

Παράδειγμα 2.3.6. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με γενικό όρο $a_n = \cos(n\pi)$ δεν συγκλίνει. Αυτό γιατί έχει τουλάχιστον δύο υποακολουθίες, την $\{a_{2k}\}$ και $\{a_{2k+1}\}$ οι οποίες εχουν διαφορετικά όρια.*

Έχει ενδιαφέρον να δούμε την ακόλουθη πρόταση που σχετίζεται με την άλγεβρα των ορίων ακολουθιών.

Πρόταση 2.3.7 ('λγεβρα των ορίων). *Έστω δύο ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ οι οποίες συγκλίνουν αντίστοιχα στα όρια L_1 και L_2. Τότε,*

1. *Η ακολουθία $\{a_n + b_n\}$ συγκλίνει επίσης και μάλιστα*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2,$$

[1] Απο την άλλη όμως για να δείξουμε οτι μια ακολουθία έχει όριο θα πρέπει κάθε υποακολουθία της να έχει το ίδιο όριο και φυσικά απο μία ακολουθία μπορούμε να επιλέξουμε άπειρες το πλήθος υποακολουθίες.

2. *Η ακολουθία $\{a_n\, b_n\}$ συγκλίνει επίσης και μάλιστα*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = L_1\, L_2.$$

3. *Αν επιπλέον $L_2 \neq 0$, η ακολουθία $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ συγκλίνει επίσης και μάλιστα*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L_1}{L_2}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη μπορεί να γίνει με τον ορισμό του ορίου και την αφήνουμε σαν άσκηση. ∎

Η άλγεβρα των ορίων μας βοηθάει να βρίσκουμε με εύκολο τρόπο τα όρια ακολουθίων των οποίων ο γενικός όρος μπορεί να δίνεται απο περίπλοκες εκφράσεις.

Παράδειγμα 2.3.8. *Ας υποθέσουμε οτι ζητάμε να βρούμε το όριο της ακολουθίας $\{a_n\}$ με $a_n = \frac{n}{n^2+1}$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ξαναγράψουμε τον γενικό όρο με την μορφή*

$$a_n = \frac{1}{n}\,\frac{n}{n+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$$

δηλαδή σαν $a_n = b_n\,\frac{1}{c_n}$ όπου $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = 1+\frac{1}{n^2}$. Η ακολουθία $\{c_n\}$ έχει όριο 1, συνεπώς απο την Πρόταση 2.3.7 (3) παίρνουμε ότι το όριο της ακολουθίας $\{\frac{1}{c_n}\}$ είναι το 1. Η ακολουθία $\{b_n\}$ έχει όριο το 0 συνεπώς απο την Πρόταση 2.3.7 (2) καταλήγουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο 0.

Τέλος, μπορεί κανείς να αποδείξει ορισμένες προτάσεις σχετικά με τα όρια ακολουθίων που ικανοποιούν κάποιες σχέσεις διάταξης μεταξύ τους. Αυτές είναι πολύ χρήσιμες γιατί μας επιτρέπουν να αποφανθούμε αν κάποια ακολουθία συγκλίνει ή όχι, ακόμα και αν ενδεχομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο της, απλά και μόνο συγκρίνοντας την ακολουθία αυτή με ακολουθίες για τις οποίες γνωρίζουμε ότι συγκλίνουν.

Πρόταση 2.3.9. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ για την οποία ισχύει ότι $a_n \geq 0$ για κάθε n. Αν η ακολουθία έχει όριο L, τότε $L \geq 0$.*
2. *Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ για την οποία ισχύει ότι $C_1 \leq a_n \leq C_2$ για κάθε n. Αν η ακολουθία έχει όριο L, τότε $C_1 \leq L \leq C_2$.*
3. *Έστω τρεις ακολουθίες $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ τέτοιες ώστε $b_n \leq a_n \leq c_n$ για κάθε n. Αν οι ακολουθίες $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ έχουν όριο τον αριθμό L τότε και η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L.*

Απόδειξη: (1) Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός, δηλαδή ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $L < 0$. Λόγω της σύγκλισης, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει $\mid a_n - L \mid < \epsilon$. Αν επιλέξουμε $\epsilon = -\frac{L}{2} > 0$ η προηγούμενη ανισοτητα μας δίνει ότι για $n > N$ ισχύει ότι $a_n < \frac{L}{2} < 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $a_n \geq 0$ για κάθε n. Τα (2) και (3) αφήνονται σαν άσκηση. ∎

Παράδειγμα 2.3.10. *Η ακολουθία $\{a_n\}$, με $a_n = \frac{1}{n!}$ έχει όριο το 0. Πράγματι, για κάθε n, $n! = 1\cdot 2\cdots n \geq n$ οπότε $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$. Αν ορίσουμε τις ακολουθίες $\{b_n\}, \{c_n\}$ με $b_n = 0$ και $c_n = \frac{1}{n}$, η ακολουθία $\{a_n\}$ έχει την ιδιότητα $b_n \leq a_n \leq c_n$ για κάθε n. Αφού $\lim_n b_n = \lim_n c_n = 0$ απο την Πρόταση 2.3.9(3) βλέπουμε οτι $\lim_n a_n = 0$.*

2.4 Μονότονες ακολουθίες

Μπορούμε να ορίσουμε μία ειδική κατηγορία ακολουθιών οι οποίες είμαστε σίγουροι ότι συγκλίνουν.

Ορισμός 2.4.1 (Αύξουσες, φθίνουσες και μονότονες ακολουθίες)**.**

1. *Μία ακολουθία $\{a_n\}$ ονομάζεται* **αύξουσα** *αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε n.*
2. *Μία ακολουθία $\{a_n\}$ ονομάζεται* **φθίνουσα** *αν $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε n.*
3. *Μία ακολουθία $\{a_n\}$ ονομάζεται* **μονότονη** *αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.*

Παράδειγμα 2.4.2. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = n$ *είναι αυξουσα.*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = \frac{1}{n}$ *είναι φθίνουσα.*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = (-1)^n$ *δεν είναι ούτε αυξουσα, ούτε φθίνουσα συνεπώς δεν είναι μονότονη.*

Ορισμός 2.4.3 (Φραγμένες ακολουθίες)**.**

1. *Μία ακολουθία* $\{a_n\}$ *ονομάζεται* **φραγμένη απο τα ανω** *αν υπάρχει* $C \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $a_n \leq C$ *για κάθε* n.

2. *Μία ακολουθία* $\{a_n\}$ *ονομάζεται* **φραγμένη απο τα κάτω** *αν υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $c \leq a_n$ *για κάθε* n.

3. *Μία ακολουθία* $\{a_n\}$ *ονομάζεται* **φραγμένη** *αν είναι φραγμένη απο τα ανω και φραγμένη απο τα κάτω.*

Παράδειγμα 2.4.4. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = n$ *είναι φραγμένη απο τα κάτω αλλά οχι φραγμένη απο τα ανω.*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = -n$ *είναι φραγμένη απο τα άνω αλλά όχι φραγμένη απο τα κάτω.*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = \frac{1}{n}$ *φραγμενη.*

▷ *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *με* $a_n = (-1)^n$ *είναι φραγμένη.*

Πρόταση 2.4.5. *Μία μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αύξουσα και φραγμένη. Ας θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{a_n |\ n \in \mathbb{N}^+\} = \{a_1, a_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$, δηλαδή το σύνολο που αποτελείται απο κάθε όρο της ακολουθίας. Εφόσον η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, το σύνολο X είναι φραγμένο, οπότε, απο το αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος το σύνολο αυτό έχει κάποιο ελάχιστο άνω φράγμα (sup) το οποίο θα συμβολίσουμε με L, δηλαδή $L := \sup(X) = \sup a_n$.

Θα δείξουμε ότι το L είναι το όριο της ακολουθίας: Απο τον ορισμό του sup για κάποιο σύνολο X αν $L := \sup(X)$, το $L - \epsilon$ δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα του συνόλου αυτού για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Συνεπώς, θα υπάρχει κάποιο στοιχείο του συνόλου X π.χ. το $x \in X$ τέτοιο ώστε $L - \epsilon < x$. Από τον ορισμό του X όμως, για να ισχύει $x \in X$ θα πρέπει να υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $x = a_N$. Λόγω όμως της μονοτονίας της ακολουθίας (και επειδή δεχθήκαμε ότι είναι αύξουσα) για κάθε $n > N$ θα ισχύει $a_n > a_N$. Συνεπώς, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ έτσι ώστε να έχουμε την ανισότητα

$$L - \epsilon < x = a_N \leq a_n, \ \ n > N \tag{2.3}$$

Όμως, θυμηθείτε ότι $L := \sup(X)$ οπότε, $a_n \leq L$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Για $\epsilon > 0$ η ανισότητα αυτή μπορεί να ενισχυθεί στην

$$a_n < L + \epsilon, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^+. \tag{2.4}$$

Συνδυάζοντας τις (2.3) και (2.4), καταλήγουμε στο ότι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ έτσι ώστε να έχουμε την ανισότητα

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon, \quad n > N,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
Η απόδειξη για φθίνουσα ακολουθία είναι παρεμφερής και αφήνεται στον αναγνώστη. Στην περίπτωση αυτή το όριο είναι το $\inf(X) = \inf a_n$. ■

Σχόλιο 2.4.6. *Το ότι μία συγκλίνουσα ακολουθία ειναι φραγμένη ισχύει γενικότερα για κάθε ακολουθία και όχι μόνο τις μονότονες ακολουθίες (βλ. Προταση 2.5.1).*

Αν μία αυξουσα ακολουθία δεν είναι φραγμένη απο τα άνω δεν μπορεί να συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό. Όμοια, αν μια φθίνουσα ακολουθία δεν είναι φραγμένη απο τα κάτω.

Ορισμός 2.4.7.

1. *Αν $\{a_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία η οποία δεν είναι φραγμένη απο τα άνω λέμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.*

2. *Αν $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία η οποία δεν είναι φραγμένη απο τα κάτω λέμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Παράδειγμα 2.4.8. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \rho^{n-1}x_0 + b$ όπου $0 < \rho < 1$ είναι φθίνουσα, εφόσον $a_{n+1} < a_n$ για κάθε n, και φραγμένη εφόσον $a_n < a_1 = x_0 + b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο $L = b$.*

Παράδειγμα 2.4.9. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και φραγμένη απο τα ανω ακολουθία. Συνεπώς, είναι συγκλίνουσα. Το όριο της συμβολίζεται με το e και είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων.*

Για να δούμε ότι η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n, \quad 0 \le a < b, \tag{2.5}$$

η οποία προκύπτει άμεσα απο την ταυτότητα $b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + ba^{n-1} + a^n)$ (προσπαθείστε με επαγωγή). Αν όπου $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ και $b = 1 + \frac{1}{n}$ στην (2.5) παιρνουμε οτι $a_n < a_{n+1}$ για κάθε n [2]. Για να δούμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη στην ανισότητα (2.5) θέτουμε όπου $a = 1$ και $b = 1 + \frac{1}{2n}$, το οποίο μας δίνει ότι $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2$ για κάθε n, και υψώνοντας στο τετράγωνο παρατηρούμε ότι $a_{2n} < 4$ για κάθε n. Όμως, εφόσον $n < 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα έχουμε ότι $a_n < a_{2n} < 4$ για κάθε n, συνεπώς $a_n < 4$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. 'ρα η ακολουθία είναι αύξουσα κα φραγμενη απο τα ανω απο το 4, συνεπώς απο την Πρόταση 2.4.5 συγκλίνει. Ορίζουμε $e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Παράδειγμα 2.4.10. *Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_n\}$ με γενικό τύπο $a_n = \sum_{k=1}^{n} \rho^k$, $0 < \rho < 1$. Η ακολουθία είναι αύξουσα και συγκλίνει. Πράγματι, $a_{n+1} - a_n = \rho^{n+1} > 0$. Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι $a_n = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} - 1$ οπότε επειδή $\lim_{n\to\infty} \rho^n = 0$, απο την άλγεβρα των ορίων έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\rho}{1-\rho}$. Το όριο αυτό θα το συμβολίζουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$.*

Παράδειγμα 2.4.11. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο*

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \; n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

είναι φθίνουσα ακολουθία (για $n \ge 2$) και συνεπώς μονότονη. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι είναι μία φραγμένη ακολουθία. Συνεπώς, είναι συγκλίνουσα και θα έχει όριο έστω το L. Απο την Πρόταση 2.3.7 σχετικά με την άλγεβρα των ορίων, μπορούμε να δούμε ότι για το όριο αυτό θα ισχύει

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right)$$

οπότε μετά απο λίγες πράξεις καταλήγουμε στο ότι $L^2 = 2$. Συνεπώς, το όριο της ακολουθίας αυτής θα είναι η τετραγωνική ρίζα του 2. Η αναδρομική λοιπόν σχέση που ορίζει την ακολουθία, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και σαν μία επαναληπτική αριθμητική μέθοδος για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας.

Οι μονότονες ακολουθίες, λόγω της ιδιότητας της σύγκλισης τους, βρίσκουν πολλές εφαρμογές στην αριθμητική ανάλυση και συγκεκριμένα στις επαναληπτικές μεθόδους. Σαν παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την μέθοδο του Newton για την εύρεση των σημείων μηδενισμού συναρτήσεων. Θα επανέλθουμε σε αυτό, και στις κατάλληλες γενικεύσεις του αργότερα κατά την διάρκεια των διαλέξεων αυτών.

2.5 Το Θεώρημα $Bolzano - Weierstrass$

Θα ξεκινήσουμε με την ακόλουθη απλή παρατήρηση.

Πρόταση 2.5.1. *Μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ η οποία είναι συγκλίνουσα και έστω L το όριο της. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τετοιο ώστε $\mid a_n - L \mid < \epsilon$ για $n > N$. Συνεπώς $a_n < L + \epsilon$ για $n = N+1, N+2, \cdots$.

[2] Γράψτε την (2.5) σε ισοδύναμη μορφή $b^n[b - (n+1)(b-a)] < a^{n+1}$.

Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο n οι όροι της ακολουθίας είναι φραγμένοι απο τον αριθμό $L+\epsilon$. Για $n \leq N$ ισχύει η προφανής σχέση

$$a_n \leq max(a_1, a_2, \ldots, a_N)$$

Συνεπώς αν ορίσουμε

$$M = max(L+\epsilon, max(a_1, a_2, \ldots, a_N))$$

τότε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και η ακολουθία είναι φραγμένη απο τα ανω. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη απο τα κάτω (άσκηση). 'ρα, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. ■

Είναι εύλογο να μας απασχολήσει το ερώτημα, σχετικά με το αν ισχύει και το αντίστροφο της πρότασης αυτής, δηλαδή αν ισχύει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία είναι και συγκλίνουσα. Η απάντηση είναι αρνητική, όπως πολύ εύκολα μας δείχνει το παρακάτω αντιπαράδειγμα:

Παράδειγμα 2.5.2. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη εφόσον $\mid a_n \mid = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ αλλά δεν είναι συγκλίνουσα (θυμηθειτε το Παράδειγμα 2.3.3).*

Μπορούμε όμως να δείξουμε ένα άλλο ασθενέστερο αποτέλεσμα, το οποίο όμως είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της μαθηματικής ανάλυσης.

Θεώρημα 2.5.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$.*

Απόδειξη: Θα παρουσιάσουμε εδώ μία απόδειξη, η οποία χρησιμοποιεί το γεγονός (αξίωμα) ότι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει και ελάχιστο άνω φράγμα. Η απόδείξη του ισχυρισμού, θα γίνει με την **κατασκευή** μιάς τέτοιας συγκλίνουσας υποακολουθίας.
Ας πάρουμε μία φραγμένη ακολουθία $\{a_n\}$ και ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{υπάρχουν άπειρα το πλήθος } a_n, \text{τέτοια ώστε } a_n > x\}$$

Με λόγια μπορούμε να πούμε ότι το X είναι το σύνολο που περιέχει κάτω 'στάθμες ' πάνω απο τις οποίες υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας, **αλλά οχι απαραίτητα όλοι**! Το σύνολο X είναι μη κενο: αν ήταν κενό η ακολουθία δεν θα μπορούσε να είναι φραγμένη απο τα κάτω. Το σύνολο X έχει ανω φράγμα: αν δεν είχε η ακολουθία δεν θα ήταν φραγμένη απο τα άνω. Το σύνολο X είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, το οποίο είναι φραγμένο απο τα ανω και μη κενό, οπότε θα έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα. Ας συμβολίσουμε $M := \sup(X)$. Στο σημείο αυτό ας αναλογιστούμε τι σημαίνει άνω φράγμα για το σύνολο X. Έστω C ένα ανω φράγμα του X. Αυτό σημαίνει οτι κάθε $x \in X$ ικανοποιεί την σχέση $x \leq C$. Αν συνεπώς επιλέξουμε $x \leq C$ υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας $a_n > x$. Αν επιλέξω $x > C$ τότε $x \notin X$, κατά συνεπεια υπάρχουν **πεπερασμένοι** το πλήθος όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ για τους οποίους ισχύει οτι $a_n > x$. Αν το c δεν είναι ανω φράγμα του X, τότε μπορώ να βρώ $x \in X$ για το οποίο $c \leq x$, και για το οποίο ισχύει ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι της ακολουθίας που ικανοποιούν $a_n > x$. Από τον ορισμό του sup έχουμε οτι για κάθε $\epsilon > 0$ το $M - \epsilon$ είναι άνω φράγμα του συνόλου X οπότε θα εχουμε άπειρους όρους της ακολουθίας a_n για τους οποίους ισχύει $M - \epsilon \leq a_n$, ενώ το $M + \epsilon$ **δεν** είναι άνω φράγμα του συνόλου X οπότε θα έχουμε **πεπερασμένους** το πλήθος όρους της ακολουθίας a_n οι οποίοι θα παίρνουν τιμές $a_n > M + \epsilon$ συνεπώς άπειρους το πλήθος όρους της ακολουθίας (όλους τους υπόλοιπους) που θα παίρνουν τιμές $a_n \leq M + \epsilon$.
Συνεπώς, **άπειροι** το πλήθος όροι θα βρίσκονται στο διάστημα $[M - \epsilon, M + \epsilon]$ για κάθε $\epsilon > 0$.

- ▷ Ας πάρουμε πρώτα $\epsilon = 1$, και ας επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας ο οποίος βρισκεται μέσα στο διάστημα $[M-1, M+1]$, π.χ τον a_{n_1}.

- ▷ Μετά, ας πάρουμε $\epsilon = \frac{1}{2}$ και ας επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας ο οποίος βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2}]$ έστω τον a_{n_2}. Μπορούμε να επιλέξουμε πάντοτε $n_2 > n_1$ εφόσον υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι οι οποίοι έχουν την ιδιότητα αυτή.

- ▷ Συνεχίζοντας π.χ. στο k-οστό βήμα επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας ο οποίος βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[M - \frac{1}{k}, M + \frac{1}{k}]$, τον οποίο μετονομάζουμε a_{n_k}. Έχουμε προσέξει να επιλέξουμε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.

▷ Θεωρούμε ότι αυτή η διαδικασία επιλογής συνεχίζεται επ'άπειρον.

Με τον τρόπο αυτό έχουμε επιλέξει ορισμένους όρους απο την ακολουθία $\{a_n\}$, τους $\{a_{n_k}\}$, με άλλα λόγια έχουμε κατασκευάσει μία **υποακολουθία** της $\{a_n\}$. Από τον τρόπο επιλογής τους οι όροι $\{a_{n_k}\}$ είναι τέτοιοι ώστε

$$| a_{n_k} - M | \leq \frac{1}{k}$$

Απο την ανισότητα αυτή μπορούμε να δούμε ότι $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = M$, και κατα συνέπεια η υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ είναι συγκλίνουσα. ■

Παράδειγμα 2.5.4. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν είναι συγκλίνουσα. Όμως έχει τουλάχιστον δύο συγκλίνουσες υποακολουθίες, την $\{a_{n_k}\}$ με $n_k = 2k$ η οποία έχει όριο 1 και την $\{a_{n_k}\}$ με $n_k = 2k - 1$ η οποία έχει όριο -1.*

Ορισμός 2.5.5 (Σημείο συσσώρευσης)**.** *Ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται* **σημείο συσσώρευσης** *της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν υπάρχει υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ η οποία έχει όριο x*

Παράδειγμα 2.5.6. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$ έχει σημεία συσσώρευσης το 1 και -1.*

Η ακόλουθη πρόταση μπορεί να μας βοηθήσει στον χαρακτηρισμό των σημείων συσσώρευσης μιας ακολουθίας.

Πρόταση 2.5.7. *Έστω $\{a_n\}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x \in \mathbb{R}$. Ο x είναι σημείο συσσώρευσης της $\{a_n\}$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $N \in \mathbb{N}^+$ υπάρχει $M \geq N$ τέτοιο ωστε $|a_M - x| < \epsilon$.*

Σχόλιο 2.5.8. *Προσοχή, το παραπάνω* **δεν** *είναι το ίδιο με τον ορισμό του ορίου. Για τον ορισμό του ορίου ζητάμε για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει N τέτοιο ωστε για καθε $n > N$ να ισχύει $|a_n - x| < \epsilon$ δηλαδή* **όλοι** *οι όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ μετά τον N-οστό όρο να είναι κοντά στο x. Η συνθήκη της παραπάνω πρότασης είναι διαφορετική. Για καθε $\epsilon > 0$ και για κάθε N να υπάρχει (τουλάχιστον) ένας όρος της ακολουθίας μετά τον N-οστό όρο, π.χ. ο όρος a_M ο οποίος να είναι κοντά στο x. Δεν ζητάμε όλοι οι όροι μετά τον N-οστό να ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή (παρόλο η παραπάνω διατυπωση επιτρέπει δεν αποκλείει αυτό να συμβαίνει)!*

Απόδειξη της Πρότασης 2.5.7: Έστω x σημείο συσσωρευσης της $\{a_n\}$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη της πρότασης. Ας επιλέξουμε $\epsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}^+$. Έστω $\{a_{n_k}\}$ μια υποακολουθία της $\{a_n\}$ που συγκλίνει στο x. Τότε, απο τον ορισμό του ορίου για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει K τέτοιο ωστε $|a_{n_k} - x| < \epsilon$ για $k > K$. Ας πάρουμε k τόσο μεγάλο ωστε $n_k > N$ (το οποίο μπορούμε να το κάνουμε εφόσον $\{n_k\}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία). Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει για την επιλογή $M = n_k$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το x είναι τέτοιο ωστε να ικανοποιείται η συνθήκη της πρότασης. Θα δείξουμε ότι x είναι σημείο συσσώρευσης της $\{a_n\}$. Για κάθε $\epsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}^+$, υπάρχει $M > N$ τέτοιο ωστε $|a_M - x| < \epsilon$. Θα κατασκευάσουμε μια υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τέτοια ωστε $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$.

▷ Στο πρώτο βημα επιλέγουμε $\epsilon = 1$, $N = 1$, εφαρμόζουμε την συνθήκη της πρότασης και ονομάζουμε $n_1 = M(1, 1)$, όπου $M(1, 1)$ είναι το M για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη της πρότασης για την επιλογή αυτή των ϵ και N. Ισχύει,

$$|a_{n_1} - x| < 1.$$

▷ Στο δευτερο βήμα επιλέγουμε $\epsilon = \frac{1}{2}$, $N = n_1$ (όπου n_1 έχει οριστεί στο προηγούμενο βήμα), εφαρμόζουμε την συνθήκη της πρότασης και ονομάζουμε $n_2 = M(\frac{1}{2}, n_1)$, όπου $M(\frac{1}{2}, n_1)$ είναι το M για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη της πρόταση για την παρούσα επιλογή των ϵ, N. Ισχύει

$$|a_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$$

και $n_1 > n_2$.

▷ Στο k-οστό βήμα επιλέγουμε $\epsilon = \frac{1}{k}$, $N = n_{k-1}$ (όπου n_{k-1} έχει οριστεί στο $k-1$-οστό βήμα). Εφαρμόζουμε την συνθήκη της πρότασης και ονομάζουμε $n_k = M(\frac{1}{k}, n_{k-1})$ όπου $M(\frac{1}{k}, n_{k-1})$ είναι το M για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη της πρόταση για την παρούσα επιλογή των ϵ, N. Ισχύει

$$|a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$$

και $n_k > n_{k-1}$.

▷ Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο επ' άπειρον.

Με τον τρόπο αυτό εχουμε κατασκευάσει μια υποακολουθία, $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$ η οποία συγκλίνει στο x. ■

2.6 Ακολουθίες *Cauchy*

Μέχρι τώρα είδαμε οτι για να ελέγξουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει, θα πρέπει με κάποιο τρόπο να έχουμε 'μαντέψει' το πιθανό της όριο L και να ελέγξουμε αν ισχύει η συνθήκη του Ορισμού 2.3.1 για αυτό το L. Αυτό δεν είναι πάντοτε πρακτικό, γιατί πολλές φορές δεν γνωρίζουμε ποιό είναι το υποψήφιο όριο. Αυτό συμβαίνει ειδικότερα στις περιπτώσεις όπου μια ακολουθία ορίζεται με επαναληπτικό τρόπο (βλ. π.χ. Παράδειγμα 2.2.6), μια κατηγορία ακολουθιών η οποία είναι πολύ σημαντική γιατί είναι θεμελιώδης στην θεωρία του υπολογισμού και την αριθμητική ανάλυση. Είναι λοιπόν εξαιρετικά χρήσιμο να διατυπώσουμε ενα κριτήριο σύγκλισης το οποίο να μην προϋποθέτει απο πριν γνώση του ορίου της ακολουθίας. Αυτό μας το προσφέρει το κριτήριο του Cauchy.

Ορισμός 2.6.1. *Μία ακολουθία $\{a_n\}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για κάθε n, m με $n > N$ και $m > N$ να ισχύει $\mid a_n - a_m \mid < \epsilon$.*

Παράδειγμα 2.6.2. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy. Οι διαδοχικοί της όροι απο κάποιο n και μετά πλησιάζουν όλο και περισσότερο (η απόσταση τους μπορεί να γίνει μικρότερη απο οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ για n αρκετά μεγάλο).*

Παράδειγμα 2.6.3. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$* **δεν** *είναι ακολουθία Cauchy (η απόσταση των διαδοχικών όρων είναι πάντοτε 2 όσο μεγάλο και αν πάρουμε το n).*

Ισχύει το ακόλουθο πολύ βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.6.4. *Μία ακολουθία $\{a_n\}$ στον $\mathbb{R}$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Το ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy προκύπτει άμεσα απο την παρατήρηση ότι με απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας ισχύει $|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L|$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}^+$ και κάθε $L \in \mathbb{R}$. Αν επιλέξουμε ως L το όριο της ακολουθίας $\{a_n\}$, η ιδιότητα Cauchy προκύπτει εύκολα απο την παραπάνω ανισότητα (οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση).

Θα δείξουμε τώρα ότι μία ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε αρχικά ότι μία ακολουθία Cauchy πρέπει να είναι φραγμένη (άσκηση). Μία φραγμένη ακολουθία όμως, απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass πρέπει να έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, έστω $\{a_{n_k}\}$. Ας ονομάσουμε L το όριο της υποακολουθίας αυτής, δηλαδή

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το L αυτό είναι και το όριο της ακολουθίας $\{a_n\}$.

Ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.

▷ Επειδή η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι Cauchy υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε

$$\mid a_m - a_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$$

για $n, m \geq N$.

▷ Επειδή η υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ είναι συγκλίνουσα με όριο L θα υπάρχει κάποιο $K \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $k \geq K$ να έχουμε

$$\mid a_{n_k} - L \mid < \frac{\epsilon}{2}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να δούμε το πόσο κοντά πλησιάζουν οι όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ στο L. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να κάνουμε την εκτίμηση

$$\mid a_n - L \mid \leq \mid a_n - a_{n_k} \mid + \mid a_{n_k} - L \mid .$$

Αν επιλέξουμε το k και το n έτσι ώστε $k > K$ και $n, n_k > N$ τότε απο την ιδιότητα Cauchy θα έχουμε ότι $\mid a_n - a_{n_K} \mid < \frac{\epsilon}{2}$ και απο την ιδιότητα της $\{a_{n_k}\}$ να είναι συγκλίνουσα υποακολουθία με όριο L θα έχουμε ότι $\mid a_{n_K} - L \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Παρατηρείστε ότι επειδή η ακολουθία $\{n_k\}$ είναι αύξουσα, είναι πάντοτε δυνατό να επιλέξουμε ενα k τόσο μεγάλο έτσι ωστε $n_k > N$ για κάποιο δεδομένο N. Συνεπώς, για $n \geq N$,

$$\mid a_n - L \mid \leq \mid a_n - a_{n_K} \mid + \mid a_{n_K} - L \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Αυτό μας λέει ότι μπορούμε να βρούμε κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ τα a_n να πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο L. 'ρα, η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L. ■

Παράδειγμα 2.6.5. *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ δίνεται απο τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = f(a_n)$ όπου το a_1 είναι γνωστό και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| < \rho|x - y|$, $0 < \rho < 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy και απο το Θεώρημα 2.6.4 είναι συγκλίνουσα.*

Για να το δούμε αυτό, ξεκινούμε με την παρατήρηση ότι

$$|a_{\ell+2} - a_{\ell+1}| = |f(a_{\ell+1}) - f(a_\ell)| \le \rho|a_{\ell+1} - a_\ell|, \ \forall \, \ell \in \mathbb{N}^+$$

Για $\ell = 1$ η σχέση αυτή δίνει $|a_3 - a_2| \le \rho\,|a_1 - a_0|$, για $\ell = 2$, $|a_4 - a_3| \le \rho\,|a_3 - a_2| \le \rho^2\,|a_1 - a_0|$, και συνεχίζοντας κατ΄ αυτόν τον τρόπο

$$|a_{\ell+2} - a_{\ell+1}| \le \rho^\ell\,|a_1 - a_0| \ \forall \, \ell \in \mathbb{N}^+. \tag{2.6}$$

Ας πάρουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $m > n$, ας γράψουμε $m = n + p$ και ας παρατηρήσουμε οτι

$$|a_n - a_m| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \le \sum_{r=1}^{p} |a_{n+r} - a_{n+r-1}|, \tag{2.7}$$

όπου αρχικά εκφράσαμε την διαφορά $a_m - a_n$ σαν τηλεσκοπικό άθροισμα και μετά χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα. Όμως, η (2.6) για $\ell = n + r - 2$ μας δινει ότι

$$|a_{n+r} - a_{n+r-1}| \le \rho^{n+r-2}|a_1 - a_0|,$$

και συνεπώς η (2.7) δίνει

$$|a_n - a_m| \le \sum_{r=1}^{p} \left(\rho^{n+r-2}|a_1 - a_0|\right) = \rho^{n-2}|a_1 - a_0| \left(\sum_{r=1}^{p} \rho^r\right).$$

Στο σημείο αυτό ας παρατηρήσουμε οτι εφόσον $0 < \rho < 1$,

$$\sum_{r=1}^{p} \rho^p \le \sum_{r=1}^{\infty} \rho^p = \frac{1}{1-\rho} - 1 = \frac{\rho}{1-\rho},$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει απλά και μόνο επειδή συμπληρώνουμε θετικούς όρους στο άθροισμα ενω για την ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες της γεωμετρικής προόδου. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εκτίμηση η (2.8) δίνει

$$|a_n - a_m| \le \frac{\rho^{n-1}}{1-\rho}|a_1 - a_0|.$$

Για n αρκετά μεγάλο η ποσότητα $\frac{\rho^{n-1}}{1-\rho}|a_1 - a_0|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή επιθυμούμε, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε N τέτοιο ώστε $|a_n - a - m| < \epsilon$ για $n, m > N$. Συνεπώς η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα. Η χρήση ακολουθιών αυτής της μορφής είναι ευρύτατα διαδεδομένη στην αριθμητική ανάλυση.

Το κατά πόσο μία ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα ή όχι σε κάποιο στοιχείο είναι ιδιότητα του συνόλου στο οποίο ορίζεται η ακολουθία. Αν η ακολουθία ορίζεται στον $\mathbb{R}$ τότε αυτό, όπως δείξαμε στο Θεώρημα 2.6.4 είναι αληθινό. Αν η ακολουθία ορίζεται σε κάποιο άλλο σύνολο αυτό δεν είναι αναγκαίο. Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό αργότερα στην διάρκεια των διαλέξεων αυτών. Προς το παρόν θα αρκεστούμε σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.6.6. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ που ορίστηκε στο Παράδειγμα 2.2.6 είναι μια ακολουθία του $\mathbb{Z}$, εφόσον κάθε όρος της είναι ένας ρητός αριθμός. Όμως, το όριο της ακολουθιας είναι ο αριθμός $\sqrt{2}$ ο οποίος είναι άρρητος, συνεπώς το όριο της ακολουθίας δεν ανήκει στο $\mathbb{Z}$. Μία ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{Z}$ συνεπώς δεν έχει απαραίτητα όριο στο σύνολο αυτό, αλλά το όριο της είναι στοιχείο ενός μεγαλύτερου συνόλου (του $\mathbb{R}$).*

2.7 'νω και κάτω όρια ακολουθιών

Είδαμε, ότι όλες οι ακολουθίες δεν έχουν απαραίτητα όριο. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε κάποιες άλλες ποσότητες, οι οποίες να μας δίνουν ορισμένες πληροφορίες για την ασυμπτωτική συμπεριφορά μιας ακολουθίας και να υπάρχουν για όλες τις ακολουθίες; Οι ποσότητες αυτες ειναι το ανω και κάτω όριο. Θα δώσουμε δυο εναλλακτικούς αλλά ισοδύναμους ορισμούς για τις ποσότητες αυτες.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση φραγμένων ακολουθιών. Έστω $\{a_n\}$ μια φραγμένη ακολουθια. Απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ και έστω L το όριο της. Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν μας αποκλειει την ύπαρξη και άλλων συγκλινουσών υποακολουθίων οι οποίες εν γένει μπορεί να έχουν διαφορετικά όρια. Μπορούμε για δεδομένη ακολουθία $\{a_n\}$, να ορίσουμε το σύνολο $\mathcal{L}_a$ το οποίο αποτελείται απο τους πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι είναι όρια κάποιας συγκλίνουσας υποακολουθίας $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$, δηλαδή

$$\mathcal{L}_a = \{L \in \mathbb{R} \mid \exists \{a_{n_k}\}, \text{ τέτοια ώστε } \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L\}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες πολύ σημαντικές ποσότητες

Ορισμός 2.7.1 (’νω και κάτω όριο ακολουθίας I)**.**

1. *Το ελάχιστο άνω φράγμα* (sup) *του συνόλου $\mathcal{L}_a$ ονομάζεται το* **άνω όριο** *της ακολουθίας $\{a_n\}$ και συμβολίζεται* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{L}_a$$

2. *Το μέγιστο κάτω φράγμα* (inf) *του συνόλου $\mathcal{L}_a$ ονομάζεται το* **κάτω όριο** *της ακολουθίας $\{a_n\}$ και συμβολίζεται* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{L}_a$$

Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι το lim sup και lim inf μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ είναι το ελάχιστο ανω φράγμα (sup) και μέγιστο κάτω φράγμα (inf) αντιστοίχως του συνόλου των ορίων όλων των συγκλινουσων υποακολουθιών $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$. Όμως, όπως θα δούμε στην αποδείξουμε στην συνέχεια έχουμε κάτι ισχυρότερο, είναι το μέγιστο και ελάχιστο υποακολουθιακό όριο αντιστοίχως, υπο την έννοια οτι δεδομένης μιας ακολουθίας $\{a_n\}$, μπορούμε να βρούμε πάντοτε μια υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ που να συγκλίνει στο $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ και μια υποακολουθία $\{a_{r_k}\}$ που να συγκλίνει στο $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Τα άνω και κάτω όρια έχουν τους ακόλουθους ισοδύναμους ορισμούς.

Ορισμός 2.7.2 (’νω και κάτω όριο ακολουθίας II)**.**

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} a_m\right) = \inf_n \left(\sup_{m\geq n} a_m\right)$
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} a_m\right) = \sup_n \left(\inf_{m\geq n} a_m\right)$

Σχόλιο 2.7.3. *Ο ορισμός αυτός γίνεται πλήρως κατανοητός αν προσέξουμε ότι η ακολουθία $\iota_n = \inf_{m\geq n} a_m$ είναι μια* **αύξουσα** *ακολουθία και η ακολουθία $s_n = \sup_{m\geq n} a_m$ είναι μια* **φθίνουσα** *ακολουθία. Προφανώς με τον συμβολισμό $\sup_{m\geq n} a_m := \sup\{a_m \mid m \geq n\}$ δηλαδή το* sup *του υποσυνόλου των πραγματικών αριθμών που αποτελείται απο τα στοιχεία της ακολουθίας $\{a_m\}$ για $m \geq n$. Όμοιως $\inf_{m\geq n} a_m := \inf\{a_m \mid m \geq n\}$.*

Παράδειγμα 2.7.4. *Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$. Τότε $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ και $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.*

Θα εργαστούμε πρώτα με τον Ορισμό 2.7.1. Για να δείξουμε ότι $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ας πάρουμε την υποακολουθία $\{a_{2n}\}$ για την οποία ισχύει $a_{2n} = 1$ οποτε έχει όριο $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$. Συνεπώς, απο το ορισμό του συνόλου $\mathcal{L}_a$, $1 \in \mathcal{L}_a$ οπότε

$$1 \leq \sup \mathcal{L}_a = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{2.8}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα **οποιαδήποτε** *συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{a_n\}$, π.χ την $\{a_{n_k}\}$. Για την υποακολουθία αυτή ισχύει $a_{n_k} \leq 1$ για κάθε k, εφόσον $\mid a_n \mid = 1$ για κάθε n, οπότε η ανισότητα αυτή ισχύει και για το όριο της υποακολουθίας αυτής, συνεπώς*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq 1.$$

Η ανισότητα αυτή όμως μας λέει ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathcal{L}_a$ θα πρέπει να είναι μικροτερο του 1, άρα και το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου αυτού (sup) θα πρέπει να είναι και αυτό μικροτερο του 1,

$$sup\,\mathcal{L}_a = \limsup_{n\to\infty} a_n \leq 1. \tag{2.9}$$

Από τις ανισότητες (2.8) και (2.9) βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Για να δείξουμε ότι $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ θα πάρουμε την υποακολουθία $\{a_{2n-1}\}$, για την οποία ισχύει $a_{2n-1} = -1$ για κάθε $n \in\mathbb{N}^+$ οπότε και $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$. Συνεπώς, απο τον ορισμό του συνόλου $\mathcal{L}_a$, $-1 \in \mathcal{L}_a$ οπότε

$$\inf\,\mathcal{L}_a = \liminf_{n\to\infty} a_n \leq -1. \tag{2.10}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα **οποιαδήποτε** *συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{a_n\}$, π.χ την $\{a_{n_k}\}$. Για την υποακολουθία αυτή ισχύει $-1 \geq a_{n_k}$ για κάθε k, εφόσον $\mid a_n \mid= 1$ για κάθε n, οπότε η ανισότητα αυτή ισχύει και για το όριο της υποακολουθίας αυτής, συνεπώς*

$$-1 \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

Η ανισότητα αυτή όμως μας λέει ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathcal{L}_a$ θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του -1, άρα και το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου αυτού (inf) θα πρέπει να είναι και αυτό μεγαλύτερο του -1,

$$-1 \leq \inf\mathcal{L}_a = \liminf_{n\to\infty} a_n. \tag{2.11}$$

Από τις ανισότητες (2.10) και (2.11) βλέπουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Παράδειγμα 2.7.5. *Θα ξαναδούμε τωρα το Παράδειγμα 2.7.4 χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.7.2. Για την ακολουθία $\{a_n\}$ με γενικό όρο $a_n = (-1)^n$ έχουμε ότι*

- $\triangleright$ $\sup_{m\geq n} a_m = 1$ *(αρκεί $n \geq 2$). ’ρα $\inf_n \left(\sup_{m\geq n} a_m\right) = 1$ οπότε $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.*
- $\triangleright$ $\inf_{m\geq n} a_m = 1$. *’ρα $\sup_n \left(\inf_{m\geq n} a_m\right) = -1$ οπότε $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.*

Σχεδόν απο τον ορισμό των εννοιών $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ και $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ μπορούμε να συνάγουμε την ακόλουθη πολύ χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση 2.7.6. *Έστω $\{a_n\}$ μία φραγμένη ακολουθία, και έστω $S := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ και $I := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένο[3]. Υπάρχουν άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^+$ τέτοια ώστε $S - \epsilon < a_n$ και υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε αν $n > N_1$ να ισχύει $a_n < S + \epsilon$.*
2. *Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένο[4]. Υπάρχουν άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^+$ τέτοια ώστε $a_n < I + \epsilon$ και υπάρχει $N_2 \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε αν $n > N_2$ να ισχύει $I - \epsilon < a_n$.*

Απόδειξη: (1) Ας υποθέσουμε οτι ο πρώτος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, οπότε **δεν** υπάρχουν άπειρα το πλήθος n τέτοια ωστε $S - \epsilon < a_n$. Εφόσον οι όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ που υπερβαίνουν το $S - \epsilon$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος, μπορούμε να βρούμε κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$, τέτοιο ωστε για κάθε $n > N$ να ισχύει $a_n \leq S - \epsilon$. Τότε, όλες οι υποακολουθίες που μπορούμε να επιλέξουμε αναγκαστικά θα ικανοποιούν την ανισότητα $a_{n_k} \leq S - \epsilon$ (βλ. Σχόλιο 2.2.8) οπότε αυτό θα συμβαίνει και για τις συγκλίνουσες υποακολουθίες. Ας πάρουμε λοιπόν μια οποιοαδηποτε συγκλίνουσα υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$. Σύμφωνα με τον παραπάνω συλλογισμό, $a_{n_k} \leq S-\epsilon$ οπότε περνώντας

[3] και οσοδήποτε μικρό.
[4] και οσοδήποτε μικρό.

στο όριο καθώς $k \to \infty$ έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq S - \epsilon$. Δεδομένου ότι όλες οι συγκλίνουσες υποακολουθίες της $\{a_n\}$ έχουν όριο μικρότερο ή ίσο του $S-\epsilon$, το σύνολο $\mathcal{L}_a$ είναι φραγμένο απο τα άνω απο το $S-\epsilon$ και κατά συνέπεια και το $\sup(\mathcal{L}_a) \leq S - \epsilon$. Απο τον Ορισμό 2.7.1, $S = \sup(\mathcal{L}_a) \leq S - \epsilon$, δηλαδή $S \leq S - \epsilon$ το οποίο είναι άτοπο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο δεύτερος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, δηλαδή υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ για τους οποίους ισχύει $S + \epsilon \leq a_n$ [5]. Μπορούμε να επιλέξουμε μια υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τέτοια ωστε $S + \epsilon \leq a_{n_k}$. Η υποακολουθία αυτή είναι φραγμένη (εφόσον έχουμε δεχθεί ότι όλη η ακολουθία $\{a_n\}$ ειναι φραγμένη) κατά συνέπεια, απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία, έστω την $\{a_{n_{k_m}}\}$. Για την υποακολουθία αυτή θα ισχύει ότι $S+\epsilon \leq a_{n_{k_m}}$ για καθε m συνεπώς $S+\epsilon \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} =: L$. Απο κατασκευής, $L \in \mathcal{L}_a$ (εφοσον L είναι όριο μια συγκλίνουσας υποακολουθίας της $\{a_n\}$), άρα $L \leq \sup(\mathcal{L}_a) = S$. Συνδυάζοντας αυτά, καταλήγουμε οτι $S + \epsilon \leq S$ το οποίο είναι άτοπο.

Το (2) αποδεικνύεται παρομοίως και αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Πρόταση 2.7.7. *Οι Ορισμοί 2.7.1 και 2.7.2 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε οτι ο Ορισμός 2.7.1 συνεπάγεται τον Ορισμό 2.7.2 για το $\limsup$. Ας ονομάσουμε $S := \sup(\mathcal{L}_a)$. Θα δείξουμε ότι $\lim n \to \infty \sup m \geq na_m = S$.

Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένο (αυθαίρετο). Απο την Πρόταση 2.7.6 υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ωστε $a_n < S + \epsilon$ για κάθε $n > N_1$. Κατά συνέπεια

$$\sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leq S + \epsilon, \;\; \forall n > N_1$$

οπότε αν ορίσουμε την ακολουθία $s_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ έχουμε οτι η ακολουθία αυτή ικανοποιεί την σχέση $s_n \leq S+\epsilon$ για κάθε $n > N_1$. Η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι συγκλίνουσα και το όριο της ικανοποιεί την ίδια ανισότητα αρα $\lim_{n\to\infty} s_n \leq S+\epsilon$. Εφοσον αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, μπορούμε να πάρουμε ϵ οσοδήποτε μικρό και να καταλήξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq S. \tag{2.12}$$

Απο την άλλη $a_n \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \sup_{m\geq n} a_n = s_n$ για κάθε n. Οποιαδήποτε συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{a_n\}$ θα ικανοποιεί την ανισότητα αυτή. Έστω μια οποιαδήποτε υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ η οποία είναι συγκλίνουσα. Για την $\{a_{n_k}\}$ θα ισχύει $a_{n_k} \leq s_{n_k}$ και πηγαίνοντας στο όριο καθώς $k \to \infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει επειδή αφού η $\{s_n\}$ συγκλίνει, οποιαδήποτε υποακολουθία της, άρα και η $\{s_{n_k}\}$ θα συγκλίνει στο ίδιο όριο (βλ. Πρόταση 2.3.5). Το $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ είναι ενα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου $\mathcal{L}_a$ συνεπώς κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}_a$ είναι μικρότερο ή ίσο απο το $\lim_{n\to\infty} s_n$, άρα και το sup αυτού του συνόλου θα ικανοποιεί την ίδια ανισότητα:

$$S \leq \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{2.13}$$

Συγκρίνοντας τις (2.12) και (2.13) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n} a_m) = S.$$

Τα υπόλοιπα αφήνονται στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη. ∎

Από την Προταση 2.7.6 βλέπουμε ότι αν το S ταυτιστεί με το I τότε παίρνουμε τον γνώριμο ορισμό του ορίου. Ισχύει λοιπόν το παρακάτω πολύ βασικο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7.8. *Έστω $\{a_n\}$ μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L αν και μόνο αν $\liminf_{n\to\infty} a_n = L$ και $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.*

Παράδειγμα 2.7.9. *Βρείτε τα $\limsup_{n\to\infty} a_n$ και $\liminf_{n\to\infty} a_n$ της ακολουθίας $\{a_n\}$ με $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.*

Η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα και το όριο της είναι ο αριθμός e.Συνεπώς, απο το Θεώρημα 2.7.8 ισχύει ότι $\liminf_{n\to\infty} a_n = e$ και $\limsup_{n\to\infty} a_n = e$.

[5] Αλλά οχι απαραίτητα **όλοι** οι όροι a_n για n μεγαλύτερο απο κάποιο N!

Παράδειγμα 2.7.10. *Δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$ δεν μπορεί να έχει όριο.*

Έστω ότι η ακολουθία αυτή είχε όριο L. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7.8 θα έπρεπε να ισχύει

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L.$$

Όμως, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 2.7.4 ισχύει ότι $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ και$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. Συνεπώς, η ακολουθία αυτή δεν μπορεί να έχει οριο.

Η επόμενη πρόταση μας δείχνει ότι το lim sup και το lim inf είναι στην πραγματικότητα το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο αντιστοίχως, δηλαδή το sup και το inf του συνόλου $\mathcal{L}_a$ επιτυγχάνονται.

Πρόταση 2.7.11. *Έστω, $\{a_n\}$ μια φραγμένη ακολουθία και $S = \limsup_{n\to\infty} a_n$, $I = \liminf_{n\to\infty} a_n$.*

1. *Υπάρχει υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τέτοια ωστε $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = S$.*
2. *Υπάρχει υποακολουθία $\{a_{r_k}\}$ τέτοια ωστε $\lim_{k\to\infty} a_{r_k} = I$.*

Απόδειξη: Θα κάνουμε την απόδειξη μόνο για το lim sup. Στην ουσία αυτό που ζητάμε είναι να δείξουμε ότι το S είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $\{a_n\}$. Σε αυτό μπορεί να μας βοηθήσει η Πρόταση 2.5.7. Ας επιλέξουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}^+$. Απο την Πρόταση 2.7.6 υπάρχουν άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^+$ τέτοια ώστε $S - \epsilon < a_n$ άρα τουλάχιστον ένα απο αυτά, ας το ονομάζουμε n_1, θα ικανοποιεί την συνθήκη $n_1 > N$. Απο την ίδια Πρόταση, υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}^+$, τέτοιο ωστε για κάθε $n > N_1$ να ισχύει $a_n < S + \epsilon$. Το N_1 αυτό εξαρτάται μόνο απο την επιλογή του ϵ, και παρατηρούμε οτι είτε το N που επιλέξαμε είναι $N > N_1$ είτε $N \leq N_1$. Σε κάθε περίπτωση μπορώ να βρώ κάποιο $n_2 > N$ για το οποίο ισχύει $a_n < S + \epsilon$ για κάθε $n > n_2$. Μπορώ λοιπόν να επιλέξω $M > N$ τέτοιο ώστε το a_M να ικανοποιεί και τις δυο αυτές ανισότητες άρα $|a_M - S| < \epsilon$. Συνεπώς, υπάρχει υποακολουθία $\{a_{n_k}\}$ η οποία συγκλίνει στο S. ■

Παράδειγμα 2.7.12. *Ας πάρουμε την ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = (-1)^n$ για την οποία δειξαμε ότι $S = 1$ και $I = -1$. Μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $0 < \epsilon < 1$*

- ▷ *$a_n > 1 - \epsilon$ για κάθε $n = 2m$ (άπειρα το πλήθος) ενώ $a_n < 1 + \epsilon$ για κάθε $n \geq 1$ ($N_1 = 1$).*
- ▷ *$a_n < -1 + \epsilon$ για κάθε $n = 2m - 1$ (άπειρα το πλήθος) ενώ $a_n > 1 - \epsilon$ για κάθε $n \geq 1$ ($N_2 = 1$).*

Εν γένει μπορεί να δειχθεί ότι:

Πρόταση 2.7.13. *Ας θεωρήσουμε τις φραγμένες ακολουθίες $\{a_n\}, \{b_n\}$. Ισχύει ότι*

1. $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n)$.
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty} (-a_n)$.
3. $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.
4. $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. *Αν μια απο τις δύο ακολουθίες συγκλίνει ισχύει η ισότητα.*
5. $\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$. *Αν μια απο τις δύο ακολουθίες συγκλίνει ισχύει η ισότητα.*
6. *Αν υπάρχει $N > 0$ τέτοιο ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε $n > N$ τότε*
$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n, \quad \text{και} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$
7. *Αν οι $\{a_n\}, \{b_n\}$ έχουν θετικούς όρους τότε*
$$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right)\left(\liminf_{n\to\infty} b_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right)$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την (4). Έστω $\{c_n\}$ η ακολουθία με $c_n = a_n + b_n$. Επίσης, έστω $s_n^{(a)} = \sup_{m\geq n} a_m$, $s_n^{(b)} = \sup_{m\geq n} b_m$, $s_n^{(c)} = \sup_{m\geq n} c_m$. Απο τον Ορισμό 2.7.2,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n^{(a)},$$
$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} s_n^{(b)},$$
$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} s_n^{(c)}.$$

Για $k \geq n$, έχουμε ότι $a_k \leq s_n^{(a)} = \sup_{m\geq n} a_m$ και $b_k \leq s_n^{(b)} = \sup_{m\geq n} b_m$, οπότε αθροίζοντας κατά μέλη,

$$c_k = a_k + b_k \leq s_n^{(a)} + s_n^{(b)}.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $k \geq n$ οπότε θα ισχύει και για το $\sup_{k\geq n} c_k = \sup_{m\geq n} c_m$, κατά συνέπεια

$$s_n^{(c)} \leq s_n^{(a)} + s_n^{(b)}, \ \forall n.$$

Η ανισότητα αυτή θα διατηρηθεί αν περάσουμε στο όριο $n \to \infty$, και έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Ας υποθέσουμε τώρα οτι μία απο τις δύο ακολουθίες συγκλίνει, έστω η $\{a_n\}$, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = L_a$ τότε $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L_a$ και η ανισότητα γίνεται

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq L_a + \limsup_{n\to\infty} b_n. \tag{2.14}$$

Απο την Πρόταση 2.7.11 υπάρχει υποακολουθία $\{b_{n_k}\}$ της $\{b_n\}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Εφόσον η $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L_a θα έχουμε ότι κάθε υποακολουθία της θα συγκλίνει επίσης στο L_a κατά συνέπεια

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n = L_a.$$

Κατά συνέπεια,

$$\lim_{k\to\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = L_a + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Απο τον ορισμό του lim sup για την ακολουθια $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$ (είναι ευκολότερο να το δείτε χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.7.1- θυμηθείτε επίσης ότι οι Ορισμοί 2.7.1 και 2.7.2 είναι ισοδύναμοι) έχουμε ότι

$$L_a + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n), \tag{2.15}$$

εφόσον το $L_a + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ σαν όριο της υποακολουθίας $\{c_{n_k}\}$ είναι στοιχείο του συνόλου $\mathcal{L}_c$, και το $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ είναι το sup του συνόλου αυτού.

Συνδυάζοντας τις (2.14) και (2.15) παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα 2.7.14. *Ας πάρουμε τις ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ με $a_n = (-1)^n$ και $b_n = 1 - (1)^n$. Επαληθεύστε τους ισχυρισμούς της Πρότασης 2.7.13 για την επιλογή αυτή.*

Η σωστή χρήση των εννοιών του lim sup και lim inf και των ιδιοτήτων τους μας επιτρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ορίου καθώς και να το ταυτοποιήσουμε.

Παράδειγμα 2.7.15. *Ας ορίσουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ με $b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. Θέλουμε να δείξουμε οτι η ακολουθία αυτή συγκλίνει και μάλιστα έχει το ίδιο όριο με την ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Στο σημείο αυτό θα βοηθούσε να ανατρέξετε στο Παράδειγμα 2.4.9.*

Ένας (απο τους πολλούς τρόπους) να γίνει αυτό είναι με την σύγκριση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των δυο ακολουθιών. Εφόσον ξερουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει και έχουμε ονομάσει το όριο της e, γνωρίζουμε απο τις ιδιότητες του ορίου οτι

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

Ας θυμηθούμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα, σύμφωνα με το οποίο

$$(1+a)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^n.$$

Θέτωντας $a = \frac{1}{n}$ *το δυωνυμικό ανάπτυγμα δίνει*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ας υπολογίσουμε κάθε ενα απο τους παραπάνω όρους χωριστά

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

(για $k = 1$ *ο όρος αυτός είναι ίσος με* 1*. Αντικαθιστώντας,*

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

και επειδή και κάθε k*, έχουμε ότι* $\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}$,

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = b_n, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+.$$

Η παραπάνω σχέση μας εξασφαλίζει ότι

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

και φυσικά

$$\liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Απο τις ιδιότητες της ακολουθίας $\{a_n\}$ *και τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι,*

$$e \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \ \ \textit{και} \ \ e \leq \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

απο τις οποίες καταλήγουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = e.$$

Κατά συνέπεια, η ακολουθία $\{b_n\}$ *έχει όριο το οποίο ταυτίζεται με το όριο της ακολουθίας* $\{a_n\}$*, το οποίο έχουμε ονομάσει* e*.*

Τέλος, μπορεί να χρειαστεί να μελετήσουμε την έννοια του άνω και κάτω ορίου για μη φραγμένες ακολουθίες.

Ορισμός 2.7.16. *Θα λέμε ότι για μία ακολουθία* $\{a_n\}$ *ισχύει*

1. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ *αν η ακολουθία αυτή δεν έχει άνω φράγμα.*

2. $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *αν η ακολουθία αυτή δεν έχει κάτω φράγμα.*

Παράδειγμα 2.7.17. *Η ακολουθία* $\{a_n\}$ *που ορίζεται ως*

$$a_n = \begin{cases} -n & n \text{ άρτιος} \\ 0 & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

έχει $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.8 Διπλές ακολουθίες

Ορισμός 2.8.1. *Μία ακολουθία με δύο δείκτες είναι μία απεικόνιση απο το $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. Για κάθε ζεύγος $(n, m) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ παίρνουμε ένα πραγματικό αριθμό που τον συμβολίζουμε με $a_{n,m}$. Μία διπλή ακολουθία μπορεί να συμβολίζεται σαν $\{a_{n,m}\}$.*

Η διπλή ακολουθία $\{a_{n,m}\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας άπειρος πίνακας

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 2.8.2 (Όριο διπλής ακολουθίας). *Θα λέμε ότι $\lim_{n,m\to\infty} s_{n,m} = L$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $|a_{n,m} - L| < \epsilon$ για $n, m > N$.*

Παράδειγμα 2.8.3. *Η διπλή ακολουθία $a_{n,m} = \frac{1}{n^2+m^2}$ συγκλίνει στο 0.*

Παράδειγμα 2.8.4. *Η διπλή ακολουθία $a_{n,m} = \frac{m^2}{n^2+m^2}$* **δεν** *συγκλίνει. Πράγματι αν πάρουμε $m = n$ το όριο θα είναι $1/2$ και αν πάρουμε π.χ. $m = 2n$ το όριο θα είναι $4/5$ (διαφορετικό). Δεν υπάρχει λοιπόν κάποιος αριθμός L έτσι ώστε να ικανοποιείται ο ορισμός 2.8.2.*

Ορισμός 2.8.5 (Επαναλαμβανόμενα όρια διπλής ακολουθίας). *Για μία διπλή ακολουθία $\{a_{n,m}\}$ μπορούμε να ορίσουμε τα επαναλαμβανόμενα όρια $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} a_{n,m})$, και $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$*

Τα επαναλαμβανόμενα όρια μιας διπλής ακολουθίας δεν είναι απαραίτητα ίσα.

Παράδειγμα 2.8.6. *Ας θεωρήσουμε την διπλή ακολουθία $a_{n,m} = \frac{n^2}{n^2+m^2}$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}\right) = \lim_{n\to\infty} (0) = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} a_{n,m}\right) = \lim_{m\to\infty} (1) = 1.$$

Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε σε ποιές περιπτώσεις τα επαναλαμβανόμενα όρια είναι ίσα.

Πρόταση 2.8.7. *Έστω ότι $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = L$. Το διπλό όριο ταυτίζεται με τα επαναλαμβανόμενα όρια*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} a_{n,m}\right) = L,$$

αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$ και $\lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ υπάρχουν για κάθε n και m αντιστοίχως.

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο την μια φορά. Εφόσον $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = L$ για κάθε $\epsilon > 0$ (άρα και για $\epsilon/2$) υπάρχει N τέτοιο ώστε $|a_{n,m} - L| < \frac{\epsilon}{2}$ για $n, m > N$. Απο την υπόθεση υπάρχει το όριο $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} =: L_n$ για κάθε n άρα υπάρχει κάποιο M (το οποίο εν γένει εξαρτάται απο το n) τέτοιο ώστε $|a_{n,m} - L_n| < \frac{\epsilon}{2}$ για $m > M$. Ας θεωρήσουμε τώρα $n > M$. Για $m > \max(N, M)$ μπορούμε να γράψουμε

$$|L_n - L| < |a_{n,m} - L_n| + |a_{n,m} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

άρα η ακολουθία $\lim_{n\to\infty} L_n = L$, συνεπώς $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) = L$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{n,m}) = L$. ■

Η Προταση 2.8.7 μας δίνει μια γενική συνθήκη η οποία μας εξασφαλίζει ότι είναι δυνατή η εναλλαγή της σειράς με την οποία λαμβάνονται δύο όρια.

2.9 Εφαρμογές

2.9.1 Το λήμμα του Cesaro

Ας πάρουμε μία ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ και ας ορίσουμε την νεα ακολουθία $E_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. Τότε, $\lim_{n\to\infty} E_n = L$.

Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται λήμμα του Cesaro και βρίσκει πολλές εφαρμογές στην στατιστική.

Για την αποδειξη ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $L = 0$ (η γενική περίπτωση μπορεί να μελετηθεί παίρνοντας την ακολουθία $\bar{a}_n = a_n - L$).
Εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη π.χ. απο το C. Επίσης, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει $\mid a_n \mid < \epsilon$. Βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mid E_n \mid &\leq \left|\frac{a_1 + \cdots + a_N}{n}\right| + \left|\frac{a_{N+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \\ &\leq \frac{N}{n}C + \frac{n-N-1}{n}\epsilon < 2\epsilon \end{aligned}$$

για αρκετά μεγάλο n. Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$.

Αν παρατηρήσουμε λίγο προσεκτικά, η ακολουθία E_n μας θυμίζει την εκτιμήτρια για την μέση τιμή. Φυσικά στην περίπτωση αυτή τα a_n είναι τυχαίες μεταβλητές. Μπορεί κανείς σχετικά εύκολα να γενικεύσει το λήμμα αυτό στην περίπτωση όπου a_n είναι τυχαίες μεταβλητές και η σύγκλιση ερμηνεύεται με κάποια πιθανοθεωρητική έννοια (σχεδόν βέβαια). Θεωρήματα τέτοιου τυπου ονομάζονται νομοι των μεγάλων αριθμών.

2.9.2 Προσεγγίσεις κατανομών

Παράδειγμα 2.9.1. Προσέγγιση της υπεργεωμετρικής κατανομής απο την διωνυμική
Σε κάποιο βασικό μάθημα της θεωρίας πιθανοτήτων θα έχετε συναντήσει την **διωνυμική** *και την* **υπεργεωμετρική κατανομή**.
Η διωνυμική κατανομή $Binomial(n,p)$ είναι η κατανομή

$$P_B(X=k) = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) p^k\,(1-p)^{n-k}$$

και δίνει την πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητα πειράματα, στο καθένα απο τα οποία η πιθανότητα επιτυχίας είναι p.
Η υπεργεωμετρική κατανομή $Hypergeometric(N,b,n)$ είναι η κατανομή

$$P_H(X=k) = \frac{\left(\begin{array}{c} b \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} N-b \\ N-k \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)}$$

Αν η διωνυμική κατανομή θεωρήσουμε ότι μοντελοποιεί επιτυχίες σε δειγματοληψία **με αντικατάσταση**, *η υπεργεωμετρική κατανομή μοντελοποιεί επιτυχίες σε δειγματοληψία* **χωρίς αντικατάσταση**.
Αν $p = \frac{b}{N}$ τότε στο όριο $N \to \infty$

$$P_H(X=k) \simeq P_B(X=k)$$

δηλαδή, η για n και p δεδομένα, η υπεργεωμετρική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί από την διωνυμική.

Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} P_H(X=k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) & \left\{\frac{Np}{N}\left(\frac{Np-1}{N-1}\right)\cdots\left(\frac{N\,p-k+1}{N-k+1}\right)\right\} \\ \times & \left\{\left(\frac{Nq}{N-k}\right)\left(\frac{N\,q-1}{N-k-1}\right)\cdots\left(\frac{N\,q-n+k+1}{N-n-1}\right)\right\} \end{aligned}$$

για $k \leq N\,p$, $n-k \leq N, q$ όπου $q = 1-p$.
Αν πάρουμε το όριο καθώς $N \to \infty$ όλα τα κλάσματα στην πρώτη αγκύλη τείνουν στο p, και επειδή είναι k το πλήθος απο την άλγεβρα των ορίων η πρώτη αγκύλη τείνει στο p^k, ενώ όλα τα κλάσματα στην δεύτερη αγκύλη τείνουν στο q και επειδή είναι $n-k$ το πλήθος, πάλι απο την άλγεβρα των ορίων, η δεύτερη αγκύλη τείνει στο $q^{n-k} = (1-p)^{n-k}$. Συνεπώς

$$\lim_{N\to\infty} P_H(X=k) = P_B(X=k)$$

Παράδειγμα 2.9.2. Προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής απο την Poisson
Κάνοντας χρήση της άλγϵβρας των ορίων και του ορισμού του ϵκθϵτικού σαν όριο μπορούμϵ να δϵίξουμϵ ότι η διωνυμική κατανομή μπορϵί να προσϵγγιστϵί απο την κατανόμή Poisson.

Για να το δούμϵ αυτό αρκϵί να θέσουμϵ $\lambda = p\,n$ *και γράψουμϵ την διωνυμική κατανομή ως*

$$P_B(X=k) = \left\{\frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\right\}\frac{k!}{\lambda}^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Αν θϵωρήσουμϵ ότι όταν $n \to \infty$ *το* p *αλλάζϵι έτσι ώστϵ το* λ *να παραμένϵι σταθϵρό, βλέπουμϵ ότι ϵφόσον*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

μϵ την χρήση της άλγϵβρας των ορίων έχουμϵ ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

που ϵίναι η κατανομή Poisson.

2.10 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

Τα πιο σημαντικά σημεία του κεφαλαίου είναι τα ακολουθα:

- Η έννοιες της ακολουθίας, της υπακολουθίας και του ορίου.
- Να γνωρίζουμε ότι μια μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
- Να γνωρίζουμε ότι μια φραγμένη ακολουθία δεν είναι απαραίτητα συγκλίνουσα αλλά μόνο κατ΄ υπακολουθία (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass).
- Η έννοια της ακολουθίας Cauchy και η σχέση τους με την σύγκλιση πραγματικών ακολουθιών: Κάθε πραγματική ακολουθία που είναι Cauchy είναι και συγκλίνουσα.
- Οι έννοιες του άνω και κάτω ορίου ακολουθίων ($limsup$ και $liminf$) και πως σχετίζονται με την έννοια του ορίου.
- Οι διπλές ακολουθίες και η εναλλαγή των ορίων.

Κεφάλαιο 3

Σειρές και εφαρμογές τους

3.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε ορισμένες βασικές έννοιες απο τις σειρές οι οποίες αποτελούν μία βασική εισαγωγή στις πιο προχωρημένες έννοιες της πραγματικής ανάλυσης. Οι έννοιες αυτές έχουν αρκετό ενδιαφέρον και απο μόνες τους εφόσον βρισκουν σημαντικές εφαρμογές στις πιθανότητες και στην στατιστική, όπως θα δούμε με λεπτομέρεια σε μία σειρά παραδειγμάτων που θα ακολουθήσουν. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις σειρές μπορεί κανείς να συμβουλευθεί πχ. τους Johnsonbaugh and Pfaffenberger (1981) κλπ. Σχετικά με τις διπλές σειρές μπορεί κανείς να συμβουλευθεί π.χ. τον Bremaud (1999).

3.2 Σειρές

Ορισμός 3.2.1. *Έστω μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$. Ας θεωρήσουμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$. Η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ που παράγεται απο τα μερικά αθροίσματα ονομάζεται* **σειρά**. *Θα χρησιμοποιούμε και τον εναλλακτικό συμβολισμό $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ για την σειρά αυτή.*

Ορισμός 3.2.2. *Αν υπάρχει πεπερασμένος πραγματικός αριθμός S τέτοιος ώστε $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ τότε λέμε ότι η σειρά* **συγκλίνει** *στον S και γράφουμε $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = S$. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι η σειρά* **αποκλίνει**.

Ορισμός 3.2.3. *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μία σειρά. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* **συγκλίνει απολύτως**.

Πρόταση 3.2.4. *Αν μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Σχόλιο 3.2.5. *Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Υπάρχουν σειρές που συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως. Τέτοιες σειρές ονομάζονται* **υπο συνθήκη συγκλίνουσες**. *Χαρακτηριστικό παράδειγμα υπο συνθήκη συγκλίνουσας σειράς είναι η $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \ln(2)$*

3.3 Γεωμετρικές σειρές

Ορισμός 3.3.1. *Ας πάρουμε την ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = r^{n-1}$ για κάποιο $r \in\mathbb{R}$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{m=1}^{n} r^m$. Η σειρά $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται* **γεωμετρική σειρά**. *Πολλές φορές, θα συναντήσουμε την γεωμετρική σειρά και στην μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n$.*

Οπως θα δούμε και παρακάτω, η γεωμετρική σειρά έχει πολύ σημαντικές εφαρμογές.

Παράδειγμα 3.3.2. *Ας θεωρήσουμε έναν επενδυτή ο οποίος έχει την χρονική στιγμή 0 τοποθετήσει το ποσό a σε μία επένδυση η οποία του προσφέρει απόδοση ίση με r. Υποθέτουμε ότι κάθε χρονική στιγμή, ο επενδυτής επανατοποθετεί το ποσό το οποίο πήρε απο τόκους (και μόνο αυτό) στην επένδυση. Εκφράστε, με μορφη γεωμετρικής σειράς τα συνολικά του κέρδη στο τέλος της n-οστής περιόδου.*

▷ *Στο τέλος της περιόδου 1 ο επενδυτής θα έχει κερδίσει απο τόκους το ποσό $s_1 = ar$.*

- ▷ *Επανατοποθετεί το ποσό αυτο στην επένδυση και την χρονική στιγμή 2 θα κερδίσει απο τόκους το ποσό ar^2 το οποίο και θα επανατοποθετήσει στην επένδυση. Το συνολικό του κέρδος την χρονική στιγμή $n = 2$ θα είναι ίσο προς $s_2 = ar + ar^2$.*
- ▷ *Το ποσό ar^2 το οποίο τοποθέτησε στην επένδυση θα του δώσει κέρδος την χρονική στιγμή 3 το ποσό ar^3, το οποίο θα επανατοποθετήσει στην τράπεζα. Το συνολικό του κέρδος την χρονική στιγμή $n = 3$ θα είναι $s_3 = ar + ar^2 + ar^3$.*
- ▷ *Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό βλέπουμε ότι το συνολικό κέρδος την χρονική στιγμή n δίνεται απο την γεωμετρική σειρά $s_n = \sum_{m=1}^{n} ar^m$.*

Μπορούμε να μελετήσουμε τα κριτήρια σύγκλισης της γεωμετρικής σειράς.

Πρόταση 3.3.3. *Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n$,*

1. *Συγκλίνει στο $a\,\frac{1}{1-r}$ αν $\mid r \mid < 1$.*
2. *Αποκλίνει αν $\mid r \mid \geq 1$.*

Απόδειξη: Με την μέθοδο της επαγωγής μπορούμε να δείξουμε ότι

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} a\, r^m = a + a\, r + \cdots + a\, r^n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

Θα πάρουμε τώρα το όριο της ακολουθίας $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- ▷ Αν $\mid r \mid < 1$ τότε $r^n \to 0$ και απο την άλγεβρα των ορίων βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a\,\frac{1}{1-r}.$$

  Συνεπώς, η γεωμετρική σειρά συγκλίνει στο $a\,\frac{1}{1-r}$ για $\mid r \mid < 1$.
- ▷ Αν $\mid r \mid \geq 1$ τότε η ακολουθία s_n αποκλίνει, άρα και η γεωμετρική σειρά αποκλίνει.

■

3.4 Κριτήρια σύγκλισης

Ένα πολύ σημαντικό ερώτημα για μία σειρά είναι το κατά πόσο αυτή συγκλίνει ή όχι.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό κριτήριο σύγκλισης.

Πρόταση 3.4.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποιο όριο S. Αυτό σημαίνει ότι όταν πάρουμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_n$ θα έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Παρατηρείστε ότι $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$. Ας πάρουμε λοιπόν την ακολουθία s_n και την ακολουθία $\bar{s}_n$ η οποία ορίζεται ως $\bar{s}_n = s_{n+1}$. Είναι προφανές, ότι αν $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ τότε και

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = S$$

Επειδή η ακολουθία a_n μπορεί να γραφεί σαν την διαφορά των $\bar{s}_n$ και s_n, $a_{n+1} = \bar{s}_n - s_n$, απο την άλγεβρα των ορίων (βλ. Πρόταση 2.3.7) καταλήγουμε στο ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$. ■

Η πρόταση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα **αρνητικό κριτήριο** σύγκλισης, και μας βοηθάει να αποφανθούμε για το αν μία σειρά **δεν** συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.4.2. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3}$ δεν συγκλίνει εφόσον $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = 1 \neq 0$.*

Όμως, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί γιατί αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Παράδειγμα 3.4.3. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **δεν** *συγκλίνει* **παρότι** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Για να συγκλίνει μία σειρά θα πρέπει το άθροισμα όλων των όρων της απο κάποιον όρο και πάνω να μπορεί να γινει οσοδήποτε μικρό θέλουμε. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο κριτήριο,

Πρόταση 3.4.4. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}^+$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \geq N$ *και για κάθε* $k \geq 1$ *ισχύει ότι* $\sum_{j=1}^{k} \mid a_{n+j} \mid < \epsilon$.

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί το κριτήριο του Cauchy για τα την ακολουθία των μερικών αθροίσματων και αφήνεται σαν άσκηση. ■

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο σχετικά με το αν μία σειρά συγκλίνει ή όχι, θα είναι η σύγκριση της με μία άλλη σειρά για την οποία γνωρίζουμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει.

Πρόταση 3.4.5. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *δύο σειρές για τις οποίες ισχύει ότι*

$$\mid a_n \mid < \mid b_n \mid, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει απόλυτα και η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει τότε αποκλίνει και η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Απόδειξη: Εφόσον $|a_n| \leq |b_n|$ για κάθε n, μπορούμε αθροίζοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές να πάρουμε ότι

$$s_n := \mid a_1 \mid + \cdots + \mid a_n \mid \leq \mid b_1 \mid + \cdots \mid b_n \mid =: \bar{s}_n$$

και είναι προφανές ότι η ακολουθία $\{\bar{s}_n\}$ εξ ορισμού είναι αύξουσα ακολουθία, δηλαδή $\bar{s}_n \leq \bar{s}_{n+1}$. Η ακολουθία $\{\bar{s}_n\}$ όμως είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων για την ακολουθία $\{|b_n|\}$ και επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως, το όριο $\lim_{n\to\infty} s_n$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο άρα η ακολουθία $\{\bar{s}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$s_n = \mid a_1 \mid + \cdots + \mid a_n \mid \leq \mid b_1 \mid + \cdots \mid b_n \mid \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mid b_n \mid =: \bar{S} < \infty \tag{3.1}$$

η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι φραγμένη. Όμοια όπως και παραπάνω βλέπουμε ότι η $\{s_n\}$ είναι αύξουσα, οπότε ως αύξουσα και φραγμένη θα έχει όριο έστω το S. Όμως, η ακολουθία $\{s_n\}$ δεν είναι τίποτε άλλο απο την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας $\{\mid a_n \mid\}$. Συνεπώς, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως στο S.

Ο δεύτερος ισχυρισμός αφήνεται σαν άσκηση. ■

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει ορισμένα χρήσιμα κριτήρια σχετικά με το αν μία σειρά συγκλίνει ή όχι.

Θεώρημα 3.4.6. *Ας θεωρήσουμε την σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. *Ας θεωρήσουμε το όριο*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

   - ▷ *Αν* $R < 1$ *τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα.*
   - ▷ *Αν* $R > 1$ *η σειρά αποκλίνει.*
   - ▷ *Αν* $R = 1$ *δεν μπορούμε να αποφανθούμε.*

2. *Ας θεωρήσουμε το όριο*

$$r = \limsup_{n\to\infty} \mid a_n \mid^{\frac{1}{n}}$$

- ▷ *Αν $r < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα.*
- ▷ *Αν $r > 1$ η σειρά αποκλίνει.*
- ▷ *Αν $r = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.*

3. *Αν η $\{a_n\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: 1. Ας ορίσουμε την ακολουθία

$$R_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, η ακολουθία R_n έχει όριο $R < 1$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $n > N$, $| R_n - R | < \epsilon$. Αν επιλέξουμε λοιπόν το ϵ με κατάλληλο τρόπο, μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο $0 < M < 1$ τέτοιο ώστε να υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $n > N$, $| R_n | < M$. Αυτό σημαίνει ότι για $n > N$ θα έχουμε $| a_{n+1} | < M | a_n |$.
Με την χρήση της επαγωγής μπορούμε να δείξουμε ότι

$$| a_{m+N} | \leq M^m | a_N |, \; m = 1, 2, \cdots \tag{3.2}$$

Ας δούμε τώρα τα μερικά αθροίσματα για την σειρά. Έχουμε ότι

$$s_n = \sum_{\ell=1}^{n} | a_\ell | = \sum_{\ell=1}^{N} | a_\ell | + \sum_{\ell=N+1}^{n} | a_\ell |, \; n > N$$

όπου χωρίσαμε το άθροισμα στο μέρος που αποτελείται απο τους N πρώτους όρους και στο μέρος που αποτελείται απο τους υπόλοιπους όρους απο τον $N+1$ μέχρι τον n.
Το πρώτο αυτό μέρος είναι πεπερασμένο και μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\sum_{\ell=1}^{N} | a_\ell | \leq N \max_{i=1,\cdots,N} (| a_i |) =: C < \infty$$

Το δεύτερο μέρος το ξαναγράφουμε με την μορφή

$$\sum_{\ell=N+1}^{n} | a_\ell | = \sum_{m=1}^{n-N} | a_{m+N} | \leq \sum_{m=1}^{n-N} M^m \; | a_N | = | a_N | \sum_{m=1}^{n-N} M^m = | a_N | \; M \sum_{m=0}^{n-N-1} M^m$$

όπου αρχικά ξαναορίσαμε τον δείκτη της άθροισης έτσι ώστε να γράψουμε τους όρους στην μορφή a_{m+N} και μετά χρησιμοποιήσαμε την σχέση (3.2) για να δείξουμε ότι το δεύτερο κομμάτι φράσσεται απο τα μερικά αθροισματα για την γεωμετρική σειρά. Εφόσον $| M | < 1$ η γεωμετρική σειρά συγκλίνει απόλυτα οπότε και η σειρά που μας ενδιαφέρει θα συγκλίνει απόλυτα σύμφωνα με την Πρόταση 3.4.5.
Το ότι η σειρά αποκλίνει αν $R > 1$, μπορεί να δειχθεί με παρόμοιο τρόπο και πάλι χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4.5.
2. Για την απόδειξη του κριτηρίου αυτού θα πρέπει να εργαστούμε με παρόμοιο τρόπο και να δείξουμε ότι η συνθήκη που θέτουμε εξασφαλίζει ότι υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για $n > N$ να έχουμε ότι $| a_n | < M^n$ για κάποιο $M < 1$. Μετά απο αυτό προχωρούμε όπως και παραπάνω, χρησιμοποιώντας την σύγκριση με την γεωμετρική σειρά.
3. Παραλείπεται. ■

Σχόλιο 3.4.7. *Το κριτήριο της ρίζας είναι γενικότερο απο το κριτήριο του λόγου.*

Παράδειγμα 3.4.8. *Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει χρησιμοποιώντας τα κριτήρια του λόγου και της ρίζας. Δίνεται ως δεδομένο ότι $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$.*

Για την σειρά αυτή έχουμε ότι $a_n = \frac{1}{n!}$. Παρατηρούμε ότι

- ▷ $R_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1}$ *οπότε* $R = \lim_{\to\infty} R_n = 0 < 1$. *'ρα η σειρά συγκλίνει.*
- ▷ $r_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} = (n!)^{-\frac{1}{n}}$ *οπότε* $r = \lim_{\to\infty} r_n = 0 < 1$. *'ρα η σειρά συγκλίνει.*

Παράδειγμα 3.4.9. *Έστω ότι $s > 0$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $s > 1$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο (3) του Θεωρήματος . Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ παράγεται απο την ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \frac{1}{n^s}$ η οποία είναι μη αρνητική και φθίνουσα για $s > 0$. Παρατηρούμε ότι $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^{ns}} = 2^{(1-s)n}$, συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-s)n}$$

είναι μία γεωμετρική σειρά, η οποία όπως γνωρίζουμε συγκλίνει αν και μόνον εάν $2^{1-s} < 1$, δηλαδή αν και μόνο εάν $s > 1$. Παρατηρείστε ότι εδώ χρειάστηκε να κάνουμε χρήση και της Πρότασης 3.4.5.

3.5 Αναδιάταξη σειρών

Είναι πολύ χρήσιμο να μπορούμε να γνωρίζουμε κατά πόσο μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των όρων σε μια σειρά και κατ΄ επέκταση κατά πόσο μπορούμε να εκτελούμε αλγεβρικές πράξεις π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό με σειρές. Παρότι τα πεπερασμένα αθροίσματα δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα με τις πράξεις αυτές, θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν τις εκτελούμε με αθροίσματα που περιέχουν άπειρους το πλήθος όρους (σειρές). Αυτό που είναι ανησυχητικό είναι ότι η σύγκλιση και μόνο μιας σειράς δεν μας επιτρέπει απαραίτητα να μπορέσουμε να κάνουμε αυτές τις πράξεις! Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει τι μπορεί να πάει λάθος.

Παράδειγμα 3.5.1. *Ας πάρουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Η σειρά αυτή συγκλίνει[1] στον αριθμό $S \neq 0$ (αλλά δεν είναι απόλυτα συγκλίνουσα).*

Έχουμε λοιπόν ότι

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \cdots \tag{3.3}$$

Αν διαιρέσουμε με 2 έχουμε ότι

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \cdots$$

και προσθέτοντας το 0 πριν απο κάθε όρο έχουμε ότι

$$\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} \cdots \tag{3.4}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{3S}{2} &= 1 + 0 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + 0 \underbrace{- \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + 0 \\ &\quad \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \frac{1}{7} + 0 \underbrace{- \frac{1}{8} - \frac{1}{8}} + \frac{1}{9} + 0 \underbrace{- \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} - \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots \end{aligned}$$

όπου απλοποιήσαμε τους όρους που είναι υπογραμμισμένοι. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι μία αναδιάταξη της αρχικής σειράς. Τότε όμως θα έπρεπε να ισχύει $\frac{3S}{2} = S$ το οποίο είναι αδύνατο εφοσον $S \neq 0$.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον, αφού μας δείχνει ότι αν μία σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα, οποιαδήποτε **αναδιάταξη** της θα μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα. Η αναδιάταξη της σειράς, είναι μία σειρά που έχει τους ίδιους όρους με την αρχική αλλά αθροισμένους με διαφορετική σειρά.

Ορισμός 3.5.2 (Αναδιάταξη σειράς)**.** *Έστω μια ακολουθία $\{a_n\}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Έστω επίσης μια οποιαδήποτε $1-1$ απεικόνιση $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ ονομάζεται* **αναδιάταξη** *της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

[1] Γνωρίζουμε ότι $S = \ln(2)$ αλλά η ακριβής τιμή δεν μας ενδιαφέρει για το παράδειγμα αυτό.

Θεώρημα 3.5.3. *Ας θεωρήσουμε μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ η οποία είναι απολύτως συγκλίνουσα, και μία οποιαδήποτε αναδιάταξη της, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = a_{f(n)}$ για κάποια $1-1$ απεικονιση $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι και αυτή απολύτως συγκλινουσα, και*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Απόδειξη: Το ότι οποιαδήποτε αναδιάταξη είναι απολύτως συγκλίνουσα σειρά είναι απλό. Ας δείξουμε μόνο ότι το απότέλεσμα που θα πάρουμε είναι ανεξάρτητο της σειράς με την οποία γίνονται οι αθροίσεις των όρων.

Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Θα δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

Ας ονομάσουμε $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$, $\bar{s}_n = \sum_{m=1}^{n} b_m$ τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ συγκλίνει απόλυτα, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε $\mid s_N - S \mid \leq \frac{\epsilon}{2}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \mid a_{N+k} \mid < \frac{\epsilon}{2}$.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε την διαφορά $\bar{s}_n - S$. Απο την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\mid \bar{s}_n - S \mid \leq \mid \bar{s}_n - s_N \mid + \mid s_N - S \mid \leq \mid \bar{s}_n - s_N \mid + \frac{\epsilon}{2}$$

Ο όρος $\mid \bar{s}_n - s_N \mid$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \mid \bar{s}_n - s_N \mid &= \mid b_1 + \cdots b_n - (a_1 + \cdots + a_N) \mid \\ &= \mid a_{f(1)} + \cdots a_{f(n)} - (a_1 + \cdots + a_N) \mid \end{aligned} \tag{3.5}$$

Θυμηθείτε ότι η απεικόνιση f είναι $1-1$. Για κάθε $k = 1, \cdots, N$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_k τέτοιος ώστε $f(n_k) = k$. Επιλέγουμε ως $M = \max\{n_1, \cdots, n_N\}$. Αν $n < M$ τότε $f(n) \leq N$. Αν $n > M$ τότε $f(n) > N$. Αυτό σημαίνει ότι στην δεύτερη περίπτωση οι όροι $a_{f(1)}, \cdots, a_{f(n)}$ περιέχουν όλους τους όρους $a_1, \cdots, a_N$ και κάποιους παραπάνω[2]. Συνεπώς στην περίπτωση αυτή οι όροι $a_1, \cdots, a_N$ απλοποιούνται και περισσεύουν απλώς κάποιοι όροι $a_{f(\ell)}$ για ορισμένα ℓ αλλά ισχύει πάντοτε οτι $f(\ell) > N$. Ότι και αν μείνει λοιπόν είναι σίγουρα μικρότερο απο το αθροισμα των απολύτων τιμών όλων των όρων απο το a_{N+1} και μετά, δηλαδή

$$\mid \bar{s}_n - s_N \mid \leq \mid a_{N+1} \mid + \mid a_{N+2} \mid + \cdots \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Συνεπώς, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κάποιο M έτσι ώστε για $n > M$ να έχουμε ότι $\mid \bar{s}_n - S \mid \leq \epsilon$, άρα $\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = S$ οπότε $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = S$. ∎

Σχόλιο 3.5.4. *Αν μια σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα, τότε οι αναδιατάξεις της μπορεί να δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Μάλιστα σύμφωνα με το θεώρημα αναδιάταξης του Riemann μια σειρά που συγκλίνει υπο συνθήκη (δηλαδή συγκλίνει αλλά όχι απόλυτα) μπορεί να αναδιαταχθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα της να είναι* **οποιοσδήποτε** *πραγματικός αριθμός!*

3.6 Διπλές σειρές

Οι διπλές σειρές έχουν αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον, τόσο απο θεωρητικής άποψης όσο και απο πλευράς εφαρμογών.

Ας θωρήσουμε την διπλή ακολουθία $\{a_{n,m}\}$. Απο μία διπλή ακολουθία μπορεί κανείς να ορίσει διάφορες σειρές.

- ▷ Μία κατηγορία τέτοιων σειρών είναι οι σειρές $S_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$, $n = 1, 2, \cdots$ (άθροισμα των στοιχείων της n γραμμής του πίνακα).
- ▷ Μία άλλη κατηγορία τέτοιων σειρών είναι οι σειρές $\bar{S}_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$, $m = 1, 2, \cdots$ (άθροισμα των στοιχείων της m στήλης του πίνακα).
- ▷ Τέλος μπορούμε να πάρουμε και τα διπλά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$ και $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$.

Σε πολλές εφαρμογές είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πότε τα αθροίσματα αυτά ορίζονται και πότε μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά των αθροίσεων.

[2] Ή σε γλώσσα συνόλων $\{a_1, \cdots, a_N\} \subset \{a_{f(1)}, \cdots, a_{f(n)}\}$.

Ορισμός 3.6.1 (Διπλές σειρές)**.** *Έστω η διπλή ακολουθία $\{a_{n,m}\}$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\{s_{n,m}\}$ όπου $s_{n,m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} a_{k,\ell}$. Αν το διπλό όριο $\lim_{n,m\to\infty} s_{n,m}$ υπάρχει (ανεξάρτητα απο την σειρά με την οποία παίρνουμε τα δύο όρια) και είναι ίσο προς S (πεπερασμένος πραγματικός αριθμός) τότε λέμε ότι η διπλή σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία $\{a_{n,m}\}$ συγκλίνει. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} = S$.*

Ορισμός 3.6.2 (Επαναλαμβανόμενες σειρές)**.** *Για μια διπλή ακολουθία μπορούμε να ορίσουμε τις επαναλαμβανόμενες σειρές*

1. $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right) := \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s_{n,m}\right)$
2. $S_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right) := \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s_{n,m}\right)$

εφόσον τα όρια αυτά υπάρχουν.

Το κατά πόσο οι επαναλαμβανόμενες σειρές S_1 και S_2 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα και κατά πόσο αυτό ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της διπλής σειράς S σχετίζεται με το αν είναι επιτρεπτή η εναλλαγή των ορίων για την διπλή ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_{n,m}\}$ και την ύπαρξη του διπλού ορίου (βλέπε Πρόταση 2.8.7).

Πρόταση 3.6.3. *Ας υποθέσουμε οτι*

1. *Η διπλή σειρά $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό S.*
2. *Για κάθε n η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ συγκλίνει.*
3. *Για κάθε m η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$ συγκλίνει.*

Τότε, οι επαναλαμβανόμενες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$ και $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$ συγκλίνουν, και μάλιστα στον ίδιο πραγματικό αριθμό S.

Απόδειξη: Εφαρμογή της Πρότασης 2.8.7 και των Ορισμών 3.6.1 και 3.6.2. ■

Επίσης ενδιαφέρον ερώτημα είναι το κατά πόσο η σειρά με την οποία γίνεται η άθροιση μπορεί να παίξει κάποιο ρόλο, δηλαδή το κατά πόσο η αναδιάταξη μιάς διπλής σειράς μεταβάλλει το αποτέλεσμα. Η έννοια της αναδιάταξης της διπλής σειράς μπορεί να οριστεί με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 3.6.4. *Μια* **αναδιάταξη** *της διπλής σειράς $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}$ είναι η διπλή σειρά $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{f_1(n),f_2(m)}$ όπου $f = (f_1, f_2) : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ είναι μια $1-1$ απεικόνιση.*

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει πότε μια διπλή σειρά είναι συγκλίνουσα.

Θεώρημα 3.6.5. *Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο $C < \infty$ τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} |a_{n,m}| < C, \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}^+ \tag{3.6}$$

τότε η διπλή σειρά συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{S}_m$$

καθώς και ότι οποιαδήποτε **αναδιάταξη** *της διπλής σειράς συγκλίνει.*

Απόδειξη: Η απόδειξη, που ουσιαστικά χρησιμοποιεί το κριτήριο του Cauchy για τα μερικά αθροίσματα παραλείπεται. ■

Πολλές φορές, θα χρειαστεί να εναλλάξουμε ένα όριο με ένα άπειρο άθροισμα. Αυτό πρέπει να γίνεται με πολύ προσοχή, γιατί δεν είναι πάντοτε δυνατό. Στις περιπτώσεις που μας επιτρέπεται να το κάνουμε όμως, είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη διαφόρων βασικών αποτελεσμάτων π.χ. στις πιθανότητες ή στη στατιστική.

Η παρακάτω πρόταση μας εξασφαλίζει τις προυποθέσεις κάτω απο τις οποίες αυτό είναι εφικτό.

Πρόταση 3.6.6. *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία διπλή ακολουθία $\{a_{ij}\}$ όλα τα στοιχεία της οποίας*

$$\{a_{1,j}, a_{2,j}, \cdots\}$$

έχουν το ίδιο πρόσημο για κάθε j, και ότι $\mid a_{n+1,j} \mid \geq \mid a_{n,j} \mid$ για κάθε n, j. Αν υπάρχει $C < \infty$ τέτοιο ώστε $\sum_{j=1}^{n} \mid a_{n,j} \mid \leq C$ για κάθε $n \geq 0$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,j}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί το Θεώρημα 3.6.5 σχετικά με την σύγκλιση των διπλών σειρών. Ας ορίσουμε την καινούργια διπλή ακολουθία

$$\begin{aligned} \bar{a}_{1,j} &:= a_{1,j}, \\ \bar{a}_{i,j} &:= a_{i,j} - a_{i-1,j} \end{aligned}$$

για κάθε i, j. Παρατηρούμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i,j} = a_{n,j}$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την έκφραση που μας ενδιαφέρει σαν το όριο μιας διπλής σειράς,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i,j}$$

Αυτό που ζητάμε να δείξουμε είναι ότι η παραπάνω έκφραση είναι ίση με την έκφραση

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i,j}$$

Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με την σύγκλιση της διπλής σειράς $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_{i,j}$, για την οποία αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Θεωρήματος 3.6.5.
Εφόσον τα $\{a_{1,j}, a_{2,j}, \cdots\}$ έχουν όλα το ίδιο πρόσημο το ίδιο θα ισχύει και για τα $\{\bar{a}_{1,j}, \bar{a}_{2,j}, \cdots\}$ οπότε

$$\sum_{i=1}^{n} \mid \bar{a}_{i,j} \mid = \mid a_{n,j} \mid$$

και προσθέτοντας τις ανισότητες αυτές κατά μέλη παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mid \bar{a}_{i,j} \mid = \sum_{j=1}^{n} \mid a_{i,j} \mid \leq C$$

από τις υποθέσεις μας. Με την άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.6.5 καταλήγουμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει, συνεπώς η πρόταση αποδειχθηκε. ■

Προτάσεις του τύπου αυτου προκύπτουν πολύ συχνά στις εφαρμογές. Για τον λόγο αυτό θα δώσουμε και μια ακόμη παραλλαγή του αποτελέσματος αυτού, που θα χρειαστούμε στο μέλλον.

Πρόταση 3.6.7. *Έστω $\{a_{n,k}\}$ μία διπλή ακολουθία πραγματικών αριθμών, για την οποια υπάρχει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{b_k\}$ έτσι ώστε να ισχύει $\mid a_{n,k} \mid \leq b_k$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$.*
Αν $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k$ για κάθε k τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Απόδειξη: Για να δείξουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα θα πρέπει να δειξουμε οτι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κάποιο N τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| < \epsilon$$

Την διαφορά αυτή μπορούμε να την εκτιμήσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N} a_{n,k} - \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{N+1}^{\infty} a_{n,k} - \sum_{N+1}^{\infty} a_k\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{N}(a_{n,k} - a_k)\right| + \left|\sum_{N+1}^{\infty} a_{n,k}\right| + \left|\sum_{N+1}^{\infty} a_k\right| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mid a_{n,k} - a_k \mid + \sum_{N+1}^{\infty} \mid a_{n,k} \mid + \sum_{N+1}^{\infty} \mid a_k \mid \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε τώρα το δεξιό μέρος της σχέσης (3.7).
Για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ εφόσον η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, μπορούμε να βρούμε κάποιο N_1 τέτοιο ώστε αν $\sum_{k=N_1+1}^{\infty} b_k < \frac{\epsilon}{3}$.
Εφοσον $\mid a_{n,k} \mid \leq b_k$ η ανισότητα αυτή θα μεταφέρεται και στο όριο οπότε $\mid a_k \mid \leq b_k$.
'ρα,

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \mid a_{n,k} \mid + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \mid a_k \mid \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\,\epsilon}{3}$$

Θυμηθείτε επίσης ότι $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k$ άρα υπάρχει κάποιο N_2 έτσι ώστε για $n \geq N_2$ να ισχύει οτι $\mid a_{n,k} - a_k \mid < \frac{\epsilon}{3(N+1)}$ για κάθε k, οπότε,

$$\sum_{k=1}^{N} \mid a_{n,k} - a_k \mid \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Αν επιλέξουμε $N > max(N_1, N_2)$, αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις στην (3.7) θα έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon$$

οπότε δείξαμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Σχόλιο 3.6.8. *Προτάσεις του παραπάνω τύπου θα ξανασυναντήσουμε όταν δούμε την έννοια του ολοκληρώματος κατά Lebesgue και εκεί θα δείξουμε ότι κάτω απο ορισμένες συνθήκες είναι δυνατόν να εναλλάξουμε την σειρά της ολοκλήρωσης και του ορίου. Τα αποτελέσματα αυτά οφείλονται στον Henri Lebesgue και ονομάζονται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ή το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης.*

3.7 Εφαρμογές

3.7.1 Δυναμοσειρές

Ορισμός 3.7.1. *Έστω $x, t \in \mathbb{R}$ και $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία[3] πραγματικών αριθμών. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-t)^n$ ονομάζεται* **δυναμοσειρά**.

Σχόλιο 3.7.2. *Ουσιαστικά μια δυναμοσειρά είναι μια συλλογή απο σειρές. Γιά κάθε επιλογή των $x, t \in \mathbb{R}$ παίρνουμε και απο μία σειρά. Θα επανέλθουμε σε αυτή την παρατήρηση όταν ασχοληθούμε με τις σειρές συναρτήσεων.*

Παράδειγμα 3.7.3. *Αν επιλέξουμε $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ με $a_n = \frac{1}{n!}$ και $t = 0$ τότε παίρνουμε την δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σύμβαση $0! = 1$. Η δυναμοσειρά αυτή είναι η εκθετική συνάρτηση e^x.

[3]Ειδικά για τις δυναμοσειρές και για να είμαστε σε συμφωνία με τον συνήθη συμβολισμό, θα ξεκινάμε την σειρά απο τον όρο με αύξοντα αριθμό 0.

Παράδειγμα 3.7.4. *Αν επιλέξουμε $\{a_n\}$ με $a_n = 1$ τότε παίρνουμε την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ η οποία συγκλίνει στην συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$.*

Οι δυναμοσειρές έχουν σημαντικές εφαρμογές σε πολλά θέματα. Μία πολύ σημαντική εφαρμογή σχετίζεται με τις σειρές Taylor οι οποίες επιτρέπουν την προσέγγιση οποιασδήποτε συνάρτησης ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες από μία δυναμοσειρά. Θα επανέλθουμε στον θέμα αυτό αργότερα, με περισσότερες λεπτομέρειες.

Παράδειγμα 3.7.5. *Υπολογίστε την e^2 κάνοντας χρήση της δυναμοσειράς του Παραδείγματος 3.7.3.*

Θέτουμε $x = 2$ στην δυναμοσειρά του Παραδείγματος 3.7.3. Θα δούμε τι προσέγγιση παίρνουμε για το $e^2 =$ κρατώντας διαφορετικούς όρους στην σειρά.
Οι δύο πρώτοι όροι δίνουν

$$1 + \frac{1}{1!}2 = 3$$

Οι τρείς πρώτοι όροι δίνουν

$$1 + \frac{1}{1!}2 + \frac{1}{2!}2^2 = 5$$

Οι τέσσερεις πρώτοι όροι δίνουν

$$1 + \frac{1}{1!}2 + \frac{1}{2!}2^2 + \frac{1}{3!}2^3 = 5 + \frac{8}{6} = 6.333$$

Συνεχίστε και συγκρίνετε με την τιμή του e^2.

Εφόσον μία δυναμοσειρά εξαρτάται και απο την πραγματική μεταβλητή x, είναι λογικό να περιμένουμε ότι θα υπάρουν ορισμένες επιλογές του x έτσι ώστε η σειρά αυτή να συγκλίνει και ορισμένες επιλογές του x έτσι ώστε η σειρά αυτή να αποκλίνει.

Ορισμός 3.7.6. *Έστω $\mathcal{R}$ ένας πραγματικος αριθμός, τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-t)^n$ να συγκλίνει αν $\mid x-t \mid < \mathcal{R}$ και να αποκλίνει αν $\mid x-t \mid \geq \mathcal{R}$. Ο πραγματικός αριθμός $\mathcal{R}$ ονομάζεται* **ακτίνα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς.*

Με την χρήση του Θεωρήματος 3.4.9 μπορούμε να δώσουμε και ένα κριτήριο για την σύγκλιση δυναμοσειρών.

Πρόταση 3.7.7. *Ας θεωρήσουμε την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-t)^n$. Υπάρχει πραγματικός αριθμός $\mathcal{R}$ (ακτίνα σύγκλισης) τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά αυτή να συγκλίνει απολύτως αν $\mid x-t \mid < \mathcal{R}$ και να αποκλίνει αν $\mid x-t \mid > \mathcal{R}$. Η ακτίνα σύγκλισης $\mathcal{R}$ της σειράς ορίζεται σαν*

- ▷ $\mathcal{R} = \lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_n}{a_{n+1}} \mid$ *αν το όριο αυτό υπάρχει (ή είναι άπειρο) ή*
- ▷ $\mathcal{R} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n}}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.4.9. ■

Παράδειγμα 3.7.8. *Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

η οποία αναπαριστά την εκθετική συνάρτηση.

Βλέπουμε ότι $a_n = \frac{1}{n!}x^n$, οπότε

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{x^n}{x^{n+1}} = \frac{n+1}{x} \;\to\; \infty$$

καθώς $n \to \infty$, για κάθε x. Συνεπώς, $\mathcal{R} = \infty$ και η σειρά συγκλίνει γιά κάθε x.

Παράδειγμα 3.7.9. *Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς,*

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

η οποία είναι η σειρά για την συνάρτηση $\arctan(x)$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να κάνετε χρήση του δευτέρου κριτηρίου. Δίνεται ότι $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

3.7.2 Υπολογισμός ροπών για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Παράδειγμα 3.7.10. *Εστω X τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Βρείτε την μέση τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής.*

Από την κατανομή Poisson γνωρίζουμε ότι

$$P(X=j)=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

Κατά συνέπεια η μέση τιμή θα δίνεται απο την σειρά

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{m=0}^{\infty} mP(X=m)=\sum_{m=0} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{\lambda}e^{-\lambda}=\lambda\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.7.11. *Μία αρκετά δημοφιλής διακριτή κατανομή πιθανοτήτων με πολλές εφαρμογές στις κοινωνικές επιστήμες είναι η κατανομή Pareto. Μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατάνομή αυτή, αν παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}^+$ και*

$$P(X=j)=c\,\frac{1}{j^{s+1}},\ \ j=1,2,\cdots$$

όπου c είναι μία σταθερά κανονικοποίησης και s ένας πραγματικός αριθμός.
Βρείτε για ποιές τιμές του s η παραπάνω σχέση μπορεί να μας δώσει μία κατανομή, και για ποιές τιμές του s ορίζονται ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης.
Υπόδειξη: *Γράψτε τις ποσότητες αυτές σαν σειρές και εφαρμόστε τα κριτήρια σύγκλισης.*

Παράδειγμα 3.7.12. *Ας υποθέσουμε ότι επαλαμβάνουμε ανεξάρτητα πειράματα που έχουν πιθανότητα επιτυχίας p. Αν συμβολίζουμε με X την τυχαία μεταβλητή που δίνει το αριθμό των πειραμάτων που χρειάζονται για να επιτύχουμε μία επιτυχημένη προσπάθεια, όπως γνωρίζουμε απο την θεωρία πιθανοτήτων ότι*

$$P(X=m)=(1-p)^{k-1}p,\ \ m=1,2,\cdots$$

Η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται απο την σειρά

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{m=1}^{\infty} mP(X=m)=\sum_{m=1}^{\infty} m\,p\,(1-p)^{m-1} \\ &= p\sum_{m=1}^{\infty} m(1-p)^{m-1}=p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}\end{aligned}$$

Για το υπολογισμό της σειρά αυτής, παραγωγίσαμε όρο προς όρο την σειρά $\sum_{m=0}^{\infty} p^m$ ως προς την παράμετρο p. Αυτό ισοδυναμεί με το να παραγωγίσουμε μία δυναμοσειρά ως προς το x όρο προς όρο και να υποθέσουμε οτι η παράγωγος της συνάρτησης που ορίζει η σειρά ως προς το x θα είναι ίση προς το αποτέλεσμα που πήραμε απο την παραγώγιση όρο προς όρο. Αυτό, αν και στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι αληθινό, **δεν** *ισχύει πάντοτε! Θα δούμε στο σύντομο μέλλον, συνθήκες που μας επιτρέπουν να κάνουμε αυτή την χρήσιμη ενέργεια.*

Παράδειγμα 3.7.13. *Ας θεωρήσουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $P(X=i)=p_i$, $i=1,2,\cdots$. Για την τυχαία αυτη μεταβλητή μπορούμε να ορίσουμε $\mathbb{E}[X]=\sum_{j=1}^{\infty} j\,p_j$ εφόσον η σειρά αυτή συγκλίνει. Δείξτε ότι*

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{j=1}^{\infty}P(X\geq j)$$

Η σχέση αυτη δίνει μία σχέση της ύπαρξης της μέσης τιμής με το πόσο γρήγορα πρέπει να φθίνει η ουρά της κατανομής.

Για να δειξουμε την σχέση αυτή αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{j=1}^{n} j\, p_j = p_1 + 2\,p_2 + \cdots + n\,p_n \\ &= (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + (p_2 + p_3 + \cdots + p_n) + \cdots + (p_{n-1} + p_n) + p_n \end{aligned}$$

και αν ορίσουμε την καινούργια ακολουθία $T_m = \sum_{j=m}^{n} p_j$, $T_n := p_n$ *έχουμε ότι*

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} T_m. \tag{3.8}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $T_m = P(X \geq m)$.
Παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ *στην σχέση (3.8) έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{m=1}^{\infty} P(X \geq m).$$

Στο παράδειγμα αυτό χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε και το Θεώρημα 3.5.3 σχετικά με τις αναδιατάξεις απόλυτα συγκλινουσών σειρών.

3.7.3 Εφαρμογές στην θεωρία αποφάσεων

Παράδειγμα 3.7.14. Το παράδοξο του St. Petersbourg
Το παράδειγμα αυτό πρωτοδιατυπώθηκε από τον Nicholas Bernoulli το 1728 και επιλύθηκε ανεξάρτητα από τον Gabriel Cramer και τον Daniel Bernoulli (εξάδερφο του Nicholas) γύρω στα 1738.
Ας υποθέσουμε ότι κάποιος σας προτείνει το ακόλουθο παιχνίδι: Ρίχνει κατα επανάληψη ένα τίμιο νόμισμα μέχρι το νόμισμα να φέρει κορώνα. Το παιχνίδι είναι τέτοιο ώστε ο συμπαίκτης σας θα σας πληρώσει 1 ευρώ αν έρθει κορώνα με την πρώτη ρίψη, 2 ευρώ αν έρθει κορώνα με την δεύτερη ρίψη, και εν γένει 2^{n-1} *ευρώ αν έρθει κορώνα με την* n *ρίψη. Ποιά είναι η αξία του στοιχήματος αυτού δηλαδή ποιό είναι το μεγαλύτερο ποσό που θα πληρώνατε ώστε να παίξετε το παιχνίδι.*

Το κέρδος απο το παιχνίδι είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X *που μπορεί να πάρει τις τιμές* $X_n = 2^{n-1}$ *με πιθανότητα* p_n, *όπου με* n *συμβολίζουμε τον αριθμό των ρίψεων του νομίσματος που χρειάζονται μέχρι να έρθει κορώνα. Η πιθανότητα* p_n *να έχουμε κέρδος* X_n *είναι* $p_n = \frac{1}{2^n}$ *(οι διαδοχικές ρίψεις θεωρούνται ανεξάρτητες). Θεωρούμε ότι το παιχνίδι συνεχίζεται επ΄ απείρον οπότε* $n = 1, \ldots$. *Αν προσπαθούσαμε να αξιολογήσουμε το παιχνίδι χρησιμοποιώντας σαν κριτήριο το αναμενόμενο κέρδος απο το παιχνίδι αυτό θα παίρναμε*

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

δηλαδή η αξία του παιχιδιού θα ήταν άπειρη (ή παρα πολύ μεγάλη αν αντί $n = \infty$ *παίρναμε* $n = N$ *όπου* N *πεπερασμένο αλλά μεγάλο). Προφανώς κάτι τέτοιο οδηγεί σε παράδοξο. Κανείς παίκτης δεν θα αξιολογούσε το παιχνίδι αυτό τόσο πολύ. Η λύση του παραδόξου βρίσκεται στο να καταλάβουμε ότι το αναμενόμενο κέρδος από το παιχνίδι δεν είναι απαραίτητα το πιο κατάλληλο μέγεθος για την αποτίμηση του παιχνιδιού. Αν διπλασιάσουμε το κέρδος* **δεν** *είναι απαραίτητο να διπλασιαστεί και η αξία που προσδίδει ο παίκτης στο κέρδος. Συνεπώς, θα μπορούσε κανείς να πεί ότι η αξία που προσδίδει στο κέρδος ο παίκτης ναι μεν αυξάνει όσο αυξάνεται το κέρδος αλλά ο ρυθμός αύξησης μειώνεται με την αύξηση του κέρδους (δηλαδή δεν έχουμε μια γραμμική συνάρτηση). Αυτό μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση ωφελιμοτητας για το (σίγουρο) κέρδος* X *π.χ. της μορφής* $u(X) = ln(X)$. *Κάτι τέτοιο είναι και 'ψυχολογικά' σωστό μια και κάποιος θα ενδιαφερθεί πολύ για μια αύξηση όταν έχει μικρό εισόδημα και λιγότερο αν έχει μεγάλο εισόδημα. Αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης θα αξιολογήσει το παιχνίδι κάνοντας χρήση της αναμενόμενης ωφελιμοτητας κάνοντας χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης ωφελιμότητας θα δούμε ότι τώρα η αξία του παιχνιδιού είναι πιο ρεαλιστική*

$$\mathbb{E}[U(X)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^{n-1}) = 0.6931 < \infty$$

3.7.4 Εναλλαγή ορίων

Παράδειγμα 3.7.15. *Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές* X_n, $n = 1, 2, \cdots$ *οι οποίες είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τις τιμές* x_k, $k = 1, 2, \cdots$ *με πιθανότητα* $p_{n,k}$,

$$P(X_n = x_k) = p_{n,k}$$

Θεωρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = p_k$, *για κάθε* $k = 1, 2, \cdots$.
Ας ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή X *η οποία είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές* x_k, *με πιθανότητα* p_k *για* $k = 1, 2, \cdots$.
Η μέση τιμή της X_n *ορίζεται σαν την σειρά*

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_{n,k}$$

Μπορούμε να πάρουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$. *Κάτω από ποιές συνθήκες μπορούμε να δείξουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_{n\to\infty} p_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$$

Αυτό είναι μία κλασσική περίπτωση εναλλαγής του ορίου με μία άπειρη άθροιση.
Μπορούμε π.χ. να εφαρμόσουμε την Προταση 3.6.6 με $a_{m,k} = x_k\, p_{n,k}$. *Αν υποθέσουμε ότι* $x_k \geq 0$ *για κάθε* k, *η συνθήκη μονοτονίας γίνεται* $p_{n+1,k} \geq p_{n,k}$. *Επίσης χρειαζόμαστε να ισχύει ότι* $\sum_{j=0}^{n} \mid a_{n,j} \mid < C$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^+$, *για κάποιο* $C < \infty$. *Η συνθήκη αυτή στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει μεταφράζεται στην*

$$\sum_{k=0}^{n} x_k\, p_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, p_{n,k} = \mathbb{E}[X_n]$$

το οποίο είναι πεπερασμένο εφόσον δεχθήκαμε ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές $\mathbb{E}[X_n]$ *για κάθε* n.
Μία άλλη περίπτωση είναι να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.6.7. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να δεχθούμε ότι υπάρχει μία ακολουθία b_k *τέτοια ώστε* $\mid a_{n,k} \mid \leq b_k$ *για κάθε* n, k *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$.

Παράδειγμα 3.7.16. *Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία διπλή ακολουθία* $p_{n,k}$ *τέτοια ώστε για κάθε* n, *το* $p_{n,k}$ *αντιστοιχεί σε μία διακριτή κατανομή πιθανοτήτων. Μπορούμε για κάθε* n *να ορίσουμε την ροπογενήτρια συνάρτηση* $\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, p_{n,k}$, *για* $t \in (0, 1)$.
Ας θεωρήσουμε ότι $\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = p_k$.
Τότε, το όριο $\psi(t) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t)$ *υπάρχει για κάθε* $t \in (0, 1)$ *και μάλιστα* $\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, p_k$.

Αυτό είναι μία απλή εφαρμογή της Πρότασης 3.6.7. Ας ορίσουμε $a_{n,k} = t^k\, p_{n,k}$. *Μπορούμε να δούμε ότι* $a_{n,k} \leq t^k =: b_k$ *για κάθε* t.
Τότε, $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} < \infty$, *για κάθε* $t \in (0, 1)$. *Συνεπώς απο την πρόταση αυτή και εφόσον* $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = t^k\, p_k$, *για κάθε* $k \geq 1$, *έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, p_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, p_k$$

ή ισοδύναμα

$$\psi(t) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, p_k.$$

3.7.5 Το γινόμενο Cauchy

Σαν ειδική εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.7.17. *Έστω δύο σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ *οι οποίες είναι απόλυτα συγκλίνουσες. Τότε η διπλή σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-j}\, \beta_j \right)$, *η οποία ονομάζεται άθροισμα του Cauchy , συγκλίνει και έχουμε ότι*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-j}\, \beta_j \right)$$

Απόδειξη: Για να το δούμε αυτό αρκεί να πάρουμε την διπλη ακολουθία $a_{n,m} = \alpha_n \, \beta_m$ που αντιστοιχεί στον άπειρο πίνακα,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \, \beta_1 & \alpha_1 \, \beta_2 & \alpha_2 \, \beta_2 & \cdots \\ \alpha_2 \, \beta_1 & \alpha_2 \, \beta_2 & \alpha_2 \, \beta_3 & \cdots \\ \alpha_3 \, \beta_1 & \alpha_3 \, \beta_2 & \alpha_3 \, \beta_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

τα στοιχεία της οποίας αν αναδιατάξουμε ως

$$a_{0,0} + (a_{1,0} + a_{0,1}) + (a_{2,0} + a_{1,1} + a_{0,2}) + \cdots$$

παίρνουμε τα αθροίσματα Cauchy .
Βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} \mid a_{n,m} \mid = \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} \mid a_n \mid \mid b_m \mid = \left(\sum_{n=0}^{k} \mid a_n \mid \right) \left(\sum_{m=0}^{k} \mid b_m \mid \right) \leq C_1 \, C_2$$

εφόσον οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είναι απολύτως συγκλίνουσες και κάθε ένα απο αυτά τα μερικά αθροίσματα ικανοποιεί ένα φράγμα. ∎

Το γινόμενο Cauchy είναι πολύ χρήσιμο για τον πολλαπλασιασμό π.χ. δυναμοσειρών.

Παράδειγμα 3.7.18. *Η εκθετικη συνάρτηση ορίζεται με την δυναμοσειρά*

$$e^x = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} x^n$$

Με την βοήθεια του γινομένου του Cauchy μπορούμε να ορίσουμε την δυναμοσειρά για το γινόμενο $e^x \, e^y$.
Με την χρήση του διωνυμικού τύπου σύμφωνα με τον οποίο

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} x^j \, y^{n-j}$$

μπορούμε να δειξουμε οτι $e^x \, e^y = e^{x+y}$.

3.8 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Η έννοια της σειράς, της σύγκλισης και της απόλυτης σύγκλισης.

- Ειδικές κατηγορίες σειρών, όπως π.χ. η γεωμετρική και οι δυναμοσειρές. Η γεωμετρική σειρά χρησιμοποιείται σαν βάση για τα περισσότερα κριτήρια σύγκλισης (π.χ. το κριτήριο του λόγου ή της ρίζας) ενώ οι δυναμοσειρές χρησιμοποιούνται σε μια ευρύτητα εφαρμογών π.χ. στις σειρές Taylor κλπ.

- Η σχέση της σύγκλισης των σειρών με την αναδιάταξη τους. Να είμαστε πολύ προσεκτικοί και να μην αναδιατάξουμε ποτέ τους όρους κάποιας σειράς αν αυτή δεν συγκλίνει αλλιώς μας επιφυλάσσονται εκπλήξεις!

- Κριτήρια σύγκλισης σειρών. Να γνωρίζουμε και να ξέρουμε να χρησιμοποιούμε τα βασικά κριτήρια σύγκλισης όπως π.χ. το κριτήριο του λόγου, το κριτήριο της ρίζας κλπ (Θεώρημα 3.4.9).

- Διπλες σειρες. Κριτήρια σύγκλισης και αναδιάταξης. Η αναδιάταξη των διπλών σειρών σχετίζεται με μια σειρά απο πολύ ενδιαφέρουσες εφαρμογές όπως π.χ. η εναλλαγή ορίων και απείρων αθροισμάτων (κάτι που μας χρειάζεται πάρα πολύ συχνά αλλά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί γιατί δεν συμβαίνει πάντοτε!)

- Δυστυχώς δεν θα ξεφύγετε απο τις σειρές (απλές και διπλές) τουλάχιστον για όσο καιρό ασχολείστε με τις πιθανότητες και την στατιστική. Αυτό μας το δείχνουν οι πολυάριθμες εφαρμογές τους στα επιστημονικά αυτά πεδία.

Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και συνέχεια

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία κατηγορία πραγματικών συναρτήσεων οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και παρουσιάζουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, τις συνεχείς συναρτησεις. Εκτός απο τις συνεχείς συναρτήσεις, θα δούμε και ορισμένες άλλες κατηγορίες συναρτήσεων, τις συναρτήσεις που είναι συνεχείς κατά Hölder και τις κυρτές συναρτήσεις. Συναρτήσεις τέτοιου τύπου παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην θεωρία πιθανότητων και την στατιστική. Τα θέματα που καλύπτονται στην ενότητα αυτή είναι κλασσικά. Για την παρουσίαση των ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων βασιστήκαμε στους Johnsonbaugh and Pfaffenberger (1981), Labarre (2008).

4.2 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Μία απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση αν έχει την ιδιότητα να απεικονίζει κάθε στοιχείο του X σε ένα και μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{R}$.*

Ορισμός 4.2.2 (Πεδιο ορισμού-Πεδίο τιμών). *Το σύνολο X ονομαζεται το πεδίου ορισμού της f, ενω το σύνολο $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in X\}$, ονομάζεται πεδίο τιμων της f.*

Ορισμός 4.2.3 (Γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις. Ο γραμμικός συνδυασμός των f, g οριζεται ως η συνάρτηση $\lambda_1 f + \lambda_2 f : X \to \mathbb{R}$, με $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*

Ορισμός 4.2.4 (Γινόμενο συναρτήσεων). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις. Το γινόμενο των f, g οριζεται ως η συνάρτηση $fg : X \to \mathbb{R}$ με $(fg)(x) = f(x)g(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός 4.2.5 (Λόγος ή πηλίκο συναρτήσεων). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις. Ο λόγος ή το πηλίκο των f, g ορίζεται ως η συνάρτηση $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in X$, για το οποίο ισχύει $g(x) \neq 0$.*

Ορισμός 4.2.6 (Σύνθεση συναρτήσεων). *Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g, ορίζεται ως η συνάρτηση $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός 4.2.7 (Αντίστροφη συνάρτηση). *Έστω $f : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Η αντίστροφη συνάρτηση της f, είναι η απεικόνιση $f^{-1} : Y \to X$, για την οποία ισχύει για κάθε $y \in Y$ ότι $f^{-1}(y) = x$ όπου το $x \in X$ είναι τέτοιο ώστε $f(x) = y$.*

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει οτι για να βρούμε την τιμή της αντίστροφης συναρτησης f^{-1} στο $y \in Y$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x. Η αντίστροφη απεικόνιση μιας συνάρτησης δεν είναι απαραίτητο να είναι συνάρτηση υπο την έννοια οτι δεν είναι απαραίτητο να είναι μονοσήμαντη.

Παράδειγμα 4.2.8. *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$, τότε $f^{-1}(y) = \ln(y)$.*

Ορισμός 4.2.9 (Μονότονες συναρτήσεις). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

1. *Η f ονομαζεται **αύξουσα** αν έχει την ιδιότητα $f(x_1) \geq f(x_2)$, για κάθε $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in X$. Αν η πρώτη ανισότητα ισχύει αυστηρά, τοτε η f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα**.*

2. *Η f ονομαζεται **φθίνουσα** αν έχει την ιδιότητα $f(x_1) \leq f(x_2)$, για κάθε $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in X$. Αν η πρώτη ανισότητα ισχύει αυστηρά, τοτε η f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα**.*

3. *Μια συνάρτηση ονομάζεται **μονότονη** αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.*

Παράδειγμα 4.2.10. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι φθίνουσα αν οριστεί $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ και αύξουσα αν οριστεί $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Αν οριστεί $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα και συνεπώς δεν είναι μονότονη.*

Παράδειγμα 4.2.11. *Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι συνάρτηση και μάλιστα με τον ίδιο τύπο μονοτονίας.*

4.3 Όρια συναρτήσεων

Η έννοια του ορίου είναι μια θεμελιώδης έννοια για την ανάλυση. Στην ουσία η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης μας εκφράζει την συμπεριφορά της συνάρτησης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x πλησιάζει κάποια συγκεκριμένη τιμή x_0. Ας θυμίσουμε την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης.

Ορισμός 4.3.1 (Όριο συνάρτησης). *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $| f(x) - L |< \epsilon$ αν $| x - x_0 |< \delta$, $x_0, x \in X$.*

Φυσικά ο ορισμός αυτός προϋποθέτει ότι για το x_0 που μας ενδιαφέρει μπορούμε να βρούμε x τα οποία είναι αρκετά κοντά σε αυτό. Αν αυτό μπορεί να γίνει λέμε ότι το x_0 είναι **σημείο συσσώρευσης** του X.

Ορισμός 4.3.2 (Σημείο συσσώρευσης). *Ένας πραγματικός αριθμός x_0 ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του $X \subset \mathbb{R}$, αν μπορεί να βρεθεί μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ (δηλαδή με την ιδιότητα $x_n \in X$ για κάθε n) τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.*

Τα σημεία συσσώρευσης ενός υποσυνολου X του $\mathbb{R}$ **δεν** είναι απαραίτητα στοιχεία του συνόλου αυτού.

Παράδειγμα 4.3.3. *Έστω $X = (0, 1]$. Κάθε σημείο $x_0 \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X. Για να το δείτε αυτό δεν έχετε παρά να κατασκευάσετε μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ η οποία να συγκλίνει στο x_0 (π.χ η $\{x_n\}$ με $x_n = x_0 - \frac{1}{2n}$). Όμως και το $x_0 = 0$ είναι επίσης σημείο συσσώρευσης του X (πάρετε ως παράδειγμα την ακολουθία $\{x_n\} \subset X$, με $x_n = \frac{1}{n}$) όμως $0 \notin X$. Προφανώς οι ακολουθίες που κατασκευάσαμε για να δείξουμε ότι τα x_0 είναι σημεία συσσώρευσης δεν είναι μοναδικες. Προσπαθείστε να βρείτε διαφορετικές επιλογές.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μπορεί να μας χαρακτηρίσει πολύ καλά την έννοια του ορίου συναρτήσεων κανοντας χρήση κατάλληλων ακολουθιών.

Πρόταση 4.3.4. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του X. Τότε, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ [1], έχουμε ότι $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Θα δείξουμε οτι $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει οπότε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$. Τότε, υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο x, $|x - x_0| < \delta$, έτσι ώστε να ισχύει $|f(x) - L| > \epsilon$. Αυτο ισχύει για κάθε $\delta > 0$, συνεπώς θα ισχύει και για δ της μορφής $\delta_n = \frac{1}{n}$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}^+$. Επιλέγουμε λοιπόν κάποιο $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, και σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει κάποιο x το οποίο εξαρτάται απο την επιλογή του $\delta = \delta_n$ και εντέλει απο την επιλογή του n, και το οποίο θα συμβολίσουμε x_n τέτοιο ώστε $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$, και $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Αυτό μπορούμε να το επαναλάβουμε για κάθε n και να μαζέψουμε σε ένα σύνολο όλα τα x_n τα οποία βρήκαμε, φτιάχνοντας με τον τρόπο αυτό μια ακολουθία $\{x_n\}$. Απο κατασκευής, η ακολουθία $\{x_n\}$ έχει την ιδιότητα $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, αλλά υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ωστε για κάθε n να ισχύει $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Το τελευταίο μας λέει ότι η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ **δεν** συγκλίνει στο L. Βρήκαμε λοιπόν μια ακολουθία $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ αλλά $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq L$, άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Κατά συνέπεια, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

[1] και $x_n \neq x_0$, για κάθε n

Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Θα δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, απο τον Ορισμό 4.3.1, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Επίσης, εφόσον η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x_0, υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε αν $n > N$ να έχουμε ότι $|x_n - x_0| < \delta$. Συνεπώς, για $n > N$ θα έχουμε $|f(x_n) - L| < \epsilon$ και απο αυτό βγαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. ∎

Η Πρόταση 4.3.4 είναι πολύ χρήσιμη αν χρειαστεί να δείξουμε ότι μια συνάρτηση **δεν** έχει έχει όριο σε κάποιο σημείο.

Παράδειγμα 4.3.5. *Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,\infty] \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Αν το όριο υπήρχε, τότε απο την Πρόταση 4.3.4, για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία συγκλίνει στο 0, η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ θα έχει το ίδιο όριο. Ας επιλέξουμε πρώτα την ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο 0. Η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ έχει γενικό όρο $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και είναι συνεπώς η σταθερή ακολουθία και $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Ας επιλέξουμε κατόπιν την ακολουθία $\{\bar{x}_n\}$ με γενικό όρο $\bar{x}_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$ η οποία έχει επίσης την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = 0$. Η ακολουθία $\{f(\bar{x}_n)\}$, έχει γενικό όρο $f(\bar{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και είναι συνεπώς η σταθερή ακολουθία, άρα $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = 0$. Βρήκαμε λοιπόν δύο ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 για τις οποίες η διαβεβάιωση της Πρότασης 4.3.4* **δεν** *ισχύει, κατά συνέπεια, το οριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.*

Επίσης, η Πρόταση 4.3.4 μπορεί να μας βοηθήσει να παράγουμε μια άλγεβρα των ορίων για τα όρια συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη άλγεβρα των ορίων για τις ακολουθίες.

Πρόταση 4.3.6 (Άλγεβρα των ορίων για συναρτήσεις). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσωρευσης του X, και $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ο γραμμικός συνδυασμός των f, g έχει όριο στο σημείο x_0,*
$$\lim_{x\to x_0} (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 \lim_{x\to x_0} f(x) + \lambda_2 \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2, \ \ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Το γινόμενο των f, g έχει όριο στο σημειο x_0,*
$$\lim_{x\to x_0} (f\,g)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = L_1 L_2.$$

3. *Αν επιπλέον $L_2 \neq 0$, τότε ο λόγος των f, g έχει όριο στο σημείο x_0,*
$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.4 και την Πρόταση 2.3.7 για την άλγεβρα των ορίων ακολουθίων. Αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Πρόταση 4.3.7 (Όριο σύνθετης συνάρτησης). *Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι x_0 σημείο συσσωρευσης του X και ότι υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το y_0 είναι σημείο συσσώρευσης του Y και υπάρχει το $lim_{y\to y_0} f(y) = L$. Τότε, το υπάρχει το όριο της $f \circ g$ στο x_0 και*
$$\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y) = L.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.4 και την Πρόταση 2.3.7 για την άλγεβρα των ορίων ακολουθίων. Αφήνεται σαν άσκηση. ∎

4.4 Συνεχείς συναρτήσεις

Μία συνάρτηση λέμε ότι είναι συνεχής αν μικρές αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή δεν επιφέρουν μεγάλες αλλαγές στην τιμή της συνάρτησης. Η συνέχεια μπορεί να οριστεί σαν μία τοπική ιδιότητα, δηλαδή σαν μία ιδιότητα η οποία ισχύει κοντά σε ένα σημείο x_0.

Ορισμός 4.4.1. *Έστω μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$, και $x_0 \in X$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί κάποιο δ τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε ότι είναι συνεχής στο X.*

Στον παραπάνω ορισμό το ϵ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, αρκεί το δ να γίνει αντιστοίχως αρκετά μικρό. Εν γένει το δ δεν είναι ανεξάρτητο απο την επιλογή του x_0 και του ϵ, δηλαδή $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$.

Η έννοια της συνέχειας συνδέεται πολύ άμεσα με την έννοια του ορίου σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι f συνεχής. Ας πάρουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Εφόσον η f είναι συνεχής, απο τον Ορισμό 4.4.1, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ αν $|x - x_0| < \delta$. Αφού $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, θα υπάρχει N τέτοιο ώστε $| x_n - x_0 | < \delta$ για $n > N$. Τότε όμως, απο την συνέχεια της f, θα ισχύει και $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ για $n > N$ συνεπώς $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι για **κάθε** ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ αλλά η f **δεν** είναι συνεχής στο x_0. Τότε, θα υπάρχει $\epsilon^* > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $|x - x_0| < \delta$ να συνεπάγεται ότι $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon^*$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ ας επιλέξουμε ως $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$. Εν γένει το x της παραπάνω φράσης θα εξαρτάται απο το n γι αυτό και θα το συμβολίσουμε με x_n. Έτσι λοιπόν έχουμε ότι θα υπάρχει $\epsilon^* > 0$ τέτοιο ώστε για $\delta_n = \frac{1}{n}$ να υπάρχει $x_n \in X$ έτσι ώστε $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ να συνεπάγεται ότι $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon^*$. Μπορούμε να σκεφτούμε τα x_n σαν όρους μίας ακολουθία πραγματικών αριθμών στο X, της $\{x_n\} \subset X$, η οποία απο κατασκευής είναι τέτοια ώστε $| x_n - x_0 | < \frac{1}{n}$, γεγονός το οποίο μας εξασφαλίζει ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Σύμφωνα με την υπόθεση μας θα πρέπει να ισχύει και $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ (άρα και για $\epsilon = \epsilon^*$) θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$, τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει ότι $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon^*$ το οποίο όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon^*$. ■

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν ορισμένες ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες τις οποίες κληρονομούν απο την άλγεβρα των ορίων.

Πρόταση 4.4.3 (Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων). *Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in X$ τότε*

1. *$\lambda_1 f + \lambda_2 g$ συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*
2. *fg συνεχής στο x_0*
3. *$\frac{f}{g}$ συνεχής στο x_0 αν $g(x_0) \neq 0$.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.4 και την Πρόταση 2.3.7 για την άλγεβρα των ορίων ακολουθίων. Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Τέλος και η σύνθεση μιας συνεχούς συνάρτησης με μία συνεχή συνάρτηση είναι και αυτή συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση 4.4.4 (Συνέχεια σύνθετης συναρτήσης). *Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X, $g(x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του Y, η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεση των συναρτήσεων αυτών, $f \circ g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.*

Απόδειξη: Εφόσον η g είναι συνεχής στο $x_0 \in X$, απο τον Ορισμό 4.4.1, για κάθε $\epsilon_1 > 0$ υπάρχει κάποιο δ_1 τέτοιο ώστε $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon_1$ για $|x - x_0| < \delta_1$. Επίσης εφόσον η f είναι συνεχής στο $g(x_0) \in Y$, απο τον Ορισμό 4.4.1, για κάθε $\epsilon_2 > 0$ υπάρχει κάποιο δ_2 τέτοιο ώστε $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon_2$ για $|x - g(x_0)| < \delta_2$. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε επιλέξει οποιαδήποτε $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ και έχουμε βρει τα αντίστοιχα $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παραπάνω, τα οποία και ξαναγράφουμε για ευκολία του αναγνώστη

$$\forall \epsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \text{τέτοιο ωστε} \ |g(x) - g(x_0| < \epsilon_1, \ \text{για} \ |x - x_0| < \delta_1, \tag{4.1}$$

$$\forall \epsilon_2 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \text{τέτοιο ωστε} \ |f(g(x)) - f(g(x_0)| < \epsilon_2, \ \text{για} \ |g(x) - g(x_0)| < \delta_2. \tag{4.2}$$

Έστω τώρα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $\epsilon_2^* = \epsilon$ στην (4.2) οπότε υπάρχει $\delta_2^* > 0$ τέτοιο ώστε αν επιλέξουμε $|g(x) - g(x_0)| < \delta_2^*$ τότε $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon_2^* = \epsilon$, δηλαδή η $f \circ g$ έχει μικρές μεταβολές για μικρές μεταβολές του $g(x)$ κοντά στην $g(x_0)$. Αυτό δεν είναι επαρκές για τον σκοπό μας, εφόσον εμάς μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν μικρές μεταβολές στο x οδηγούν σε μικρές μεταβολές στην τιμή της $f \circ g$. Στη σημείο αυτό θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την συνέχεια της g. Σύμφωνα με την (4.1), για οποιοδήποτε ϵ_1 άρα και για $\epsilon_1^* = \delta_2^*$, υπάρχει $\delta_1^* > 0$ τέτοιο ώστε $|g(x) - g(x_0| < \epsilon_1^* = \delta_2^*$ για $|x - x_0| < \delta_1^*$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta_1^* > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(g(x)) - f(g(x_0)| < \epsilon$ αν $|x - x_0| < \delta$. 'ρα η σύνθεση είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0. ■

4.5 Το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

Το ακόλουθο θεώρημα το οποίο οφείλεται, στην μορφή που παρουσιάζεται εδώ, στον Bolzano δίνει μία πολύ σημαντικη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων. Η ιδιότητα αυτή λέει ότι μία συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ θα παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος $(f(a), f(b))$ ή $(f(b), f(a))$ ανάλογα με το αν ισχύει $f(a) < f(b)$ ή το αντιθετο.

Πρόταση 4.5.1. *Έστω $f : [a, b] \to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) < c$ και $f(b) > c$ τότε υπάρχει κάποιο $x^* \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = c$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c = 0$. Θέλουμε λοιπόν να δειξουμε ότι αν $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$ τότε υπάρχει κάποιο $x^* \in [a, b]$ (τουλάχιστον ένα) τέτοιο ώστε $f(x^*) = 0$. Για την απόδειξη, ας θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\} \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό είναι μη κενό, εφόσον τουλάχιστον το a ανήκει σε αυτό. Επίσης είναι και φραγμένο (αφού κάθε στοιχείο του θα πρέπει να είναι μικροτερο απο το b). Συνεπώς, απο το βασικό μας αξίωμα, το σύνολο αυτό θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το οποίο ας συμβολίζουμε με x^*, δηλαδη έστω $x^* := \sup(X)$. Θα δείξουμε ότι για το x^* αυτό θα ισχύει $f(x^*) = 0$.

Το x^* είναι σημείο συσσώρευσης του X. Κατά συνέπεια, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Εφόσον $\{x_n\} \subset X$, ισχύει ότι $f(x_n) < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και συνεπώς, αν η ακολουθία $\{f(x_n\}$ συγκλίνει θα πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$. Όμως, η f ειναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα και στο $x^* \in [a, b]$. Απο την Πρόταση 4.4.2, θα έχουμε οτι η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$. 'ρα, $f(x^*) \leq 0$.

Απο την άλλη πλευρά όμως μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{\bar{x}_n\} \subset [a, b]\setminus X$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x^*$. Μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία με γενικό όρο $\bar{x}_n = \min\left(x^* + \frac{1}{n}, b\right)$. Εφόσον κάθε όρος της ακολουθίας αυτής **δεν** ανήκει στο X, θα έχουμε απο τον ορισμό του X, ότι $f(\bar{x}_n) \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Αν λοιπόν η ακολουθία αυτή συγκλίνει θα πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) \geq 0$. Όμως απο την συνέχεια της f στο x^* και απο την Πρόταση 4.4.2, θα έχουμε οτι η ακολουθία $\{f(\bar{x}_n)\}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = f(x^*)$. 'ρα, $f(x^*) \geq 0$.

Εφόσον ισχύει ταυτόχρονα $f(x^*) \leq 0$ και $f(x^*) \geq 0$ καταλήγουμε ότι $f(x^*) = 0$ ■

Σχόλιο 4.5.2. *Προσοχή σε ενα λεπτό σημείο στην παραπάνω απόδειξη. Το x^* είναι μοναδικό εφόσον είναι το* sup *του συνόλου X. Αυτό όμως* **δεν** *σημαίνει οτι είναι και το μοναδικό σημείο μηδενισμού της συνάρτησης f! Σκεφτείτε ενα παράδειγμα.*

Παράδειγμα 4.5.3. *Δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ έχει λύση x^* στο διάστημα $[0, 2]$. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = -2 < 0$ και $f(2) = 2 > 0$. Συνεπώς απο το παραπάνω θεώρημα θα ισχύει ότι υπάρχει $x^* \in [0, 2]$ έτσι ώστε $f(x^*) = 0$. Πράγματι, $x^* = \sqrt{2} = 1.414$.*

Η διαδικασια του Παραδείγματος 4.5.3 μπορεί να γενικευθεί και να οδηγήσει σε μια αριθμητική μέθοδο για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $f(x) = c$ όπου $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Η μέθοδος αυτή είναι η μέθοδος της διχοτόμου.

Παράδειγμα 4.5.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, και ότι θέλουμε να βρούμε την λύση της εξίσωσης $f(x) = c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Επειδή $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, με $F(x) = f(x) - c$, για κάθε $x \in [a, b]$, είναι επίσης συνεχής, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρησουμε το πρόβλημα της εύρεσης ενος $x^* \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = 0$. Θεωρούμε επίσης ότι $f(a)f(b) < 0$.*

Απο την υπόθεση $f(a)f(b) < 0$, βλέπουμε ότι η f αλλάζει πρόσημο σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[a, b]$. Απο την Πρόταση 4.5.1 θα υπάρχει ενα σημείο μηδενισμού x^* της f στο $[a, b]$. Πηγαίνουμε τώρα στο μέσο του διαστήματος αυτού, το σημείο $\frac{a+b}{2}$. Το x^* είτε θα ανήκει στο $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, είτε στο $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Ας υποθέσουμε ότι $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, οπότε υπάρχει ένα σημείο μηδενισμού στο $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Παίρνουμε το περιορισμό της f στο διάστημα αυτό, το οποίο συμβολίζουμε με $[a_1, b_1] := \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία χρησιμοποιώντας τώρα τα διαστήματα $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, είτε στο $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Επιλέγουμε αυτό το διάστημα στα άκρα του οποίου εχουμε αλλαγή προσήμου της συνάρτησης έστω π.χ. το $[a_2, b_2] := \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ και συνεχίζουμε. Σε κάθε βήμα, έχουμε εξασφαλίσει *ότι υπάρχει ενα σημείο μηδενισμού της f σε ενα διάστημα το μήκος του οποίου γίνεται ολο και πιο μικρό. Αυτό μας δίνει ολο και καλύτερες προσεγγίσεις της λύσης της εξίσωσης $f(x) = 0$. Σταματάμε οταν το μήκος του διαστήματος που περιέχει το σημείο μηδενισμού έχει γίνει μικρότερο απο την επιθυμητή ακρίβεια της προσέγγισης της λύσης. Προσπαθείστε να υλοποιήσετε την επαναληπτική αυτή διαδικασία στον υπολογιστή.*

4.6 Το θεώρημα του μεγίστου.

Πρόταση 4.6.1. *Μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι φραγμένη. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε, για κάθε $n \geq 1$ θα υπάρχει $x_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $\mid f(x_n) \mid > n$. Τα x_n αυτά για διαφορετικές επιλογές του $n \in \mathbb{N}^+$ απαρτίζουν μια ακολουθία $\{x_n\} \subset [a, b]$, η οποία προφανώς είναι φραγμένη, οπότε απο το θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία έστω την $\{x_{n_k}\}$. Ας ονομάσουμε x_0 το όριο της. Απο κατασκευής, για την υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ ισχύει ότι και για την πλήρη ακολουθία $\{x_n\}$, δηλαδή,

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N}^+, \ \ |f(x_{n_k}| > n_k, \tag{4.3}$$

Απο άλλη πλευρά, απο την συνέχεια της f θα πρέπει $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, όπου $f(x_0) \in \mathbb{R}$, οπότε για κάθε ϵ θα υπάρχει κάποιο $K \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $k \geq K$ να ισχύει $\mid f(x_{n_k}) - f(\xi) \mid < \epsilon$ συνεπώς και $f(x_{n_k}) < \epsilon + f(x_0)$. Το δεξιό φράγμα είναι ανεξάρτητο του k και κατά επέκταση και του n_k για αρκετά μεγάλο k, συνεπώς

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0, \ \text{ υπάρχει } K \in \mathbb{N}^+, \ \text{ τέτοιο ώστε } f(x_{n_k}) < \epsilon + f(x_0), \ \ k > K. \tag{4.4}$$

Οι (4.3) και (4.4) αντικρούουν η μία την άλλη συνεπώς η υπόθεση μας δεν ισχύει. 'ρα η f είναι φραγμένη. ■

Θεώρημα 4.6.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Η f επιδέχεται μέγιστο και ελάχιστο, δηλαδή υπάρχουν x_* και $x^* \in [a, b]$ τέτοια ώστε*

$$f(x_*) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x),$$
$$f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε τώρα την ύπαρξη κάποιου $x^* \in [a, b]$ τέτοιου ώστε $f(x) \leq f(x^*)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δηλαδή $f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο $Y = \{y \mid y = f(x), \ a \leq x \leq b\}$ δηλαδή το πεδίο τιμών της συνάρτησης f. Το σύνολο Y είναι μη κενο και φραγμένο (απο την Πρόταση 4.6.1) οπότε θα έχει ελαχιστο άνω φράγμα, $M := \sup(Y)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{x_n\} \subset [a, b]$ η οποία να έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Αν υπολογίσουμε την συνάρτηση f στην ακολουθία αυτή, δηλαδή πάρουμε την ακολουθία $\{f(x_n)\} \subset Y$, η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο M, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Η ακολουθία $\{x_n\}$ ονομάζεται μεγιστοποιητική ακολουθία. Στο σημείο αυτό θέλει λίγο προσοχη: Η ακολουθία $\{x_n\}$ έχει κατασκευαστεί ετσι ωστε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n$. Στο σημείο αυτό μπορούμε να επικαλεστούμε όμως την βοήθεια του Θεωρηματος Bolzano-Weierstrass , σύμφωνα με το οποίο, ακόμα και αν η μεγιστοποιητικη ακολουθία $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει, θα υπάρχει τουλάχιστον μια υποακολουθία της $\{x_{n_k}\}$ η οποία θα συγκλίνει. Έστω $\bar{x}$ το όριο της υποακολουθίας αυτής, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Θα δείξουμε οτι το $\bar{x}$ είναι το x^* το οποίο ζητούμε. Εφόσον η ακολουθία $\{f(x_n\}$ συγκλίνει, και η υποακολουθία της $\{f(x_{n_k})\}$ θα συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο με την αρχική ακολουθία (βλ. Πρόταση 2.3.5). Η αρχική ακολουθία απο κατασκευής συγκλίνει στο M άρα

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M. \tag{4.5}$$

Θυμηθείτε όμως ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.4.2 στην ακολουθία $\{x_{n_k}\}$ (δηλαδή στην συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{x_n\}$) θα έχουμε οτι

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k} = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\bar{x}). \tag{4.6}$$

Συγκρίνοντας τις (4.5) και (4.6) και επικαλούμενοι την μοναδικότητα του ορίου, καταλήγουμε στο ότι $f(\bar{x}) = M$, οπότε το $\bar{x}$ έχει τις ιδιότητες του ζητούμενου x^* και ως εκ τούτου $x^* = \bar{x}$.

Το μόνο σημείο το οποίο μένει ακόμα να δικαιολογήσουμε, είναι ο ισχυρισμός μας ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μεγιστοποιητική ακολουθία[2]. Αυτό μπορει να γίνει με τον ακόλουθο συλλογισμό: Απο τον ορισμό του

[2] Η μεγιστοποιητική ακολουθία δεν είναι απαραίτητα μοναδική!

ελάχιστου άνω φράγματος γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ το $M - \epsilon$ δεν θα είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Y. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε κάποιο x το οποίο εξαρτάται απο το ϵ τέτοιο ώστε $M - \epsilon < f(x) \leq M$. Αν επιλέξουμε ως $\epsilon = \frac{1}{n}$, τότε τα αντίστοιχα x με την ιδιότητα αυτή θα τα συμβολίζουμε με x_n και για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ θα έχουμε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\} \subset [a, b]$ για την οποία θα ισχύει $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Η ακολουθία $\{f(x_n\}$ συγκλίνει στο M, άρα η $\{x_n\}$ ειναι μεγιστοποιητική ακολουθία.

Όμοια μπορούμε να εργαστούμε και για το ελάχιστο (αφήνεται σαν άσκηση). ∎

Σχόλιο 4.6.3. *Το ότι η f είναι φραγμένη μπορεί να δειχθεί και με την παρακάτω εναλλακτική προσέγγιση. Μπορούμε πρώτα να δείξουμε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in [a, b]$ τότε είναι φραγμένη στο ανοιχτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τοτε για κάθε $x_0 \in [a, b]$ θα υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη σε αυτό. Αν το διάστημα $[a, b]$ είναι μία πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων της μορφής $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ για $x_0 \in [a, b]$ τότε απο το αποτέλεσμα αυτό θα είχαμε αμέσως το ότι η f θα είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Αν όμως αυτό δεν συμβαίνει και η ένωση είναι μία άπειρη ένωση το παραπάνω επιχείρημα μπορεί και να μη ευσταθεί. Απο την δύσκολη αυτή θέση μας βγάζει ένα πολυ σημαντικό αποτέλεσμα της ανάλυσης, το θεώρημα των Heine-Borel σύμφωνα με το οποίο το διάστημα $[a, b]$ μπορεί να καλυφθεί απο ένα πεπερασμένο πλήθος απο ανοιχτά διαστήματα της μορφής $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$ για $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \cdots, n$. Το θεώρημα αυτό θα το συναντήσουμε στην γενικότερη του μορφή στην συνέχεια, όταν μιλήσουμε για γενικότερους μετρικούς χώρους, και όταν συζητήσουμε την πολύ σημαντική ιδιότητα της* **συμπάγειας**.

Παράδειγμα 4.6.4. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = 1 + exp(-\frac{1}{x})$ στο διάστημα $X = (0, 1]$. Το $\inf_{x \in X}(f(x)) = 1$ αλλά στην περίπτωση αυτή δεν ταυτίζεται με το $\min_{x \in X} f(x)$. Για την ακρίβεια $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει εδώ γιατί το X δεν είναι κλειστό διαστημα. Εξαιτίας αυτού, για μια ακολουθία $\{x_n\} \in X$ για την οποία ισχύει $\lim_{n \to \infty} x_n = x$* **δεν** *ισχύει απαραίτητα ότι $x \in X$ και συνεπώς το θεώρημα μπορεί να μην ισχύει.*

Παράδειγμα 4.6.5. *Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x) =\mid x - 1 \mid$ ορισμένη στο $X = [0, 1)$. Για την συνάρτηση αυτή δεν ισχύει το θέωρημα γιατί $\inf_{x \in X} f(x) = 0$ αλλά η συνάρτηση αυτή είναι αυστηρά θετική για κάθε $x \in X$. Για να ισχύει το θεώρημα θα πρέπει να οριστεί η συνάρτηση αυτή στο $Y = [0, 1]$, το οποίο είναι κλειστό.*

Παράδειγμα 4.6.6. *Το θεώρημα επίσης μπορεί να μην ισχύει και όταν το διάστημα δεν είναι φραγμένο. Σαν παράδειγμα πάρετε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x$ η οποία δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.*

Το θεώρημα του μεγίστου είναι εξαιρετικά χρήσιμο σε πάρα πολλές εφαρμογές οι οποίες εχουν να κάνουν με την βελτιστοποίηση. Επίσης, γενικεύεται και σε περιπτώσεις που έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ή ακόμα και συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους όπως θα δούμε και στην συνέχεια των διαλέξεων αυτών. Όμως, χρησιμοποιείται και σε πολλές περιπτώσεις που θέλουμε να δείξουμε ποιοτικά χαρακτηριστικά συνεχών συναρτήσεων. Σαν ενα απο τα πολλά αυτά παραδείγματα, παραθέτουμε την ακόλουθη πρόταση η οποία κάνει χρήση του θεωρήματος του μεγίστου για να μας εξασφαλίσει την συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης κάτω απο ορισμένες συμπληρωματικές συνθήκες.

Πρόταση 4.6.7 (Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ αυστηρά μονότονη και συνεχής συνάρτηση και $X = [a, b]$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι και αυτή αυστηρά μονότονη (με την ίδια μορφή μονοτονίας) και συνεχής.*

Απόδειξη: Ας κάνουμε την αποδειξη για την περίπτωση όπου f ειναι αυστηρά αύξουσα, δηλαδή για την περίπτωση $f(x_2) > f(x_1)$ αν $x_1 > x_2$.
Η ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και η μονοτονία της είναι άμεσο επακόλουθο της μονοτονίας της ίδιας της f, και αφήνεται σαν άσκηση.
Ας δείξουμε την συνέχεια της f^{-1}. Σύμφωνα με το θεώρημα του μεγίστου (βλ. Πρόταση 4.6.2) εφόσον η f είναι συνεχής στο διάστημα $Q = [a, b]$ θα έχει μέγιστο και ελάχιστο, δηλαδή θα επιτυγχάνει το sup και το inf της. Λόγω της μονοτονίας το μέγιστο θα είναι το $f(b)$ και το ελάχιστο το $f(a)$. Όλες οι τιμές της f θα βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[f(a), f(b)]$.
Ας πάρουμε οποιοδήποτε $y \in [f(a), f(b)]$. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής (βλ. Πρόταση 4.5.1) θα υπάρχει κάποιο $c \in [a, b]$ το οποίο και λόγω της μονοτονίας της f θα είναι μοναδικό, τέτοιο ώστε $f(c) = y$.
Για κάθε $\epsilon > 0$ ας ορίσουμε το

$$\rho := \min\{f(c) - f(c - \epsilon),\, f(c + \epsilon) - f(c)\} = \min\{y - f(c - \epsilon),\, f(c + \epsilon) - y\}$$

Ας επιλεξουμε δ, τέτοιο ώστε $0 < \delta < \rho$. Αν $\mid f(x) - y \mid < \delta$ τότε απο τον ορισμό του δ μπορούμε να δούμε ότι $f(c - \epsilon) < f(x) < f(c + \epsilon)$ και απο την μονοτονία της f, $c - \epsilon < x < c + \epsilon$.
Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ ($\delta < \rho$) τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ για το οποίο $\mid f(x) - y \mid < \delta$ να ισχύει $\mid x - c \mid < \epsilon$. Αυτό όμως σημαίνει και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $[f(a), f(b)]$. ∎

4.7 Ομοιόμορφη συνέχεια.

Στον Ορισμό 4.4.1 της συνέχειας, η επιλογή των ϵ και δ εξαρτάται απο την επιλογή του x_0, δηλαδή $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$. Εν γένει, για δεδομένο ϵ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό της συνέχειας με το ίδιο δ για κάθε $x_0 \in X$. Το αν αυτό είναι εφικτό ή οχι, εξαρτάται απο την μορφή της συνάρτησης f που εξετάζουμε αλλά και απο το πεδίο ορισμού X της συνάρτησης. Αν για κάποια συνάρτηση f, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Ορισμό 4.4.1 για κάθε $x_0 \in X$ και για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ κατά τρόπο ώστε το αντίστοιχο δ εξαρτάται μόνο απο την επιλογή του ϵ αλλά οχι απο την επιλογή του x_0, δηλαδη για οποιοδήποτε δεδομένο $\epsilon > 0$ μπορούμε να επαληθεύσουμε την συνθήκη του Ορισμού 4.4.1 σε κάθε $x_0 \in X$ για το ίδιο $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός 4.7.1 (Ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης). *Η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο X αν υπάρχει δ τέτοιο ώστε για κάθε $x_0, x \in X$ για τα οποία $\mid x - x_0 \mid < \delta$ ισχύει $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$.*

Πρόταση 4.7.2. *Αν μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X, τότε είναι και συνεχής.*

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα (δειτε την Πρόταση 4.7.9).

Σχόλιο 4.7.3. *Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για κάποιο επιλεγμένο ϵ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο δ για όλο το διάστημα X. Αυτό θα γίνει πιο ξεκάθαρο αν γράψουμε τους δύο ορισμούς χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό με 'ποσοδείκτες ' (δηλαδή τον συμβολισμό $\forall$ και $\exists$. Στην μορφή αυτή λοιπόν, ο Ορισμός 4.4.1 για την συνέχεια της f στο X γίνεται*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \forall\ x_0 \in X\ \exists\, \delta > 0\ :\ |f(x) - f(x_0| < \epsilon\ \text{ για }\ |x - x_0| < \delta. \tag{4.7}$$

Ο Ορισμός 4.7.1 σχετικά με την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο X γίνεται

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\ x_0 \in X\ |f(x) - f(x_0| < \epsilon\ \text{ για }\ |x - x_0| < \delta. \tag{4.8}$$

Οι δυο αυτοί ορισμοί είναι διαφορετικοί στο ότι στον (4.7) πρώτα επιλέγουμε τα ϵ, x_0 και βάσει αυτών μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ τέτοιο ώστε αυτό που ερχεται μετά το : να ισχύει, ενω στον (4.8)πρώτα επιλέγουμε μόνο το ϵ και βάσει αυτού μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\epsilon)$ τέτοιο ώστε αυτό που ερχεται μετα το : να ισχύει δηλαδή για οποιοδήποτε $x \in X$ αν $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Προσέξτε τι διαφορά μπορεί να κάνει η μεταφορά του $\forall$ μετά το :!

Έχει επίσης ενδιαφέρον να γράψουμε και την **άρνηση** *της συνθήκης (4.8), η οποία μας δίνει και ένα κριτήριο σχετικά με το πότε μία συνάρτηση* **δεν** *είναι ομοιόμορφα συνεχής: Υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ να ισχύει $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid > \epsilon$.*

Σχόλιο 4.7.4. *Ο ακόλουθος συλλογισμός μπορεί να σας βοηθήσει στο να κατανοήσετε πιο εύκολα την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας. Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $x_0 \in X$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0| < \epsilon$ αν $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$. Αν επιλέγαμε ως $\delta^* = \delta^*(\epsilon) = \inf_{x_0 \in X} \delta(\epsilon, x_0)$ το παραπάνω θα ίσχυε για κάθε $x_0 \in X$. Δηλαδη για κάθε $\epsilon > 0$, είχαμε $|f(x) - f(x_0| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta^*$ και αυτό θα ίσχυε για το ίδιο $\delta^*(\epsilon)$ για κάθε $x_0 \in X$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση f θα ήταν ομοιόμορφα συνεχής. Το δ^* εφόσον ορίστηκε σαν το $\inf$ του συνόλου τω δ για τα οποία ικανοποιείται ο Ορισμός 4.4.1 υπάρχει πάντοτε. Τι μπορεί λοιπόν να πάει λάθος στο παραπάνω; Το γεγονος ότι μπορεί $\delta^* = 0$, οπότε αυτή η επιλογή δεν ικανοποιεί και τον Ορισμό 4.7.1 και άρα η f μπορεί να είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.*

Παράδειγμα 4.7.5. *Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \epsilon$ και να δούμε ότι ο ορισμός 4.7.1 ισχύει: αν για κάθε $x, x_0 \in\mathbb{R}$ επιλέξουμε $\mid x - x_0 \mid \delta$ τότε $\mid f(x) - f(x_0) \mid = \mid x - x_0 \mid < \delta = \epsilon$.*

Παράδειγμα 4.7.6. *Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$.*

Για οποιοδήποτε $x_0 \in (0, 1)$ και $x_0 + \delta \in (0, 1)$ μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\mid f(x_0) - f(x_0 + \delta) \mid = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)}.$$

Αν πάρουμε x_0 κοντά στο 0 η ποσότητα αυτή μπορεί να γίνει όσο μεγάλη επιθυμούμε. Συνεπώς, η συνάρτηση αυτή δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισοδύναμα, ας επιλέξουμε κάποιο $\epsilon > 0$ και ας προσπαθήσουμε να βρούμε κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x_0, x_0 + \delta \in (0,1)$. Απο την παραπάνω εκτίμηση και θέτωντας $\epsilon = \frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}$ λύνοντας ως προς δ βρίσκουμε ότι

$$\delta = \delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon x_0^2}{1 - \epsilon x_0}.$$

Το δ αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλο το $(0,1)$. Βλέπουμε οτι έχουμε πρόβλημα αν μας επιτρέπεται να πλησιάζουμε όσο κοντά επιθυμούμε το $x_0 = 0$, γιατί $\inf_{x_0 \in (0,1)} \delta(\epsilon, x_0) = 0$.

Παράδειγμα 4.7.7. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$.*

Για οποιαδήποτε $x_0, x \in [0,1]$ έχουμε ότι

$$| f(x) - f(x_0) | = | x^2 - x_0^2 | = | x + x_0 | \, | x - x_0 | \leq 2 \, | x - x_0 |$$

Αν λοιπόν $| x - x_0 | < \delta$ τότε $| f(x) - f(x_0) | < 2\delta$. Για κάθε $\epsilon > 0$ λοιπόν αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ έτσι ώστε να έχουμε $| f(x) - f(x_0) | < \epsilon$ αρκεί $| x - x_0 | < \delta$, και το δ αυτό εξαρτάται απο το ϵ και όχι απο το x_0.

Παράδειγμα 4.7.8. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο δ τέτοιο ώστε αν $| x - x_0 | < \delta$ για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ να ισχύει $| f(x) - f(x_0) | < \epsilon$. Πραγματικα, αν πάρουμε $x_0 = n$ και $x = n + \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, τότε, $| f(x) - f(x_0) | = \delta(2n + \delta)$ το οποίο μπορεί να γίνει μεγαλύτερο απο οποιοδήποτε ϵ. 'ρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η ακόλουθη πρόταση, που οφείλεται στον Heine, **συνδέει** τις συνεχείς συναρτήσεις με τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 4.7.9. *Έστω $X = [a,b]$ (κλειστό και φραγμένο διάστημα) και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο X. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής αλλά **όχι** ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, (βλ. Σχόλιο 4.7.3) θα υπάρχει $\epsilon^* > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x_0, x \in X$ για τα οποία να ισχύει $| x - x_0 | < \delta$ αλλά $| f(x) - f(x_0) | \geq \epsilon^*$. Αυτά τα x_0, x θα εξαρτώνται απο την επιλογή του δ. Αν πάρουμε λοιπόν $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ θα συμβολίσουμε τα x_0, x με $x_{0,n}, x_n$, και γι αυτά θα ισχύει οτι

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \ \exists x_{0,n}, x_n \in X \ : \ |x_n - x_{0,n}| < \delta = \frac{1}{n} \text{ αλλά } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon^*. \tag{4.9}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τα x_n σαν μία ακολουθία $\{x_n\} \subset X$, η οποία είναι φραγμένη οπότε απο το θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ και έστω x^* το όριο της. Εφαρμόζουμε την (4.9) περνώντας στις υποακολουθίες $\{x_{n_k}\}$ και $\{x_{0,n_k}\}$ (η $\{x_{0,n_k}\}$ δεν είναι απαραίτητα συγκλίνουσα), και αυτό δίνει

$$\forall k \in \mathbb{N}^+, \ |x_{n_k} - x_{0,n_k}| < \delta = \frac{1}{n_k} \text{ αλλά } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon^*. \tag{4.10}$$

Χρησιμοποιούμε την συγκλίνουσα υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ και την συνέχεια της f η οποία μας εξασφαλίζει ότι $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Όπως σχολιάσαμε παραπάνω δεν γνωρίζουμε αν η $\{x_{0,n_k}\}$ συγκλίνει. Όμως, απο την κατασκευή της (βλ. (4.10)) έχουμε ότι $|x_{n_k} - x_{0,n_k}| < \frac{1}{n_k}$, και επειδή η $\{x_{n_k}\}$ συγκλίνει θα πρέπει να συγκλίνει και η x_{0,n_k} και μάλιστα να έχει το ίδιο όριο x^*. Ξανά απο την συνέχεια της f, έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} f(x_{0,n_k}) = f(x^*)$, οπότε $\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(x_{0,n_k})) = 0$ και συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $K \in \mathbb{N}^+$, τέτοιο ώστε $|f(x_{n_k}) - f(x_{0,n_k})| < \epsilon$ για $k > K$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει και για $\epsilon = \epsilon^*$ δηλαδή

$$\forall \ k > K, \ |x_{n_k} - x_{0,n_k}| < \delta = \frac{1}{n_k} \text{ και } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon^*. \tag{4.11}$$

Οι (4.10) και (4.11) αντικρούουν η μία την άλλη άρα έχουμε οδηγηθει σε άτοπο. Κατά συνέπεια, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. ■

4.8 ’νω και κάτω όριο συναρτήσεων

Με τρόπο αναλογο όπως για τις ακολουθίες μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες του ανω και κάτω ορίου ($\limsup$ και $\liminf$) μιας συνάρτησης σε κάποιο x_0.

Ορισμός 4.8.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*

1. *Ορίζουμε σαν άνω όριο της f στο x_0 την ποσότητα*
$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \inf_{\delta>0} \sup\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta,\ x \in X,\ x \neq x_0\}.$$
2. *Ορίζουμε σαν κάτω όριο της f στο x_0 την ποσότητα*
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) := \sup_{\delta>0} \inf\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta,\ x \in X,\ x \neq x_0\}.$$

Στον παραπάνω ορισμό, πχ. για το $\limsup$, αρχικά επιλέγουμε κάποιο $\delta > 0$ και για το δ αυτό υπολογίζουμε το $\sup$ της συνάρτησης f για όλα τα x τα οποία είναι δ-κοντά στο x_0 (δηλαδη για όλα τα $x \in X$ που ικανοποιούν την ανισότητα $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$) αποκλείοντας όμως το ίδιο το κεντρο του ανοιχτού αυτού διαστήματος ($x \neq x_0$). Ας ονομάσουμε $S(\delta)$ την ποσότητα αυτή. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή για κάθε $\delta > 0$, παιρνουμε το σύνολο όλων των πιθανών $S(\delta)$, δηλαδή το $\mathcal{S} := \{S(\delta) \mid \delta > 0\}$ και κατόπιν παίρνουμε το $\inf$ του συνόλου αυτού. Αν η συνάρτηση f είναι φραγμένη τότε και τα αντίστοιχα σύνολα $\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta,\ x \in X,\ x \neq x_0\}$, $\mathcal{S}$ είναι φραγμένα (και προφανώς μη κενά) άρα εχουν $\sup$ και $\inf$ αντιστοίχως, οπότε το $\limsup_{x\to x_0} f(x)$ ορίζεται καλώς. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να σκεφτούμε και για το κάτω όριο.

Η έννοια του άνω και κάτω ορίου συναρτήσεων έχει και εναλλακτικό (και ισοδύναμο) ορισμό κάνοντας χρήση των ακολουθιών. Ο ορισμός αυτός μπορεί να είναι πολύ χρήσιμος σε εφαρμογές.

Ορισμός 4.8.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*

1. $\limsup_{x\to x_0} f(x) = L_s$ *αν και μονο αν*
   - *(i) Υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ και $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_s$.*
   - *(ii) Για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ισχύει οτι $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq L_s$.*
2. $\liminf_{x\to x_0} f(x) = L_i$ *αν και μονο αν*
   - *(i) Υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ και $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_i$.*
   - *(ii) Για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ισχύει οτι $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq L_i$.*

Πρόταση 4.8.3. *Οι Ορισμοί 4.8.1 και 4.8.2 είναι ισοδύναμοι.*

Πρόταση 4.8.4. *Εν γένει ισχύει ότι*
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x).$$
Το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα και τότε
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Παράδειγμα 4.8.5. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 4.8.2 μπορούμε να δούμε ότι*
$$\liminf_{x\to 0} f(x) = -1,\ \ \limsup_{x\to 0} f(x) = 1$$
Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 4.8.6 (Ιδιότητες του άνω και κάτω ορίου).

1. $\liminf_{x\to x_0} f(x) = -\limsup_{x\to x_0}(-f(x))$.

2. *Για κάθε* $\lambda > 0$,

$$\liminf_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \liminf_{x\to x_0} f(x),$$
$$\limsup_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

3. $\liminf_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x) \le \liminf_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$

4. $\limsup_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) \le \limsup_{x\to x_0} f(x) + \limsup_{x\to x_0} g(x)$.

Ορισμός 4.8.7 (Ημισυνέχεια). *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, *και* x_0 *σημείο συσσώρευσης του* X.

1. *Η* f *είναι* **κάτω ημισυνεχής** *στο σημείο* x_0 *αν*

$$f(x_0) \le \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

2. *Η* f *είναι* **άνω ημισυνεχής** *στο σημείο* x_0 *αν*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0).$$

Η f *είναι ανω ημισυνεχής στο* X *αν είναι άνω ημισυνεχής σε κάθε* $x_0 \in X$. *Όμοια και για την κάτω ημισυνέχεια.*

Παράδειγμα 4.8.8. *Αν η συνάρτηση* f *είναι ανω ημισυνεχής, η* $-f$ *είναι κάτω ημισυνεχής.*

Παράδειγμα 4.8.9. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in [-1,1], x \neq 0 \\ a & x = 0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι άνω ημισυνεχής στο $x = 0$ *αν* $1 \le a$ *και κάτω ημισυνεχής στο* $x = 0$ *αν* $a \le -1$.

Πρόταση 4.8.10. *Μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in X$ *αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο σημείο x_0. Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.8.7

$$f(x_0) \le \liminf_{x\to x_0} f(x),$$
$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0).$$

Επίσης (βλ. Πρόταση 4.8.4) ισχύει γενικά οτι

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Συγκρίνοντας τις τρεις αυτές σχέσεις καταλήγουμε στην σχέση

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0),$$

οπότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ που είναι και ο συνήθης ορισμός της συνέχειας. Το αντίστροφο αφήνεται σαν άσκηση.■

Η ημισυνέχεια είναι πιο ασθενής ιδιότητα απο την συνέχεια αλλά είναι επαρκής για να μας επιτρέψει γενικεύσεις θεμελιωδών θεωρημάτων όπως π.χ. το Θεώρημα του Μεγίστου του Weierstrass.

Πρόταση 4.8.11. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, *όπου* $X = [a,b]$ *(κλειστό και φραγμένο διάστημα).*

1. *Αν η* f *είναι κάτω ημισυνεχής στο* X *τότε επιτυγχάνει το ελάχιστο.*

2. *Αν η* f *είναι άνω ημισυνεχής στο* X *τότε επιτυγχάνει το μέγιστο.*

Απόδειξη: Έστω $M := \sup_{x\in X} f(x)$. Με την ίδια λογικη με την οποία εργαστήκαμε στο Θεώρημα 4.6.2 μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια μεγιστοποιητική ακολουθία, δηλαδή μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{x_n\}$, έστω $\{x_{n_k}\}$ και έστω x^* το όριο της συγκλίνουσας υποακολουθίας, δηλαδή $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Μένει να δείξουμε ότι $f(x^*) = M$. Στο Θεώρημα 4.6.2 για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε την συνέχεια της f. Θα δούμε οτι μας είναι αρκετή η ημισυνέχεια.

Εφόσον η $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει στο M κάθε υποακολουθία της, συνεπώς και η $\{f(x_{n_k})\}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο, άρα

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}),$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το ότι όταν το οριο μιας ακολουθίας υπάρχει τότε αυτό είναι η κοινή τιμή του άνω και του κάτω ορίου της ακολουθίας αυτής. Εφόσον η f είναι άνω ημισυνεχής στο X θα είναι άνω ημισυνεχής στο $x^* \in X$, οπότε

$$f(x^*) \geq \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

'ρα $f(x^*) = M$. Όμοια για το ελάχιστο, χρησιμοποιώντας την κάτω ημισυνέχεια. ■

4.9 Δεξιά και αριστερά όρια, και συνέχεια.

Πολλές φορές, μπορεί να χρειαστεί να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ και να μελετήσουμε την συμπεριφορά κάποιας συνάρτησης στο σημείο αυτό, μόνο απο μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, δηλαδή μόνο απο τα δεξιά ή μόνο απο τα αριστερά. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να μιλάμε για το δεξιό και για το αριστερό όριο της συνάρτησης. Φυσικά, για να μπορούμε να κάνουμε αυτή την ερώτηση θα πρέπει αντίστοιχα το σημείο αυτό να είναι δεξιό ή αριστερό σημείο συσσώρευσης.

Ορισμός 4.9.1 (**Όριο απο τα αριστερά και απο τα δεξιά**)**.**

1. *Λέμε ότι το όριο της f στο x_0* **απο τα αριστερά** *είναι L_1 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε $\mid f(x) - L_1 \mid < \epsilon$, το συμβολίζουμε δε ως $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$.*

2. *Λέμε ότι το όριο της f στο x_0* **απο τα δεξιά** *είναι L_2 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $\mid f(x) - L_2 \mid < \epsilon$, το συμβολίζουμε δε ως $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$.*

Στην περίπτωση όπου $L_1 = L_2 = L$ ανακτούμε τον συνήθη ορισμό του ορίου.

Πρόταση 4.9.2. *Έστω $f : X \to\mathbb{R}$, $X \subset\mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*
Ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Μπορούμε τώρα να μιλήσουμε για την έννοια της δεξιάς και της αριστερής συνέχειας.

Ορισμός 4.9.3 (**Συνέχεια απο τα αριστερά και απο τα δεξιά**)**.**

1. *Η συνάρτηση f είναι* **συνεχής απο τα αριστερά** *στο σημείο x_0, αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*

2. *Η συνάρτηση f είναι* **συνεχής απο τα δεξιά** *στο σημείο x_0, αν $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

Παράδειγμα 4.9.4. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = sign(x)$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & αν \quad x \geq 0 \\ -1 & αν \quad x < 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} sign(x) &= -1 \\ \lim_{x\to 0^+} sign(x) &= 1 = sign(0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.9.5. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x)$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x > 0 \\ -1 & \text{αν} \quad \leq 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} g(x) &= -1 = g(0) \\ \lim_{x \to 0^+} g(x) &= 1 \end{aligned}$$

Ορισμός 4.9.6. *Ένα σημείο $x_0 \in X$ για το οποίο ισχύει $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ονομάζεται* **σημείο άλματος** *της f.*

Στα σημεία άλματος έχουμε ασυνέχεια της συνάρτησης, και μάλιστα ασυνέχεια που δεν μπορεί να διορθωθεί με το να ξαναορίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Αν στο σημείο x_0 έχουμε ασυνέχεια αλλά όχι ασυνέχεια άλματος τότε θα μπορούσαμε να την αφαιρέσουμε ξαναορίζοντας την τιμή της συναρτησης στο x_0 ως $f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$.

4.10 Μονότονες συναρτήσεις

Ορισμός 4.10.1 (Μονότονες συναρτήσεις). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

1. *Η συνάρτηση f ονομάζεται* **αύξουσα** *αν $f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1 < x_2$. Αν η ανισότητα ισχύει αυστηρά, τότε η f ονομάζεται* **γνησίως αύξουσα***.*

2. *Η συνάρτηση f ονομάζεται* **φθίνουσα** *αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ για κάθε $x_1 < x_2$. Αν η ανισότητα ισχύει αυστηρά, τότε η f ονομάζεται* **γνησίως φθίνουσα***.*

3. *Η συνάρτηση f ονομάζεται* **μονότονη** *αν είναι είτε αυξουσα ειτε φθίνουσα.*

Κατά παρόμοιο τρόπο με τις μονότονες ακολουθίες, οι μονότονες συναρτήσεις έχουν πάντοτε δεξιό ή αριστερό όριο.

Πρόταση 4.10.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια μονότονη συνάρτηση. Αν η f ειναι φραγμένη τότε σε κάθε $x_0 \in (a, b)$ υπάρχουν τα $f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.*

1. *Αν η f είναι αύξουσα και φραγμένη απο τα άνω τότε*

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$$

2. *Αν η f είναι φθίνουσα και φραγμένη απο τα κάτω τότε*

$$f(x_0^+) \leq f(x_0) \leq f(x_0^-)$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι f είναι αύξουσα. Ας πάρουμε οποιοδήποτε $x_0 \in (a, b)$ και ας θεωρήσουμε ενα $\delta^* > 0$ τέτοιο ωστε $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset (a, b)$. Ας ορίσουμε επίσης τις ποσότητες, $L^- := \sup_{x \in (x_0 - \delta^*, x_0)} f(x)$ και $L^+ := \inf_{x \in (x_0, x_0 + \delta^*)} f(x)$ οι οποίες είναι καλά ορισμένες (πεπερασμένες) αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη απο τα άνω. Θα δείξουμε οτι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$ και $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+$.

Για κάθε $\epsilon > 0$, το $L^- - \epsilon$ **δεν** είναι άνω φράγμα της f περιορισμένης στο $(x_0 - \delta^*, x_0)$ κατα συνέπεια υπάρχει κάποιο $x^* \in (x_0 - \delta^*, x_0)$, για το οποίο ισχύει $L^- - \epsilon < f(x^*) \leq L^-$. Λόγω της μονοτονίας της f, για κάθε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0)$ τέτοιο ώστε $x^* < x$ θα ισχύει

$$L^- - \epsilon < f(x^*) \leq f(x) \leq L^- < L^- + \epsilon,$$

(όπου η τελευταία ανισότητα είναι τετριμμενη). 'ρα για κάθε x για το οποίο ισχύει $x_0 - \delta^* < x^* < x < x_0$ έχουμε ότι $|f(x) - L^-| < \epsilon$, και γράφοντας $x^* = x_0 - (x_0 - x^*)$ βλέπουμε ότι αν επιλέξουμε ως $\delta = x_0 - x^*$ θα ισχύει οτι $|f(x) - L^-| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta$. 'ρα, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$.

Με την ίδια λογική για κάθε $\epsilon > 0$, το $L^+ - \epsilon$ **δεν** είναι κάτω φράγμα της f περιορισμένης στο $(x_0, x_0 + \delta^*)$ κατα συνέπεια υπάρχει κάποιο $x^* \in (x_0, x_0 + \delta^*)$, για το οποίο ισχύει $L^+ \leq f(x^*) \leq L^+ + \epsilon$, και η απόδειξη συνεχίζεται σε πλήρη αναλογία με τα προηγούμενα. Αφηνεται σαν ασκηση να ολοκληρώσετε την απόδειξη, οπως επίσης και η περίπτωση όπου f φθίνουσα. ■

Η Πρόταση 4.10.2 μας δίνει μια σημαντική πληροφορία σχετικά με το πως μπορεί να προκύψει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο x_0 για μια μονότονη συνάρτηση.

Πρόταση 4.10.3. *Κάθε πιθανό σημείο ασυνέχειας μιας μονότονης συναρτησης είναι ασυνέχεια τύπου άλματος και το σύνολο των (πιθανών) σημείων ασυνέχειας μιας μονότονης συνάρτησης είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η f είναι αύξουσα και έστω A το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0 αλλά η ασυνέχεια δεν είναι τύπου άλματος υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αλλά $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{4.12}$$

Απο την άλλη, λόγω της μονοτονίας της f,

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \tag{4.13}$$

Συνδυάζοντας τις (4.12) και (4.13) βλέπουμε ότι $f(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$. Όμοια και αν η f είναι φθίνουσα. 'ρα οποιοδηποτε σημείο ασυνέχειας μιας μονότονης συνάρτησης είναι αναγκαστικά ασυνέχεια τύπου άλματος.

Ας πάρουμε τώρα οποιοδήποτε $y \in A$. Εφόσον όπως δείξαμε παραπάνω το y είναι ασυνέχεια τύπου άλματος, θα ισχύει οτι $f(y^-) := \lim_{x\to y^-} f(x) < \lim_{x\to y^+} f(x) =: f(y^+)$ οπότε στο σημείο y μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ανοιχτό διάστημα $I_y := (f(y^-), f(y^+))$. Ας πάρουμε και ένα αλλο στοιχείο $\bar{y} \in A$, τέτοιο ώστε $\bar{y} \neq y$ και με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν ορίζουμε το ανοιχτό διάστημα $I_{\bar{y}} := (f(\bar{y}^-), f(\bar{y}^+))$. Ισχυριζόμαστε οτι τα διαστήματα I_y και $I_{\bar{y}}$ ειναι ξένα μεταξύ τους. Πράγματι, εφόσον $y \neq \bar{y}$ είτε $y < \bar{y}$ είτε $\bar{y} < y$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $y < \bar{y}$. Τότε απο την μονοτονία της f θα έχουμε ότι $f(y^+) := \lim_{x\to y^+} f(x) \leq \lim_{x\to \bar{y}^-} f(x) =: f(\bar{y}^-)$ οπότε πράγματι δεν μπορεί τα I_y και $I_{\bar{y}}$ να έχουν κανένα σημείο κοινό. Το ανοιχτό διάστημα I_y περιέχει σίγουρα κάποιο ρητό αριθμό (άπειρους για την ακρίβεια αλλά ας επιλέξουμε έναν απο αυτούς και ας τον συμβολίσουμε με $r(y)$. Όμοια το $I_{\bar{y}}$ περιέχει σιγουρα κάποιο ρητό αριθμό ας τον συμβολίσουμε με $r(\bar{y})$. Εφόσον $I_y \cap I_{\bar{y}} = \emptyset$ έχουμε ότι $r(y) \neq r(\bar{y})$. Ο παραπάνω συλλογισμός ισχύει για όλα τα στοιχεία του A. Με τον τρόπο αυτό λοιπόν κατασκευάσαμε μια απεικόνιση $r : A \to \mathbb{Q}$ με $r(y)$ ο επιλεγμένος ρητός στο διάστημα I_y, η οποία εφόσον $r(y) \neq r(\bar{y})$ για $y \neq \bar{y}$ είναι 1-1. Το σύνολο των ρητων είναι αριθμήσιμο σύνολο και εφόσον έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε μια 1-1 απεικόνιση μεταξύ του A και ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι και το A αριθμήσιμο. ■

4.11 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 4.11.1 (Αριστερή και δεξιά παράγωγος). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Οι ποσότητες*

$$D^- f(x_0) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$D^+ f(x_0) := \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

(αν υπάρχουν) ονομάζονται **αριστερή** *και* **δεξιά** *παράγωγος της f αντιστοίχως στο σημειο $x_0 \in X$.*

Αν σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$ ισχύει ότι $D^- f(x_0) = D^+ f(x_0)$, τότε έχουμε ότι υπάρχει το όριο της $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ καθώς $x \to x_0$. Το όριο αυτό είναι η παράγωγος της f στο σημείο x_0.

Ορισμός 4.11.2. *Η $f : X \to \mathbb{R}$ είνα παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in X$ αν*

$$D^- f(x_0) = D^+ f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: Df(x_0).$$

Η ποσότητα $Df(x_0)$ ονομάζεται η παράγωγος[3] της f στο x_0. Αν το όριο αυτό υπάρχει για κάθε $x_0 \in X$ λέμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο X.

[3] Χρησιμοποιείται πολλές φορές και ο συμβολισμός $f'(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Η παραγωγισιμότητα συνδέεται με την συνέχεια.

Πρόταση 4.11.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in X$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη: Προκύπτει απο τους αντίστοιχους ορισμούς και αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Παράδειγμα 4.11.4. *Το αντίστροφο της Πρότασης 4.11.3 προφανώς δεν ισχύει. Μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι παραγωγίσιμες. Σαν παράδειγμα πάρετε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ η οποία είναι συνεχής παντού αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει ούτε και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, π.χ. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$.*

Παράδειγμα 4.11.5. *Αν μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in X$,* **δεν** *είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχης. Σκεφτείτε το παράδειγμα $X = (0, 1)$ και $f(x) = \frac{1}{x}$, η οποία είναι μεν παράγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (0, 1)$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$ (βλ. Παράδειγμα 4.7.6).*

4.12 ’λλες έννοιες συνέχειας

Ορισμός 4.12.1 (Συνέχεια Hölder και Lipschitz). *Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$, και x_0 σημείο συσσώρευσης του X. Η f ονομάζεται συνεχής κατά Hölder τάξης α, $\alpha \in (0, 1]$ στο σημείο x_0 αν υπάρχουν $C > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ωστε να ισχύει*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C\,|x - x_0|^{\alpha}, \ \ \forall \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Αν $\alpha = 1$ η f ονομάζεται συνεχής κατά Lipschitz στο $x_0 \in X$. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής κατά Hölder τάξης α σε κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε οτι είναι συνεχής κατά Hölder τάξης α στο X (αντιστοιχα Lipschitz για $\alpha = 1$).

Η συνέχεια κατά Hölder και Lipschitz μας δίνει πληροφορία σχετικά με την μεταβολη της συνάρτησης αν μεταβάλλουμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής κοντά στο x_0.

Παράδειγμα 4.12.2. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in X$, τότε ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz στο x_0. Βέβαια το αντίστροφο δεν είναι αληθινό, όπως εύκολα θα σας πείσει το παράδειγμα της $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = |x|$ η οποία είναι Lipschitz αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x = 0$*

Ορισμός 4.12.3 (Ομοιόμορφη συνέχεια Hölder και Lipschitz). *Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$, ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής κατά Hölder τάξης α, $\alpha \in (0, 1]$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ υπάρχει C έτσι ώστε να ισχύει*

$$| \ f(x_1) - f(x_2) \ | \leq C \ | \ x_1 - x_2 \ |^{\alpha}$$

Αν $\alpha = 1$ η f ονομάζεται συνεχής κατά Lipschitz.

Παράδειγμα 4.12.4. *Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής κατά Hölder για $\alpha = 1/2$ και $C = 1$, αλλά δεν είναι συνεχης κατά Lipschitz.*

Παράδειγμα 4.12.5. *Η συναρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής κατά Lipschitz.*

Παράδειγμα 4.12.6. *Μια συναρτηση που είναι ομοιόμορφα συνεχής κατά Lipschitz είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Σαν παράδειγμα μπορείτε να πάρετε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση με κλίση που η παράγωγος της απειρίζεται σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της π.χ. η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.*

Παράδειγμα 4.12.7. *Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που η παράγωγος της είναι ομοιόμορφα φραγμένη, είναι και ομοιόμορφα Lipschitz.*

Παράδειγμα 4.12.8. *Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (δηλαδή ορισμένη σε κλειστό και φραγμένο διάστημα) είναι Lipschitz τότε είναι και ομοιόμορφα Lipschitz.*

4.13 Η έννοια της κυρτότητας και η σχέση της με την συνέχεια

Μία πολύ σημαντική κατηγορία συναρτήσεων είναι οι κυρτές συναρτήσεις.

Ορισμός 4.13.1. *Μιά συναρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **κυρτή** *συνάρτηση αν ισχύει η ιδιότητα*

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in X \text{ και } \forall \lambda \in (0,1). \tag{4.14}$$

Αν η ανισότητα (4.14) ισχύει **αυστηρά** *τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι* **αυστηρά κυρτή**.
Μία συνάρτηση f ονομάζεται **κοίλη** *αν η $-f$ είναι κυρτή.*

Η γεωμετρική ερμηνεία της κυρτότητας είναι η ακόλουθη: Μία συνάρτηση είναι κυρτή αν το γράφημα της έχει την ιδιότητα, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία A και B του γραφήματος να βρίσκεται επάνω απο την καμπύλη $y = f(x)$. Ένας εναλλακτικός τρόπος να το γράψουμε αυτό ειναι και ο ακόλουθος: Ας πάρουμε το σύνολο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ τότε αν $z_1, z_2 \in A$ θα ισχύει και $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in A$ για κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Παράδειγμα 4.13.2. *Παραδείγματα κυρτών συναρτήσεων είναι οι $f(x) = x^2$, $f(x) =\mid x \mid$, $f(x) = e^x$, $f(x) = -ln(x)$.*

Η κυρτότητα εξασφαλίζει και την συνέχεια.

Πρόταση 4.13.3. *Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και στο σημειο $x_0 \subset X$ υπάρχει κάποιο $C \in \mathbb{R}$ και $\delta^* > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq C$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset X$. Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη: Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ και $\epsilon^* > 0$ και παρατηρούμε ότι[4] $x = (1-\epsilon^*)x_0 + \epsilon^* \left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)$, δηλαδη το x εκφράστηκε σαν ο κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*} \in X$ και λόγω της κυρτότητας της f η (4.14) δίνει

$$f(x) = f\left((1-\epsilon^*)x_0 + \epsilon^* \left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)\right) \leq (1-\epsilon^*) f(x_0) + \epsilon^* f\left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right),$$

και αναδιατάσσουμε την ανισότητα αυτη με την μορφή

$$f(x) - f(x_0) < -\epsilon^* f(x_0) + \epsilon^* f\left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) \leq \epsilon^* |f(x_0| + \epsilon^* \left|f\left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)\right| \leq 2C\epsilon^* \tag{4.15}$$

αν υποθέσουμε οτι $x_0, x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*} \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ εφόσον η f είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα αυτό απο την εκφώνηση. Εύκολα βλέπουμε ότι η υπόθεση αυτή ισχύει αρκεί $|x - x_0| < \epsilon^* \delta^*$.

Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε το x_0 σαν τον κυρτό συνδυασμό[5] $x_0 = \frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*}\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) + \frac{1}{1+\epsilon^*} x$, και λόγω της κυρτότητας της f η (4.14) δίνει

$$f(x_0) = f\left(\frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*}\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) + \frac{1}{1+\epsilon^*} x\right) \leq \frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*} f\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) + \frac{1}{1+\epsilon^*} f(x),$$

η οποία μετά απο αναδιάταξη παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$f(x) - f(x_0) \geq \epsilon^* f(x_0) - \epsilon^* f\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) \geq -\epsilon^* |f(x_0| - \epsilon^* \left|f\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)\right| \geq -2C\epsilon^*, \tag{4.16}$$

αν υποθέσουμε ότι $x_0, x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*} \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ εφόσον η f είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα αυτό απο την εκφώνηση. Εύκολα βλέπουμε ότι η υπόθεση αυτή ισχύει αρκεί $|x - x_0| < \epsilon^* \delta^*$.

Συνδυάζοντας τις (4.15) και (4.16) παίρνουμε ότι

$$-2C\epsilon^* \leq f(x) - f(x_0) \leq 2C\epsilon^*$$

άρα

$$|f(x) - f(x_0| \leq 2C\epsilon^*, \text{ για } |x - x_0| < \epsilon^* \delta^*. \tag{4.17}$$

Αυτό μας εξασφαλίζει και την συνέχεια της f στο x_0. Για να ολοκληρώσετε την απόδειξη, θυμηθείτε οτι το ϵ^* είναι αυθαίρετο και οσοδήποτε μικρό. Αν ονομάσουμε λοιπόν $\epsilon := 2C\epsilon^*$ το ϵ είναι αυθαιρετα μικρό εφόσον και το ϵ^* μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό. Για κάθε $\epsilon > 0$ λοιπόν η (4.17) μας εξασφαλίζει την ύπαρξη $\delta > 0$ (το $\delta = \epsilon^* \delta^* = \frac{2C\delta^*}{\epsilon}$) τέτοιο ωστε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta$. ■

[4]Για να το δούμε αυτο γράφουμε $x = (1-\epsilon^*)x_0 + \epsilon^* y$ και λύνουμε ως προς y.

[5]Για να το δούμε αυτό γράφουμε $x_0 = \frac{1}{1+\epsilon^*} x + \frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*} y$ και λύνουμε ως προς y.

Πρόταση 4.13.4. *Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και στο σημειο $x_0 \subset X$ υπάρχει κάποιο $C \in \mathbb{R}$ και $\delta^* > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq C$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset X$. Τότε, για κάθε $\epsilon \in (0, \delta^*)$ η f είναι Lipschitz στο $(x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* + \epsilon))$.*

Απόδειξη: Θα προχωρήσουμε τροποποιώντας κατάλληλα τα βήματα της απόδειξης για την συνέχεια. Ας πάρουμε οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* - \epsilon))$. Το $z = x_2 + \frac{\epsilon}{|x_2 - x_1|}(x_2 - x_1)$ έχει την ιδιότητα $z \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$. Επίσης, $x_2 \in (x_1, z)$. Παρατηρούμε ότι το x_2 μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός των x_1, z με την μορφή $x_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon + |x_2 - x_1|} x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{\epsilon + |x_2 - x_1|} z$, οπότε χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f

$$f(x_2) = f\left(\frac{\epsilon}{\epsilon + |x_2 - x_1|} x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{\epsilon + |x_2 - x_1|} z\right) \leq \frac{\epsilon}{\epsilon + |x_2 - x_1|} f(x_1) + \frac{|x_2 - x_1|}{\epsilon + |x_2 - x_1|} f(z),$$

η οποία μετά απο αναδιάταξη γίνεται

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{|x_2 - x_1|}{\epsilon}(f(z) - f(x_2)) \leq \frac{|x_2 - x_1|}{\epsilon}(|f(z)| + |f(x_2)|) \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|$$

'ρα, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* - \epsilon))$ ισχύει ότι

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|. \tag{4.18}$$

Εναλλάσοντας τον ρόλο των x_1 και x_2, παίρνουμε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|. \tag{4.19}$$

Συνδυάζοντας τις (4.18) και (**;;**) καταλήγουμε στην

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|,$$

που είναι η συνθήκη Lipschitz για την f στο $(x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* + \epsilon))$. ■

Η ιδιότητα της συνέχειας των κυρτών συναρτήσεων μας εξασφαλίζει την καλή συμπεριφορά τους σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

Οι κυρτές συναρτήσεις **δεν** είναι απαραίτητα παραγωγίσιμες αλλά έχουν αριστερή και δεξιά παράγωγο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των.

Πρόταση 4.13.5. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $X = (a, b)$ τότε για κάθε $x \in (a, b)$ υπάρχουν οι αριστερές και δεξιές παράγωγοι $D^+ f(x)$ και $D^- f(x)$.*

Απόδειξη: Αν πάρουμε οποιαδήποτε x_0, x_1, x_2 τέτοια ώστε $a < x_0 < x_1 < x_2 < b$ χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f, και με παρόμοιο τρόπο όπως και στις άλλες μας αποδείξεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &\leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \\ \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} &\leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Οι ανισότητες αυτές μας εξασφαλίζουν για κάθε $x \in (a, b)$, ο λόγος $\varphi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε $h > 0$ τόσο μικρό ώστε $x + h \in (a, b)$ και ο λόγος $\psi(h) := \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για $h > 0$ αρκετά μικρό ώστε $x - h \in (a, b)$. Παίρνοντας το όριο $h \to 0^+$ στην συνάρτηση $\phi(h)$, το οποίο είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει λόγω της μονοτονίας της φ, εξασφαλίζουμε την υπαρξη της $D^+ f(x)$. Όμοια παίρνοντας το όριο $h \to 0^+$ στην συναρτηση ψ εξασφαλίζουμε την ύπαρξη της $D^- f(x)$ (βλ. Πρόταση 4.10.2). ■

4.14 Τα όρια συναρτήσεων για $x \to \infty$ ή για $x \to -\infty$ και γενικευμένα όρια

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει σε μια συνάρτηση όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής μπορεί να γίνουν πάρα πολύ μεγάλες ($x \to \infty$) ή πάρα πολύ μικρές ($x \to -\infty$).

Ορισμός 4.14.1. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. *Λέμε ότι* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $x > M$ *να ισχύει* $| f(x)-L |< \epsilon$.
2. *Λέμε ότι* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $x < -M$ *να ισχύει* $| f(x) - L |< \epsilon$.

Παράδειγμα 4.14.2. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = e^{-x^2}$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Μπορούμε να δείξουμε με βάση τον παραπάνω ορισμό οτι*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τα γενικευμένα όρια μιας συνάρτησης f για $x \to x_0$.

Ορισμός 4.14.3. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ *και* x_0 *σημείο συσσώρευσης του* X.

1. *Λέμε ότι* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $x_0 - \delta < x < x_0$ *να ισχύει* $f(x) > M$.
2. *Λέμε ότι* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *να ισχύει* $f(x) > M$.
3. *Λέμε ότι* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $x_0 - \delta < x < x_0$ *να ισχύει* $f(x) < -M$.
4. *Λέμε ότι* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *να ισχύει* $f(x) < -M$.

Παράδειγμα 4.14.4. *Δίνεται η συνάρτηση* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, *με* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Ισχύει* $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.

4.15 Εφαρμογές στις πιθανότητες και την στατιστική

Υπάρχουν πάρα πολλές εφαρμογές των συνεχών και των κυρτών συναρτήσεων στις πιθανότητες και την στατιστική. Οι ιδιότητες που περιγράψαμε εδώ, χρησιμοποιούνται ουσιαστικά για την επίλυση σημαντικών προβλημάτων που προκύπτουν στην θεωρία πιθανοτήτων και την στατιστική, όπως θα φανεί και απο τα παρακάτω παραδειγματα.

4.15.1 Η συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων είναι μία δεξιά συνεχής συνάρτηση

Ας πάρουμε μία πραγματική τυχαία μεταβλητή X και ας ορίσουμε την συνάρτηση κατανομής $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σύμφωνα με την σχέση

$$F(x) := P(X \leq x), \ \ x \in \mathbb{R}$$

Από τον ορισμό της η συνάρτηση αυτή βλέπουμε ότι είναι μία συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.
Η συνάρτηση αυτή απο τον ορισμό της είναι αύξουσα (μη φθίνουσα) και δεξιά συνεχής.
Αν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.

Παράδειγμα 4.15.1. *Ας πάρουμε την τυχαία μεταβλητή* X, *η οποία μπορεί να πάρει τις τιμές* 0 *και* 1 *με πιθανότητα* p *και* $1 - p$ *αντίστοιχα.*
Για την συνάρτηση κατανομής έχουμε ότι

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x < 0 \\ p & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{αν} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεξιά συνεχής και φυσικά μη φθίνουσα.

Παράδειγμα 4.15.2. *Ας υποθέσουμε ότι X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο β. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση κατανομής είναι η $F(x) = 1-^{-\beta x}$ η οποία είναι μία συνεχής συνάρτηση του x.*

Οι ιδιότητες της F εξασφαλίζουν την αντιστρεψιμότητα της και ενδεχομένως και την συνέχεια της αντιστρόφου. Η αντίστροφη συνάρτηση της F σχετίζεται με τα **ποσοστημόρια (quantiles** της κατανομής.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποια συνεχή τυχαία μεταβλητή X η συνάρτηση κατανομής F είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x. Τότε υπάρχει η F^{-1} και είναι επίσης γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επειδή $F(x) \in [0,1]$ λόγω των ιδιοτήτων της F, η εξίσωση $F(x) = \alpha$ θα εχει λύση για κάθε $\alpha \in (0,1)$. Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι πολύ σημαντική για τον καθορισμό των επιπέδων εμπιστοσύνης σε διάφορα στατιστικά πειράματα.

Παράδειγμα 4.15.3. *Ας υποθέσουμε ότι οι πιθανές ζημιές μιάς επιχείρησης μπορεί να περιγραφούν απο μία τυχαία μεταβλητή X, η οποία είναι συνεχής. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η συνάρτηση κατανομής είναι γνησίως αύξουσα.*
Μπορεί κανείς να ενδιαφερθεί να βρεί πια θα είναι η μεγαλύτερη δυνατή απώλεια που μπορεί να έχει η επιχείρηση αυτή με κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης α. Αυτό σημαίνει ότι ζητάμε να βρούμε ένα αριθμό x τέτοιο ώστε

$$P(X \leq x) = \alpha$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την αλγεβρική εξίσωση $F(x) = a$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντοτε λύση, λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της F. Μάλιστα η λύση αυτή μπορεί να εκφραστεί και ως $x = F^{-1}(a)$.
Η ποσότητα x, σχετίζεται με μία ποσότητα που ονομάζεται **αξία στον κίνδυνο** *(value at risk) και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην διαχείριση κινδύνου.*

4.15.2 Η ροπογεννήτρια είναι μία συνεχής συνάρτηση

Ας θεωρήσουμε μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X η οποία μπορεί να πάρει πεπερασμένες το πλήθος τιμές x_i με πιθανότητα $P(X = x_i) = p_i$.
Για κάθε $t \in [0,1]$ μπορούμε να ορίσουμε την ροπογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τον τύπο

$$\psi(t) = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} t^k X^k]$$

αρκεί να ορίζονται οι ροπές $\mathbb{E}[X^k]$.
Η συνάρτηση $\psi(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t.
Για να το δούμε αυτό ας πάρουμε μία ακολουθία $t_n \to t$, και να δούμε την ακολουθία $\psi(t_n) = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} t_n^k X^k] = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} x_i^k \, p_i t_n^k$. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Lebesgue για τις σειρές μπορούμε να δούμε ότι $\lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = \psi(t)$ οπότε εξασφαλίζεται η συνέχεια.

4.15.3 Συνεχείς συναρτήσεις και εκτιμητική

Πολλές φορές στην στατιστική, έχουμε δεδομένα $X_1, \cdots, X_n$ τα οποία θεωρούμε είναι δείγματα απο μια οικογένεια κατανομών με πυκνότητα $f(x,;\theta)$ που χαρακτηρίζεται απο μία μονοδιάστατη παράμετρο $\theta \in A$ όπου A κάποιο διάστημα.
Με την χρήση της $f(x;\theta)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την απο κοινού πυκνότητα πιθανοτητας των παρατηρούμενων δεδομένων,

$$L(\theta) := f(X_1, \cdots, X_n; \theta)$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας** και θεωρείται ως μία συνάρτηση της παραμέτρου θ.
Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, συνίσταται στο να επιλέξουμε την τιμή αυτή της παραμέτρου θ που μεγιστοποιεί την συνάρτηση αυτή, δηλαδή

$$\theta^* = arg \max_{\theta} L(\theta)$$

Αν η συνάρτηση $L(\theta)$ είναι συνεχής στο διάστημα A, τότε το θεώρημα του μεγίστου εξασφαλίζει ότι υπάρχει θ^* τέτοιο ώστε $L(\theta^*) = \max_\theta L(\theta)$ συνεπώς μπορεί να γίνει η εκτίμηση του μοντέλου.

Παράδειγμα 4.15.4. *Ας θεωρήσουμε δεδομένα X_i, $i = 1, \cdots, n$, τα οποία θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητα δείγματα απο την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Η παράμετρος σ είναι μία άγνωστη παράμετρος που θέλουμε να εκτιμήσουμε απο τα δεδομένα. Θεωρούμε ότι η $\sigma \in [a, b]$.*
Λόγω της ανεξαρτησίας, η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο με την μορφή

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

ή μετά απο κάποιες πράξεις ως

$$L(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 + n\,\bar{x}^2}{2\sigma^2}\right)$$

όπου $\bar{x}$ είναι ο δειγματικός μέσος.

Η συνάρτηση αυτή είναι μία συνεχής συνάρτηση του σ, για $\sigma \in [a, b]$, $a > 0$. Συνεπώς επιτυγχάνει το $\sup$ *της για κάποιο σ^*. Αυτή είναι και η τιμή του σ που θα επιλέξουμε στο μοντέλο μας.*

Παράδειγμα 4.15.5. *Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα N φορές και παρατηρούμε ότι έχουμε φέρει συνολικά M φορές κορώνα όπου $M < N$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα p το νόμισμα σε μία ρίψη να φέρει κορώνα.*
Τα δεδομένα μας αντιστοιχούν στο γεγονός ότι σε N ανεξάρτητες ρίψεις ήρθαν M φορές κορώνα (με οποιαδήποτε σειρά). Η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός, είναι η

$$L(p) = \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} p^M \, (1-p)^{N-M}$$

Αυτή είναι μία συνεχής συνάρτηση του p, η οποία έχει μέγιστο στο διάστημα $[0, 1]$. Η τιμή του p στην οποία επιτύγχάνεται το μέγιστο είναι και η τιμή που ζητάμε.

4.15.4 Κυρτές συναρτήσεις στις πιθανότητες και την στατιστική

Αν η f είναι μία κυρτή συνάρτηση τότε μπορούμε να δούμε ότι

$$f(p_1\, x_1 + \cdots + p_n\, x_n) \leq p_1\, f(x_1) + \cdots + p_n\, f(x_n)$$

για $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, \cdots, n$ και $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
Αν υποθέσουμε ότι η X είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $P(X = x_i) = p_i$ η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφει ως

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f\left(\mathbb{E}[X]\right)$$

Η ανισότητα αυτή ονομάζεται ανισότητα του Jensen και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις πιθανοτητες και την στατιστική, αλλά και στα οικονομικά.

Παράδειγμα 4.15.6. *Μία απλή εφαρμογή της ανισότητας Jensen μας δίνει ότι*

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \geq \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$$

για τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές αυστηρά μεγαλύτερες του 0.

4.16 Σημαντικοτερα σημεία του κεφαλαίου

- Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης.
- Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας και η σχέση της με την συνέχεια (το Θεώρημα του Heine).
- Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων: Το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα του μεγίστου του Weierstrass.
- Κυρτές συναρτήσεις και σχέση τους με τις συνεχείς συναρτήσεις.
- Συνεχείς κατά Lipschitz συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 5

Το ολοκλήρωμα *Riemann – Stieltjes*

5.1 Εισαγωγή

Η θεωρία της ολοκλήρωσης του Stieltjes αποτελεί μία πολύ ενδιαφέρουσα γενίκευση της θεωρίας της ολοκλήρωσης του Riemann. Η θεωρία του Riemann προσπαθούσε να δώσει έννοια στο όριο αθροισμάτων της μορφής $\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$ για κάποια συνεχή συνάρτηση $f(t)$, και $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$. Τα όρια αυτά έχουν την φυσική σημασία του εμβαδού κάτω απο μία καμπύλη. Την θεωρία αυτή την συναντήσαμε στον Μαθηματικό Λογισμό, όπου συμβολίσαμε το όριο αυτό σαν το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$ και μελετήσαμε τις ιδιότητες του. Η θεωρία του Stieltjes προσπαθεί να δώσει έννοια στο όριο αθροισμάτων της μορφής $f(t_i^*)(g(t_{i+1}) - g(t_i))$ για κάποιες συναρτήσεις f, g. Η γενίκευση αυτή είναι ενδιαφέρουσα σε πολλές εφαρμογές όπως θα δούμε παρακάτω, κυρίως στην στατιστικη. Το όριο αυτό, αν υπάρχει, θα συμβολίζεται με το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dg(t)$ το οποίο και ονομάζεται ολοκλήρωμα Stieltjes . Είναι σημαντικό να δούμε κάτω απο ποιές προυποθέσεις το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται, δηλαδή ποιές θα πρέπει να είναι οι ιδιότητες που θα ικανοποιούν οι f και g έτσι ώστε το όριο αυτό να είναι καλά ορισμένο.

Το ολοκλήρωμα Stieltjes είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε περιπτώσεις όπου έχουμε κατανομές που συνδυάζουν διακριτό και συνεχές μέρος. Οι εφαρμογές του ολοκληρώματος Stieltjes στην στατιστική είναι πολλές, π.χ στην θεωρία των ροπών, στην θεωρία της ολοκλήρωσης επάνω στις διαδικασίες Poisson κ.α. Σαν ένα πολύ απλό παράδειγμα για να εισάγουμε την έννοια του ολοκληρώματος κατά Stieltjes ας δούμε το επόμενο.

Παράδειγμα 5.1.1. *Ας υποθέσουμε ότι η τιμή μιας μετοχής την χρονική στιγμή t, δίνεται απο την συνάρτηση $S(t)$, η οποία επιτρέπεται να κάνει άλματα. Ένας επενδυτής, έχει στην κατοχή του την χρονική στιγμή t_i, $\theta(t_i)$ κομμάτια της μετοχής αυτής, και κρατάει αυτή την θέση για το χρονικό διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Η μεταβολή της τιμής της μετοχής στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ θα είναι $S(t_{i+1}) - S(t_i)$. Η συνολική μεταβολή του πλούτου του επενδυτή απο την αλλαγή της τιμής στο διάστημα αυτό θα είναι $\Delta V(t_i) = \theta(t_i)\,(S(t_{i+1}) - S(t_i))$. Αν θέλουμε να δούμε το πλούτο του επενδυτή αυτού στο τέλος του χρονικού διαστήματος $[0, T]$ μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα $[0, T]$ σε μικρά διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$ και να αθροίσουμε τις μεταβολές $\Delta V(t_i)$ επάνω σε όλα τα επιμέρους διαστήματα. Συνεπώς,*

$$V(T) = V(0) + \sum_{i=1}^{n} \Delta V(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \theta(t_i)\,(S(t_{i+1}) - S(t_i))$$

και στο όριο που τα διαστήματα αυτά μπορεί να γίνουν απειροστά, να γράψουμε αυτό (φορμαλιστικά) σαν το ολοκλήρωμα $\int_0^T \theta(t)\,dS(t)$.

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε μια λεπτομερή μελέτη του ολοκληρώματος Stieltjes και των ιδιοτήτων του. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στους Johnsonbaugh and Pfaffenberger (1981), Rudin (1964), Labarre (2008).

5.2 Διαμερίσεις και εκλεπτύνσεις

Ορισμός 5.2.1. *Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Το πεπερασμένο σύνολο $P := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset [a, b]$ ονομάζεται* **διαμέριση** *του διαστήματος $[a, b]$.*

Ορισμός 5.2.2. *Έστω P και P' δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[a,b]$ τέτοια ώστε $P \subset P'$. Τότε λέμε ότι η P' είναι μία* **εκλέπτυνση** *της P.*

Ο παραπάνω ορισμός, μας λέει ότι η διαμέριση P' χωρίζει το διάστημα $[a,b]$ σε πιο μικρά κομμάτια, από ότι η P. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό αφού το σύνολο P' περιέχει πιο πολλά στοιχεία από το σύνολο P.

Παράδειγμα 5.2.3. *Ας παρουμε το διάστημα $[a,b]$ και δεδομένο φυσικό αριθμό n. Θεωρείστε τα $x_i^n = a + \frac{(b-a)}{n} i$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Τα $x_i^n \in [a,b]$ για όλα τα $i = 0, 1, \cdots, n$ και ισχύει $a = x_0^n < x_1^n < \cdots < x_n^n = b$. Συνεπώς, το σύνολο $P_n = \{x_0^n, x_1^n, \cdots, x_n^n\}$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$. Η διαμέριση αυτή γίνεται σε $n+1$ διαστήματα ίσου μήκους.*

Παράδειγμα 5.2.4. *Στα πλαίσια του Παραδείγματος 5.2.3, θεωρείστε τις διαμερίσεις P_n και P_m. Αν $n = pm$ για κάποιο φυσικό αριθμό p, τότε $P_m \subset P_n$ συνεπώς η διαμέριση P_n είναι εκλέπτυνση της P_m. Τι γίνεται αν έχουμε γενικά ότι $m < n$;*

5.3 Το ολοκληρωμα *Stieltjes* για μονότονο ολοκληρωτή

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes $\int_a^b f(x)dg(x)$. Η συνάρτηση g επάνω στην οποία ολοκληρώνουμε ονομάζεται πολλές φορές και **ολοκληρωτής**.

Για τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes θα χρειαστούμε δύο βασικές έννοιες, το άνω ολοκλήρωμα και το κάτω ολοκλήρωμα. Σε όλη τη διάρκεια της παραγράφου αυτής θεωρούμε ότι η συνάρτηση g είναι **αύξουσα**.

Ορισμός 5.3.1 ('νω και κάτω άθροισμα). *Έστω μία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ του διαστήματος $[a,b]$ και*

$$m_i := \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1, \cdots, n$$

1. *Η ποσότητα $U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i(g(x_i) - g(x_{i-1}))$ καλείται το* **άνω άθροισμα** *της f ως προς την g για την διαμέριση P.*

2. *Η ποσότητα $L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i(g(x_i) - g(x_{i-1}))$ καλείται το* **κάτω άθροισμα** *της f ως προς την g για την διαμέριση P.*

Είναι προφανές ότι η τιμή που παίρνει το άνω άθροισμα και το κάτω άθροισμα της f ως προς την g εξαρτάται (εν γένει) απο την διαμέριση την οποία έχουμε επιλέξει.

Παράδειγμα 5.3.2. *Έστω $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$. Ας θεωρήσουμε τις διαμερίσεις $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ και $P' = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Προφανώς $P \subset P'$.*

Για τη διαμέριση P έχουμε ότι $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $M_1 = \frac{1}{2}$, $M_2 = 1$, συνεπώς,

$$\begin{aligned} L(f,P) &= 0\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right) + \frac{1}{2}\left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{8} \\ U(f,P) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right) + 1\left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Εργαστείτε μόνοι σας με τον ίδιο τρόπο για την διαμέριση P'.

Ορισμός 5.3.3 ('νω και κάτω ολοκλήρωμα Stieltjes).

1. *Έστω $\mathcal{U}$ το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων της f επάνω στην g, για όλες τις πιθανές διαμερίσεις του διαστήματος $[a,b]$, δηλαδή*

$$\mathcal{U} = \{U(f,P) \mid \text{για κάποια διαμέριση } P\}$$

Το $\inf$ του συνόλου $\mathcal{U}$ ονομάζεται το **άνω ολοκλήρωμα Stieltjes** *της συνάρτησης f ως προς την συνάρτηση g και συμβολίζεται $\overline{\int_a^b} f\,dg$, δηλαδή*

$$\overline{\int_a^b} f\,dg := \inf \mathcal{U}$$

2. *Έστω $\mathcal{L}$ το σύνολο όλων των κάτω αθροισμάτων της f επάνω στην g για όλες τις πιθανές διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$, δηλαδή*

$$\mathcal{L} = \{L(f, P) \mid \textit{για κάποια διαμέριση } P\}$$

Το sup *του συνόλου $\mathcal{L}$ ονομάζεται το* **κάτω ολοκλήρωμα Stieltjes** *της συνάρτησης f ως προς την συνάρτηση g και συμβολίζεται $\underline{\int_a^b} f\, dg$, δηλαδή,*

$$\underline{\int_a^b} f\, dg := \sup \mathcal{L}$$

Εν γένει το άνω ολοκλήρωμα Stieltjes και το κάτω ολοκλήρωμα Stieltjes δεν συμπίπτουν. Το κατά πόσο συμπίπτουν εξαρτάται απο την συνάρτηση f και την συνάρτηση g.

Ορισμός 5.3.4. *Έστω f και g δύο συναρτήσεις. Αν*

$$\underline{\int_a^b} f\, dg = \overline{\int_a^b} f\, dg \tag{5.1}$$

λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes** *και η κοινή τιμή* (5.2) *ονομάζεται το* **ολοκλήρωμα κατά Stieltjes** *της f ως προς την g.*

Παράδειγμα 5.3.5. *Ας υποθέσουμε ότι P είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ και P' μια εκλέπτυνση της, δηλαδη $P \subset P'$. Ισχύει ότι*

$$U(f, P') \leq U(f, P), \ \ \textit{και} \ \ L(f, P') \geq L(f, P),$$

δηλαδή το άνω άθροισμα μικραίνει όταν παίρνουμε εκλεπτύνσεις της διαμέρισης και το κάτω άθροισμα μεγαλώνει. Με την λογική αυτή, αν παίρνουμε όλο και λεπτότερες διαμερίσεις τελικά θα αναμένουμε το άνω άθροισμα να συγκλίνει στο inf *του συνόλου των άνω αθροισμάτων και το κάτω άθροισμα να συγκλίνει στο* sup *του συνόλου των κάτω αθροισμάτων.*

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό αυτό παρατηρούμε οτι αρκεί να το δείξουμε στην περίπτωση όπου $P' = P \cup \{t_1\}$ όπου $t_1 \in [x_{r_1}, x_{r_1+1}]$ για κάποιο $r_1 = 1, \cdots, n$. Στην περίπτωση αυτή

$$U(f, P') = \sum_{i=1}^{r_1} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) + M'_{r_1}(g(t_1) - g(x_{r_1}) + M''_{r_1}(g(x_{r_1+1}) - g(t_1)) + \sum_{i=r_1+2}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

και

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{r_1} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) + M_{r_1}(g(x_{r_1+1}) - g(x_{r_1})) + \sum_{i=r_1+2}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{r_1} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})) + M_{r_1}(g(t_1) - g(x_{r_1}) + M_{r_1}(g(x_{r_1+1}) - g(t_1)) + \sum_{i=r_1+2}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})), \end{aligned}$$

όπου

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \ \ M'_{r_1} = \sup_{x \in [x_{r_1}, t_1]} f(x), \ \ M''_{r_1} = \sup_{x \in [t_1, x_{r_1+1}]} f(x).$$

Αφαιρώντας κατά μελη παίρνουμε

$$U(f, P) - U(f, P') = (M_{r_1} - M'_{r_1})(g(t_1) - g(x_{r_1}) + (M_{r_1} - M''_{r_1})(g(x_{r_1+1}) - g(t_1)) \geq 0,$$

εφόσον

$$M_{r_1} \geq M'_{r_1}, \ \ M_{r_1} \geq M''_{r_1}, \ \ g(t_1) \geq g(x_{r_1}), \ \ g(x_{r_1+1}) \geq g(t_1).$$

Στην γενικότερη περίπτωση έστω $P' = P \cup \{t_1, \cdots, t_m\} = ((P \cup \{t_1\}) \cup \{t_2\}) \cup \cdots \cup \{t_m\}$ με $t_j \in [x_{r_j}, x_{r_j+1}]$, $r_j = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$. Η απόδειξη ανάγεται στο να εφαρμόσουμε m φορές το παραπάνω αποτέλεσμα. Ομοίως για τα κάτω αθροίσματα, όμως τώρα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα m_{r_j} και m'_{r_j}, m''_{r_j} ικανοποιούν τις ανάποδες ανισότητες.

Παράδειγμα 5.3.6. *Εν γένει αναμένουμε να ισχύει*

$$\underline{\int_a^b} f\,dg \le \overline{\int_a^b} f\,dg\,.$$

Πράγματι, παρατηρούμε οτι για οποιεσδηποτε διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a,b]$ ισχύει $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$ (ανεξάρτητα αν η P_1 είναι εκλέπτυνση της P_2 ή οχι). Για να το δούμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν P_1 και P_2 είναι διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε και $P' = P_1 \cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και μάλιστα $P_1 \subset P'$ και $P_2 \subset P'$. Απο το Παράδειγμα 5.3.5

$$L(f,P_1) \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P_2).$$

Εφόσον λοιπόν για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις P_1, P_2 ισχύει ότι $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$, αν πάρουμε το $\sup$ επάνω σε όλες τις διαμερίσεις P_1 απο τα αριστερά θα έχουμε ότι η ανισότητα ικανοποιείται για το κάτω ολοκλήρωμα, $\underline{\int_a^b} f\,dg \le U(f,P_2)$, και μετά αν πάρουμε το $\inf$ επάνω σε όλες τις διαμερίσεις P_2 απο τα δεξιά καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Εν γένει λοιπόν το άνω ολοκλήρωμα Stieltjes και το κάτω ολοκλήρωμα Stieltjes δεν συμπίπτουν. Το κατά πόσο συμπίπτουν εξαρτάται απο την συνάρτηση f και την συνάρτηση g.

Ορισμός 5.3.7. *Έστω f και g δύο συναρτήσεις. Αν*

$$\underline{\int_a^b} f\,dg = \overline{\int_a^b} f\,dg \tag{5.2}$$

λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes** *και η κοινή τιμή* (5.2) *ονομάζεται το* **ολοκλήρωμα κατά Stieltjes** *της f ως προς την g.*

5.4 Το ολοκληρωμα *Stieltjes* για μονότονο ολοκληρωτή: Υπαρξη

Θα μελετήσουμε πρώτα την κατασκευή του ολοκληρώματος Stieltjes στην περίπτωση που η συνάρτηση g είναι **αύξουσα** συνάρτηση. Η περίπτωση αυτή θα μας βοηθήσει στην κατασκευή του ολοκληρώματος για γενικότερους ολοκληρωτές. Επιπλέον, η ειδική περίπτωση όπου η g είναι αύξουσα συνάρτηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τις εφαρμογές του ολοκληρώματος Stieltjes στην στατιστική και τις πιθανότητες, όπου το ολοκλήρωμα επάνω στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής (η οποία είναι μία αύξουσα συνάρτηση) ερμηνεύεται ως η μέση τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής.

Η γενική συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στην περίπτωση αυτή έχει δωθεί απο τον μεγάλο μαθηματικό Georg Friedrich Bernhard Riemann ο οποίος και έθεσε τις βάσεις στην θεωρία της ολοκλήρωσης. Η συνθήκη αυτή, η οποία και ονομάζεται συνθήκη του Riemann είναι ουσιαστικά μια συνθήκη που περιορίζει την διακύμανση των τιμών της f στο διάστημα $[a,b]$. Για το λόγο αυτό ονομάζεται και συνθήκη ταλάντωσης του Riemann.

Θεώρημα 5.4.1 (Συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την g αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P \subset [a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη του Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την g. Επειδή απο τον Ορισμό 5.3.3, $\overline{\int_a^b} f\,dg = \inf \mathcal{U}$ έχουμε ότι $U(f,P) \ge \overline{\int_a^b} f\,dg$, για κάθε διαμέριση P. Επίσης, επειδή απο τον ίδιο ορισμό, $\underline{\int_a^b} f\,dg = \sup \mathcal{L}$ έχουμε ότι $L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f\,dg$. Συνεπώς,

$$\overline{\int_a^b} f\,dg - \underline{\int_a^b} f\,dg \le U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Όμως, $\underline{\int_a^b} f\,dg \le \overline{\int_a^b} f\,dg$ οπότε

$$\overline{\int_a^b} f\,dg - \underline{\int_a^b} f\,dg \ge 0$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f\,dg \, - \underline{\int_a^b} f\,dg \, < \epsilon$$

Αφού το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο και μπορεί να γίνει όσο μικρό επιθυμούμε καταλήγουμε στο ότι

$$\underline{\int_a^b} f\,dg \, = \overline{\int_a^b} f\,dg$$

συνεπώς η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την g.

Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη επάνω στην g. Ας πάρουμε οποιοδηποτε $\epsilon > 0$. Απο τον ορισμό του κάτω και του ανω ολοκληρώματος σαν sup και inf των κάτω και άνω αθροισμάτων αντίστοιχα μπορούμε να συνάγουμε την ύπαρξη δύο διαμερίσεων P_1 και P_2 αντίστοιχα τέτοιων ώστε $\underline{\int_a^b} f\,dg \, < L(f, P_1) + \frac{\epsilon}{2}$ και $\overline{\int_a^b} f\,dg \, - \frac{\epsilon}{2} < U(f, P_2)$. Ας πάρουμε τώρα την διαμέριση $P := P_1 \cup P_2$, η οποία είναι μια πιο λεπτή διαμέριση και απο την P_1 και απο την P_2. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$L(f, P) \geq L(f, P_1) \;\; U(f, P) \leq U(f, P_2),$$

οπότε

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_2) - L(f, P_1) < (\overline{\int_a^b} f\,dg \, - \underline{\int_a^b} f\,dg\,) + \epsilon = \epsilon,$$

εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη συνεπώς απο τον Ορισμό 5.3.7, $\overline{\int_a^b} f\,dg \, = \underline{\int_a^b} f\,dg$. 'ρα ισχύει η συνθήκη του Riemann. ■

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς την g.*

Απόδειξη: Για να δειξουμε οτι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς την g αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον Θεώρημα 5.4.1, ότι για την συνάρτηση αυτή ικανοποιείται η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (ή συνθήκη ταλάντωσης) του Riemann.

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής (θυμηθείτε τον Ορισμό 4.7.1 και την Πρόταση 4.7.9), δηλαδή για κάθε $\epsilon^* > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta^* > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in [a, b]$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \epsilon^*$ αν $| \, x - y \, | < \delta^*$. Ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, ας ορίσουμε $\epsilon^* = \frac{\epsilon}{[g(b) - g(a)]} > 0$ και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της ομοιόμορφης συνέχειας υπάρχει $\delta^* = \delta^*(\epsilon) > 0$[1] τέτοιο ώστε

$$| \, f(x) - f(y) \, | < \frac{\epsilon}{[g(b) - g(a)]} \;\text{ για κάθε }\; x, y \in [a, b], \;\text{ τέτοια ώστε }\; |x - y| < \delta^*.$$

Ας πάρουμε τώρα μία διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ τέτοια ώστε $x_i - x_{i-1} < \delta^*$, $i = 0, 1, \cdots, n$ και έστω

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \;\; M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{[g(b) - g(a)]}. \tag{5.3}$$

Για να το δείτε αυτό, αρκεί να θυμηθείτε το Θεώρημα του Μεγίστου του Weierstrass (βλ. Θεώρημα 4.6.2). Σύμφωνα με αυτό, εφόσον η f είναι συνεχής, θα επιτυγχάνει το sup και το inf της σε καθένα απο τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$. Ας ονομάσουμε λοιπόν $x_{*,i}$, x_i^* αντίστοιχα τα σημεία του $[x_{i-1}, x_i]$ για τα οποία ισχύει ότι $f(x_{*,i}) = m_i$ και $f(x_i^*) = M_i$. Είναι προφανές ότι $|x_{*,i} - x_i^*| < \delta^*$ κατά συνέπεια απο την ομοιόμορφη συνέχεια της f θα έχουμε ότι $|f(x_{*,i}) - f(x_i^*)| < \epsilon^*$ άρα ισχύει ο ισχυρισμός μας (5.3).

[1]Τονίζουμε ότι η ιδιότητα της ομοιόμορφης συνέχειας μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα δ^* τέτοιο ώστε η ανισοτητα αυτή να ισχύει σε όλο το διάστημα $[a, b]$ δηλαδή για κάθε $x, y \in [a, b]$.

Υπολογίζουμε τώρα την διαφορά μεταξύ του άνω αθροίσματος και του κάτω αθροίσματος Stieltjes για την διαμέριση αυτή:

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] \leq \frac{\epsilon}{[g(b)-g(a)]}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i-g(x_{i-1})] \\ &= \frac{\epsilon}{[g(b)-g(a)]}[g(b)-g(a)]=\epsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε την διαμέριση P έτσι ώστε $\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta^*$ η συνθήκη του Riemann ικανοποιείται. Απο το Θεώρημα 5.4.1 λοιπόν προκύπτει η ολοκληρωσιμοτητα της f ως προς την g. ■

Είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.2 ότι μια συνεχής συναρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη αυτή. Δεν σημαίνει όμως ότι αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής δεν μπορεί να ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann.

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με* ***πεπερασμένα*** *το πλήθος σημεία ασυνέχειας και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στα σημεία ασυνέχειας της f. Τότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς την g.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα το θεώρημα στην περίπτωση όπου έχουμε ενα σημείο ασυνέχειας έστω το $d \in [a,b]$. Εφόσον η f είναι φραγμένη, υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $-C \leq f(x) \leq C$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ας πάρουμε μια οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ωστε να περιέχει τα σημεία d και $d+\delta^*$ για κάποιο $\delta^* > 0$ το οποίο θα καθορίσουμε στην συνέχεια. Ας θεωρήσουμε λοιπόν $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ και $x_{r-1} = d$, $x_r = d+\delta^*$ για κάποιο $r < n$. Για την διαμέριση αυτή υπολογίζουμε τα $U(f,P)$ και $L(f,P)$,

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(g(x_i)-g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{r-1} M_i(g(x_i)-g(x_{i-1})) + M_r(g(d+\delta^*)-g(d)) + \sum_{i=r+1}^{n} M_i(g(x_i)-g(x_{i-1})) \\ L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(g(x_i)-g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{r-1} m_i(g(x_i)-g(x_{i-1})) + m_r(g(d+\delta^*)-g(d)) + \sum_{i=r+1}^{n} m_i(g(x_i)-g(x_{i-1})) \end{aligned}$$

και αφαιρώντας κατά μελη,

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) = \sum_{i=1}^{r-1}(M_i-m_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) + (M_r-m_r)(g(d+\delta^*)-g(d)) \\ + \sum_{i=r+1}^{n}(M_i-m_r)(g(x_i)-g(x_{i-1})) \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι εν γένει η g μπορεί να έχει σημεία ασυνέχειας αλλά έχουμε επιλέξει την διαμέριση κατά τέτοιο τρόπο ωστε να μη περιέχει κανένα σημείο ασυνέχειας της g αλλά μόνο το σημείο ασυνέχειας της f. Για όλα τα i εκτός του $i = r$ έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$. Τα διαστήματα αυτά ειναι κλειστά και φραγμένα οπότε απο την Πρόταση 4.7.9) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε $[x_{i-1}, x_i]$ εκτός απο το διάστημα που αντιστοιχεί στο $i = r$ όπου περιέχεται η ασυνέχεια της. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f για κάθε $\epsilon^* > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο δ_i τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| < \epsilon^*$ για κάθε $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \neq r$ αρκεί $|x_{i-1} - x_i| < \delta_i$. Αυτό σε συνδυασμό με Θεώρημα του Μεγίστου του Weierstrass (βλ. Θεώρημα 4.6.2) μας εξασφαλίζει ότι $M_i - m_i < \epsilon^*$ για κάθε $i \neq r$. Αν λοιπόν η διαμέριση μας έχει επιλεγεί κατά τρόπο ώστε $|x_{i-1} - x_i| < \delta_i$ για κάθε $i \neq r$, η παραπάνω διαδικασία μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την διαφορά $U(f,P) - L(f,P)$ ως

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) &\leq \epsilon^*(g(d)-g(a)) + (M_r-m_r)(g(d+\delta^*)-g(d)) + \epsilon^*(g(b)-g(d+\delta^*)) \\ &\leq \epsilon^*(g(b)-g(a)) + (M_r-m_r)(g(d+\delta^*)-g(d)). \end{aligned}$$

Ο τελευταίος ορος ο οποίος περιλαμβάνει το σημείο ασυνέχειας της f θέλει διαφορετικό χειρισμό. Στο διάστημα $[x_{r-1}, x_r] = [d, d+\delta^*]$ η συνάρτηση f δεν είναι απαραίτητο οτι επιτυγχάνει το sup και το inf λόγω της ασυνέχειας αλλά σε κάθε περίπτωση εφόσον είναι φραγμένη θα ισχύει ότι $M_r - m_r < 2C$. Εφόσον η g **δεν** έχει τα ίδια σημεία ασυνέχειας με την f, θα είναι συνεχής στο διάστημα $[x_{r-1}, x_r] = [d, d+\delta^*]$ οπότε και λόγω της Πρότασης 4.7.9 ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό. Για το ϵ^* που εχουμε επιλέξει λοιπόν θα υπάρχει κάποιο $\delta_r > 0$ τέτοιο ωστε $g(x_r) - g(x_{r-1}) = g(d + \delta^*) - g(d) < \epsilon^*$ για $x_r - x_{r-1} = \delta^* < \delta_r$. Αυτό μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε την εκτίμηση μας και να δείξουμε ότι

$$U(f,P) - L(f,P) \leq \epsilon^*(g(b) - g(a)) + 2C\epsilon^* = ((g(b) - g(a) + 2C)\,\epsilon^*. \tag{5.4}$$

Είμαστε τώρα λοιπόν έτοιμοι να ολοκληρώσουμε τον συλλογισμό μας. Έστω οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\epsilon^* := \frac{\epsilon}{g(b)-g(a)+2C}$ και επιλέγουμε μια διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset [a,b]$ τέτοια ωστε (α) να περιέχει τα σημεία $x_{r-1} = d$ και $x_r = d + \delta^*$, όπου $\delta^* > 0$ είναι τέτοιο ωστε $g(d+\delta^*) - g(d) < \epsilon^*$ (β) Για κάθε $i \neq r$, $x_i - x_{i-1} < \delta_i$ όπου $\delta_i > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| < \epsilon^*$ για κάθε $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, τέτοια ώστε $|x - y| < \delta_i$. Τα παραπάνω επιχειρήματα συνέχειας της g και f αντιστοίχως στα κατάλληλα διαστήματα μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη των δ_r και δ_i, $i \neq r$. Για την διαμέριση αυτή η εκτιμηση (5.4) μας εξασφαλίζει ότι

$$U(f,P) - L(f,P) \leq \epsilon,$$

οπότε ικανοποιείται η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann και η f είναι ολοκληρώσιμη επάνω στην g.

Στην περίπτωση όπου έχουμε πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας της f έστω το σύνολο $A = \{d_1, \cdots, d_\ell\}$ η απόδειξη είναι ανάλογη. Εκεί θα πρέπει να πάρουμε μια διαμέριση η οποία να περιέχει τα σημεια $d_1, d_1+\delta^*, d_2, d_2+\delta^*, \cdots, d_\ell, d_\ell+\delta^*$ και να επιλέξουμε το δ^* κατάλληλα. Το επιχείρημα είναι ουσιαστικά το ίδιο αλλά χρειάζεται ίσως λίγο πιο προσεκτικός τρόπος στο πως θα το εκφράσουμε έτσι ώστε να μη μπερδευτούμε πολύ με τους δείκτες. Θα πάρουμε λοιπόν μια διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ τέτοια ώστε να υπάρχουν $r_1, \cdots, r_\ell \in \{1, 2, \cdots, n\}$ τέτοια ωστε $x_{r_j - 1} = d_j$, $x_{r_j} = d_j + \delta^*$, $j = 1, \cdots, \ell$. Όπως και προηγουμένως ξεχωριζουμε απο το άθροισμα που μας δίνει τα $U(f,P)$ και $L(f,P)$ τους όρους που αντιστοιχούν στις συνεισφορές σε όλα τα διαστήματα $[x_{r_j-1}, x_{r_j}] = [d_j, d_j + \delta^*]$, οι οποίοι είναι συνολικά ℓ το πλήθος. Αυτό μας δίνει,

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{r_1-1}(M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + (M_{r_1} - m_{r_1})(g(d_1+\delta^*) - g(d_1)) \\
&+ \sum_{i=r_1+1}^{r_2-1}(M_i - m_r)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + (M_{r_2} - m_{r_2})(g(d_2+\delta^*) - g(d_2)) \\
&+ \sum_{i=r_2+1}^{r_3-1}(M_i - m_r)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + (M_{r_3} - m_{r_3})(g(d_3+\delta^*) - g(d_3)) \\
&+ \qquad \cdots \\
&+(M_{r_\ell} - m_{r_\ell})(g(d_\ell+\delta^*) - g(d_\ell)) + \sum_{i=r_\ell+1}^{n}(M_i - m_r)(g(x_i) - g(x_{i-1}))
\end{aligned}$$

Με επιχειρήματα παρόμοια οπως και προηγουμένως μπορούμε να εκτιμήσουμε την διαφορά αυτή ως

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon^*\ell(g(b) - g(a)) + 2C\epsilon^*\ell = (g(b) - g(a) + 2C)\,\ell\epsilon^*, \tag{5.5}$$

και να δείξουμε οτι η f ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann. ■

Παράδειγμα 5.4.4. *Δίνεται η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η οποία οριζεται ως*

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in [a,d), \\ f_2 & x \in [d,b], \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ασυνεχής στο $x = d$. Θεωρούμε επίσης ότι η g είναι συνεχής στο $x = d$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4.3 η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη επάνω σε μια συνάρτηση g η οποία είναι αύξουσα και συνεχής στο σημείο d. Μπορούμε να υπολογίσουμε μάλιστα και το ολοκλήρωμα της, το οποίο είναι

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f_1(g(d) - g(a)) + f_2(g(b) - g(d)).$$

Για να το δούμε αυτό ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και μια οποιαδήποτε διαμέριση

$$P_\epsilon = \{x_0, x_1, \cdots, x_{r-1} = d - \frac{\epsilon}{2}, x_r = d + \frac{\epsilon}{2}, x_{r+1}, \cdots, x_n\}.$$

Μπορούμε να δούμε οτι $L(f, P_\epsilon) = U(f, P_\epsilon) = f_1(g(d-\epsilon) - g(a)) + f_2(g(b) - g(d+\epsilon))$. Τόσο το $\sup_{P_\epsilon} L(f, P_\epsilon)$ όσο και το $\inf_{P_\epsilon} U(f, P_\epsilon)$ ταυτίζονται και μπορούν να υπολογιστούν παίρνοντας το όριο $\epsilon \to 0$ το οποίο μας δινει την ζητούμενη απάντηση.

Τι γίνεται όταν η συνάρτηση g (ολοκληρωτής) παρουσιάζει κάποια ασυνέχεια; Ακολουθώντας τον συλλογισμό της απόδειξης του Θεωρήματος 5.4.3 μπορούμε να δούμε ότι δεν αναμένουμε κάποιο πρόβλημα εφόσον η g έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας και η f είναι συνεχής στα σημεία αυτά.

Παράδειγμα 5.4.5. *Δίνεται η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, η οποία οριζεται ως*

$$g(x) = \begin{cases} g_1 & x \in [a,d), \\ g_2 & x \in [d,b], \end{cases}$$

με $g_1 < g_2$. Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα και ασυνεχής στο $x = d$. Θεωρούμε επίσης ότι η f είναι συνεχής στο $x = d$. Μπορούμε με ελάχιστες τροποποιήσεις της απόδειξης του Θεωρήματος 5.4.3 να δείξουμε ότι η συναρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επάνω στην g. Μπορούμε μάλιστα να υπολογισουμε και το ολοκλήρωμα της ως

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(d)(g_2 - g_1).$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ας θυμηθούμε τον Ορισμό 5.3.3. Εφόσον η f είναι συνεχής στο d για κάθε $\epsilon^* > 0$ υπάρχει $\delta^* > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(c)| < \epsilon^*$ για $|x - d| < \delta^*$. Μπορούμε επίσης να βρούμε και ένα κλειστό διάστημα $[x_1, x_2] \subset (d - \delta^*, d + \delta^*)$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ (άρα και ομοιόμορφα συνεχής). Συνεπώς μπορούμε να βρούμε $x_1 < x_2$ τέτοια ωστε $|f(x) - f(c)| < \epsilon^*$ για $x \in [x_1, x_2]$. Εφόσον $a < x_1 < x_2 < b$ η $P_1 = \{a, x_1, x_2, b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$. Ας υπολογίσουμε τα $U(f, P_1)$ και $L(f, P_1)$. Οριζουμε

$$M_1 = \sup_{x \in [a_1, x_1]} f(x), \;\; M_2 = \sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x), \;\; M_3 = \sup_{x \in [x_2, b]} f(x),$$
$$m_1 = \inf_{x \in [a_1, x_1]} f(x), \;\; m_2 = \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x), \;\; m_3 = \inf_{x \in [x_2, b]} f(x),$$

και σύμφωνα με τον ορισμό υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} U(f, P_1) &= M_1(g(x_1) - g(a)) + M_2(g(x_2) - g(x_1)) + M_3(g(b) - g(x_2)) = M_2(g_2 - g_1), \\ L(f, P_1) &= m_1(g(x_1) - g(a)) + m_2(g(x_2) - g(x_1)) + m_3(g(b) - g(x_2)) = m_2(g_2 - g_1). \end{aligned}$$

Απο τον ορισμό του διαστήματος $[x_1, x_2]$ και την συνέχεια ισχύει ότι

$$f(d) - \epsilon^* < f(x) < f(d) + \epsilon^*, \;\; \forall\, x \in [x_1, x_2]$$

οπότε έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες για το $\sup$ και το $\inf$ της f στο διάστημα αυτό

$$f(d) - \epsilon^* \le m_2 \le M_2 \le f(d) + \epsilon^*.$$

Αυτό μας επιτρέπει να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} U(f, P_1) &\le f(d)(g_2 - g_1) + (g_2 - g_1)\epsilon^*, \\ L(f, P_1) &\ge f(d)(g_2 - g_1) - (g_2 - g_1)\epsilon^* \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f\, dg &:= \inf_P U(f, P) \le U(f, P_1) \le f(d)(g_2 - g_1) + (g_2 - g_1)\epsilon^*, \\ \underline{\int_a^b} f\, dg &:= \sup_P L(f, P) \ge L(f, P_1) \ge f(d)(g_2 - g_1) - (g_2 - g_1)\epsilon^* \end{aligned}$$

Έστω τώρα ενα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και ας ορίσουμε $\epsilon^* = \frac{\epsilon}{g_2 - g_1} > 0$. Παρατηρούμε τότε ότι

$$\overline{\int_a^b} f\, dg \le f(d)(g_2 - g_1) + \epsilon, \;\; \underline{\int_a^b} f\, dg \ge f(d)(g_2 - g_1) + \epsilon, \;\; \forall\, \epsilon > 0,$$

απο όπου καταλήγουμε (ενθυμούμενοι επίσης ότι $\underline{\int_a^b} f\, dg \le \overline{\int_a^b} f\, dg$) στο επιθυμητό συμπέρασμα

$$\underline{\int_a^b} f\, dg = \overline{\int_a^b} f\, dg = f(d)(g_2 - g_1).$$

Είδαμε πως ακόμα και ασυνεχείς συναρτήσεις μπορεί να είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann-Stieltjes αρκεί να μην είναι 'υπερβολικά' ασυνεχείς. Τι σημαίνει όμως υπερβολικά ασυνεχείς; Αν ξαναγυρίζουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.3, βλέπουμε πως ρόλο κλειδί στην απόδειξη αυτή παίζει η εκτίμηση (5.5) που μας επιτρέπει να δείξουμε οτι η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann ισχύει. Η εκτίμηση (5.5) μας δείχνει ότι το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να έχει προβλήματα αν η συνάρτηση f δεν έχει πεπερασμένες το πλήθος ασυνέχειες, δηλαδή όταν το $\ell = \infty$.

Παράδειγμα 5.4.6. *Η συνάρτηση του Dirichlet η οποία ορίζεται ως*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

δεν *ικανοποιεί την την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann. Πραγματικά λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, για κάθε διαμεριση P έχουμε ότι $U(f,P) = g(1) - g(0)$ και $L(f,P) = 0$. 'ρα η συνθήκη του Riemann* **δεν** *ικανοποιείται.*

Η θεωρία της ολοκλήρωσης συμπληρώθηκε μερικά χρόνια μετά, στις αρχές του προηγούμενου αιώνα απο τον Henri Lebesgue ο οποίος ανέπτυξε μια διαφορετική θεωρια της ολοκλήρωσης η οποία φέρει το όνομα του, και χρησιμοποιώντας αυτή, έδειξε ότι η παραπάνω συνθήκη είναι περιοριστική. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του, επεκτείνοντας την θεωρία του Riemann έδειξε ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη ακόμα και αν έχει άπειρες αλλά αριθμήσιμες το πλήθος ασυνέχειες. Η θεωρία αυτή επιτρέπει τον ορισμό του ολοκληρώματος π.χ. της συνάρτησης Dirichlet του Παραδείγματος 5.4.6 και μάλιστα μας επιτρέπει να δείξουμε οτι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ισο με 0. Η επέκταση της θεωρίας της ολοκλήρωσης απο τον Lebesgue απαιτεί την εισαγωγή της έννοιας του μέτρου. Τόσο η έννοια του μέτρου οσο και η αντίστοιχη θεωρία ολοκλήρωσης του Lebesgue η οποία βασιζεται επάνω σε αυτή, είναι θεμελιώδεις για την Θεωρια Πιθανοτήτων και την Στατιστική, αλλά και για μια σειρά άλλων εφαρμογών οπως π.χ. η Ανάλυση σήματος και εικόνας στην πληροφορική, η Θεωρια Παιγνίων κλπ.

5.5 Θεμελιώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος: Αθροιστικότητα, γραμμικότητα και θετικότητα

Το ολοκλήρωμα του Stieltjes έχει τις εξής θεμελιώδεις ιδιότητες, οι οποίες και επιθυμούμε να χαρακτηρίζουν κάθε ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 5.5.1 (Αθροιστικότητα και γραμμικότητα).

1. *Έστω $x \in [a,b]$. Τότε*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^x f\,dg + \int_x^b f\,dg$$

2. *Έστω f_1,f_2 συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Stieltjes και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dg = \lambda_1 \int_a^b f_1\,dg + \lambda_2 \int_a^b f_2\,dg$$

Απόδειξη: 1. Για να δείξουμε την αθροιστικότητα ας πάρουμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $P \subset [a,b]$. Ορίζουμε $P' := P \cup \{x\}$ και $P_1 := P' \cap [a,x]$, $P_2 = P' \cap [x,b]$. Μπορούμε να δούμε ότι $P_1 \subset [a,x]$ και $P_2 \subset [x,b]$, διαμερίσεις των $[a,x]$ και $[x,b]$ αντίστοιχα. Εφόσον η g είναι αύξουσα και $P \subset P'$ έχουμε οτι $U(f,P) \geq U(f,P')$. Επίσης, επειδή $P' = P_1 \cup P_2$ έχουμε οτι $U(f,P') = U(f,P_1) + U(f,P_2)$ και απο τον Ορισμό 5.3.3 έχουμε οτι $U(f,P_1) \geq \overline{\int_a^x} f\,dg$ και $U(f,P_2) \geq \overline{\int_x^b} f\,dg$. Κατά συνέπεια για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a,b]$,

$$U(f,P) \geq \overline{\int_a^x} f\,dg + \overline{\int_x^b} f\,dg$$

άρα η ανισότητα ισχύει και για το inf της ποσότητας $U(f,P)$ επάνω σε κάθε διαμέριση του $[a,b]$ άρα

$$\overline{\int_a^b} f\,dg \geq \overline{\int_a^x} f\,dg + \overline{\int_a^x} f\,dg. \tag{5.6}$$

Εφόσον $P \subset P'$ και g αύξουσα έχουμε για τα κάτω αθροίσματα ότι $L(f,P') \geq L(f,P)$, και όπως και προηγουμένως $L(f,P') = L(f,P_1)+L(f,P_2)$. Επίσης απο τον Ορισμό 5.3.3 έχουμε οτι $L(f,P_1) \leq \underline{\int_a^x} f\,dg$ και $L(f,P_2) \leq \underline{\int_x^b} f\,dg$. Κατά συνέπεια για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a,b]$,

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^x} f\,dg + \underline{\int_x^b} f\,dg,$$

άρα η ανισότητα ισχύει και για το sup της ποσότητας $L(f,P)$ επάνω σε κάθε διαμέριση του $[a,b]$ άρα

$$\underline{\int_a^b} f\,dg \leq \underline{\int_a^x} f\,dg + \underline{\int_a^x} f\,dg. \tag{5.7}$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη επάνω στην g στα διαστήματα $[a,b]$, $[a,x]$ και $[x,b]$ έχουμε απο τον Ορισμό 5.3.7 ότι

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f\,dg &= \overline{\int_a^b} f\,dg = \int_a^b f\,dg,\\
\underline{\int_a^x} f\,dg &= \overline{\int_a^x} f\,dg = \int_a^x f\,dg,\\
\underline{\int_x^b} f\,dg &= \overline{\int_x^b} f\,dg = \int_x^b f\,dg.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές με τις (5.6) και (5.7) καταλήγουμε στο ζητούμενο. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη επάνω στην g στα $[a,x]$ και $[x,b]$ μπορούμε να δείξουμε ότι η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann ικανοποιείται και επάνω στο $[a,b]$.

2. Εφόσον η f_1 και η f_2 είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, θα ικανοποιούν την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann οπότε για κάθε ϵ^* θα υπάρχει μια διαμέριση $P_1 \subset [a,b]$ και $P_2 \subset [a,b]$ τέτοιες ώστε

$$U(f_1,P_1) - L(f_1,P_1) < \epsilon^*, \text{ και } U(f_2,P_2) - L(f_2,P_2) < \epsilon^*.$$

Παίρνουμε τώρα την διαμέριση $P := P_1 \cup P_2$. Για την διαμέριση αυτή μπορούμε να δείξουμε (αφήνεται σαν άσκηση) ότι

$$U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, P) - L(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, P) < C\epsilon^*,$$

για κάποια σταθερά C, άρα ο γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, ας υποθέσουμε πρώτα οτι $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Εφόσον $P \subset P_1$ θα έχουμε ότι

$$U(f_1,P) \leq U(f_1,P_1) < L(f_1,P_1) + \epsilon^* \leq \int_a^b f dg + \epsilon^*,$$

όπου πρώτα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των ανω αθροισμάτων ως προς τις εκλεπτύνσεις των διαμερίσεων, μετά το γεγονός ότι για την διαμέριση P_1 η f_1 ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann και τέλος το γεγονός ότι για κάθε διαμέριση το κάτω άθροισμα είναι μικρότερο ή ίσο του ολοκληρώματος Stieltjes. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την f_2, συνεπώς

$$U(f_i,P) < \int_a^b f_i dg + \epsilon^*, \;\; i = 1,2,$$

και αθροίζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$U(f_1,P) + U(f_2,P) < \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg + 2\epsilon^*.$$

Απο την ιδιότητα του άνω αθροίσματος να είναι για κάθε διαμέριση μεγαλύτερο απο το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_a^b (f_1+f_2)dg \leq U(f_1+f_2,P) \leq U(f_1,P) + U(f_2,P) < \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg + 2\epsilon^*,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του sup οτι $\sup_{x\in X}(f_1(x)+f_2(x)) \leq \sup_{x\in X} f_1(x) + \sup_{x\in X} f_2(x)$ για να πάρουμε την τρίτη ανισότητα. Δείξαμε λοιπόν οτι για κάθε $\epsilon^* > 0$ ισχύει

$$\int_a^b (f_1+f_2)dg < \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg + 2\epsilon^*,$$

άρα

$$\int_a^b (f_1+f_2)dg \leq \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg.$$

Με παρόμοιο τρόπο (εργαζομένοι όμως τώρα με τα κάτω αθροίσματα) μπορούμε να δείξουμε και ότι την ανάποδη ανισότητα

$$\int_a^b (f_1+f_2)dg \geq \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές ανισότητες καταλήγουμε στην ζητούμενη ισότητα στην περίπτωση όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Για την γενική περίπτωση, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\int_a^b \lambda f\, dg = \lambda \int_a bf\, dg, \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό είναι άμεσο απο τον ορισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των άνω και κάτω αθροισμάτων. ■

Θεώρημα 5.5.2 (Θετικότητα). *Ας υποθέσουμε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη επάνω στην g.*

1. *Αν $f \geq 0$ τότε $\int_a^b f dg \geq 0$.*
2. *Αν $f_1 \geq f_2$ τότε $\int_a^b f_1 dg \geq \int_a^b f_2 dg$.*

Απόδειξη: 1. Προκύπτει απο τον ορισμό του ολοκληρώματος και την ιδιότητα τόσο του κάτω όσο και του άνω αθροίσματος να είναι θετικά για οποιαδήποτε διαμέριση αν $f \geq 0$.
2. Οριζουμε την συνάρτηση $f := f_1 - f_2$ που έχει την ιδιότητα $f \geq 0$ και εφαρμόζουμε το (1) και την γραμμικότητα. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση. ■

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα του ολοκληρώματος Stieltjes, το θεώρημα της μέσης τιμής

Θεώρημα 5.5.3. *Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ και g μία αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα αυτό. Τότε, υπάρχει $x \in [a,b]$ τέτοιο ώστε*

$$\int_a^b f\, dg = f(x)\,[g(b)-g(a)]$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes ισχύει ότι

$$L(f,P) \leq \int_a^b f\, dg \leq U(f,P)$$

για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$. Συνεπώς θα ισχύει και για την διαμέριση $P = \{a,b\}$ οπότε

$$m\,[g(b)-g(a)] \leq \int_a^b f\, dg \leq M\,[g(b)-g(a)]$$

όπου

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Συνεπώς,

$$m \leq \frac{\int_a^b f\, dg}{g(b)-g(a)} \leq M$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ για οποιοδήποτε $c \in [m,M]$ θα υπάρχει κάποιο $t \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(t) = c$ (βλ. Προταση 4.5.1). 'ς επιλέξουμε $c = \frac{\int_a^b f\,dg}{g(b)-g(a)}$. Θα έχουμε λοιπόν

$$f(t) = \frac{\int_a^b f\,dg}{g(b) - g(a)}$$

απο την οποία προκύπτει και το ζητούμενο. ■

5.6 Προσέγγιση του ολοκληρώματος *Stieltjes*

Τίθεται τώρα το ενδιαφέρον ερώτημα του υπολογισμού του ολοκληρώματος Stieltjes για μία συνάρτηση f επάνω σε κάποια αύξουσα συνάρτηση g. Αν μπορέσουμε να προσεγγίσουμε το sup ή αντίστοιχα το inf των κάτω ή των άνω αθροισμάτων από ένα όριο η υπολογιστική δουλειά για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος Stieltjes θα ήταν πιο εύκολη. Θα δούμε ότι αυτό μπορεί να γίνει σε ορισμένες περιπτώσεις με την βοήθεια των αθροισμάτων Stieltjes.

Ορισμός 5.6.1. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ μία διαμέριση του $[a,b]$ και σύνολο σημείων $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ τέτοια ώστε $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $i = 1, \cdots, n$.*

1. *Σαν* **νόρμα της διαμέρισης** *ορίζεται η ποσοτητα*

$$|P| = max\{|x_i - x_{i-1}|, i = 1, \cdots, n\}$$

2. *Το άθροισμα*

$$S(f,P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

ονομάζεται **άθροισμα Stieltjes** *της f επάνω στην g για την διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ και την επιλογή σημείων $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$.*

Διαισθητικά περιμένουμε όσο η διαμέριση γίνεται πιο λεπτή, δηλαδή όσο $|P| \to 0$ τα αθροίσματα Stieltjes να τείνουν σε κάποιο όριο. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι οι f και g έχουν καλή συμπεριφορά (π.χ είναι συνεχείς) αναμένουμε το όριο αυτό να είναι ανεξάρτητο απο την επιλογή των σημείων $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ που έχουμε χρησιμοποιήσει για τον υπολογισμό του αθροίσματος Stieltjes . Η διαισθητική αυτή παρατήρηση μπορεί να μετατραπεί σε αυστηρό μαθηματικό αποτέλεσμα στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.6.2. *Ας υποθέσουμε ότι η g είναι αύξουσα συνάρτηση και η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$. Τότε*

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{|P|\to 0} S(f,P,T)$$

όπου η έκφραση $\lim_{|P|\to 0} = I$ σημαίνει ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $|P| < \delta$ και για κάθε επιλογή σημείων $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ να ισχύει $\mid S(f,P,T) - I \mid < \epsilon$.

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\mid x - y \mid < \delta$ να ισχύει

$$\mid f(x) - f(y) \mid < \frac{\epsilon}{2[g(b) - g(a)]}$$

Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ του $[a,b]$ με $\mid P \mid < \delta$ και μία οποιαδήποτε επιλογή σημείων $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ σε αυτή και υπολογίζουμε το άθροισμα Stieltjes για την επιλογή αυτή.
Στο σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την αθροιστική ιδιοτητα του ολοκληρώματος Stieltjes (βλ. Θεώρημα 5.5.1) σύμφωνα με την οποία

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg, \quad a \leq c \leq b$$

και το θεώρημα μέσης τιμής (βλ. Θεώρημα 5.5.3) σύμφωνα με το οποίο κάτω απο τις υποθέσεις μας υπάρχει κάποιο $x \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f\,dg = f(x)\,[g(b) - g(a)]$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dg = \sum_{i=1}^n f(t_i^*)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

όπου $t_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Στην παραπάνω σχέση, σπάσαμε το ολοκλήρωμα από το a στο b, σε άθροισμα ολοκληρωμάτων στα διαστήματα που ορίζει η διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, και μετά χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα μέσης τιμής για το καθένα απο αυτά. Τα σημεία t_i^* είναι τα σημεία αυτά για τα οποία ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής για το καθένα απο τα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$.
Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εκτίμηση για το ολοκλήρωμα μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|S(f,P,T) - \int_a^b f\,dg\right| &= \left|\sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_i^*)][g(x_i) - g(x_{i-1})]\right| \le \sum_{i=1}^n \mid f(t_i) - f(t_i^*) \mid [g(x_i) - g(x_{i-1})] \\ &\le \frac{\epsilon}{2[g(b) - g(a)]} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Όσο μικρότερο επιλεγεί το δ (δηλαδή η τάξη $|P|$ της διαμέρισης) τόσο μικρότερο γίνεται το ϵ. Αυτό σημαίνει οτι $\lim_{|P|\to 0} S(f,P,T) = \int_a^b f\,dg$ όπως και ισχυριζόμαστε στην εκφώνηση. ∎

Σχόλιο 5.6.3. *Η προσέγγιση του ολοκληρώματος Stieltjes απο τα αθροίσματα Stieltjes μπορεί να εκφραστεί και με εναλλακτικό τρόπο ως εξής: Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes επάνω στην g, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί μια διαμέριση P_ϵ του $[a,b]$ τέτοια ωστε για* **κάθε** *εκλέπτυνση $P \supset P_\epsilon$ να ισχύει οτι $|S(f,P,T) - \int_a^b f dg| < \epsilon$. Ο ισχυρισμός αυτός ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή αν υπάρχει κάποιος αριθμός I τέτοιος ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να μπορεί να βρεθεί μια διαμέριση P_ϵ με την ιδιότητα για κάθε εκλέπτυνση της $P \supset P_\epsilon$ να ισχύει οτι $|S(f,P,T) - I| < \epsilon$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes επάνω στην g, και μάλιστα $\int_a^b f dg = I$.*

5.7 Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες

Μπορούμε να εναλλάξουμε τον ρόλο των συναρτήσεων f και g και να συνδέσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f dg$ με το ολοκλήρωμα $\int_a^b g df$. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 5.7.1. *(**Ολοκλήρωση κατά παράγοντες**) Ισχύει ότι*

$$\int_a^b f\,dg = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g\,df$$

αρκεί τα αντίστοιχα ολοκληρώματα Stieltjes να είναι καλά ορισμένα.

Απόδειξη: Έστω οποιοδηποτε $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.6.2 και πιο συγκεκριμένα με το Σχόλιο 5.6.3, υπάρχει μια διαμεριση $P_\epsilon \subset [a,b]$ τέτοια ώστε για οποιαδήποτε άλλη εκλέπτυνση της, έστω P, ($P_\epsilon \subset P$) να ισχύει για το αντιστοιχο άθροισμα Stieltjes ότι

$$\left|S(f,P,T) - \int_a^b f dg\right| < \epsilon.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset [a,b]$, $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ είναι μια συλλογή σημείων τέτοια ώστε $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ και $S(f,P,T) = \sum_{i=1}^n f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$. Για την διαμέριση $P \subset [a,b]$ επιλέγουμε μια συλλογή σημείων $T' = \{t_1', t_2', \cdots, t_n'\}$ τέτοια ώστε $t_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ και ορίζουμε το άθροισμα Stieltjes $S(g,P,T') = \sum_{i=1}^n g(t_i')[f(x_i) - f(x_{i-1})]$ το οποίο είναι μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_a^b gdf$. Με βάση τα παραπάνω, το δεξιό μελος της ισότητας που επιθυμούμε να δείξουμε μπορεί να προσεγγιστεί απο την ποσότητα $f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(g, P, T')$. Παρατηρούμε ότι

$$J := f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(g, P, T') = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[g(x_i) - g(t_i')] + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[g(t_i') - g(x_{i-1})]. \tag{5.8}$$

Ας σκεφτούμε λίγο την ερμηνεία του δεξιού μέλους της σχέσης αυτής. Επειδή $t_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ βλέπουμε ότι έχουμε την διάταξη $P' := \{x_0, t_1', x_1, t_2', \cdots, t_n', x_n\}$ η οποία είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ και μάλιστα είναι εκλέπτυνση της P. Μπορούμε να γράψουμε $P' = P \cup T'$ και $P \subset P'$. Χρησιμοποιώντας την διαμέριση P' και το σύνολο σημείων $T'' = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} = P$ μπορούμε να δούμε ότι το δεξιό μελος της (5.8) είναι ίσο με $S(f, P', T'') = S(f, P', P)$,

$$J := f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(g, P, T') = S(f, P', T'').$$

Επειδή δε $P_\epsilon \subset P \subset P'$ απο το Θεώρημα 5.6.2 θα έχουμε ότι

$$\left| S(f, P', T'') - \int_a^b f dg \right| < \epsilon.$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$\left| J - \int_a^b f dg \right| < \epsilon, \ \ \forall \epsilon > 0$$

απο όπου καταλήγουμε στο συμπέρασμα $J = \int_a^b f dg$ που είναι το ζητούμενο. ■

5.8 Συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής.

Το ολοκλήρωμα Stieltjes μπορεί να γενικευθεί για ολοκληρωτές που ανήκουν σε μία ενδιαφέρουσα γενική κατηγορία συναρτήσεων, τις συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής.

Ορισμός 5.8.1 (Συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής). *Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Ας πάρουμε μία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset [a, b]$. Η ποσότητα*

$$V(g, P) := \sum_{i=1}^{n} | g(x_i) - g(x_{i-1}) |$$

*ονομάζεται η **μεταβολή** της συνάρτησης g για την διαμέριση P.*

2. *Το $\sup$ της ποσότητα $V(g, P)$ επάνω σε όλες τις διαμερίσεις P του διαστήματος $[a, b]$ ονομάζεται η **συνολική μεταβολή** της συνάρτησης g στο διάστημα αυτό και συμβολίζεται με $V_g([a, b])$, δηλαδή*

$$V_g([a, b]) := \sup_P V(g, P)$$

3. *Αν $V_g([a, b]) < \infty$, η συνάρτηση g ονομαζεται **συνάρτηση πεπερασμένης μεταβολής** στο διάστημα $[a, b]$.*

Οι συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής έχουν σχετικά καλή συμπεριφορά όπως δείχνουν τα παρακάτω παραδείγματα,

Παράδειγμα 5.8.2. *Μία αύξουσα συνάρτηση g στο διάστημα $[a, b]$ έχει πεπερασμένη μεταβολή. Η συνολική της μεταβολή είναι ίση με $V_g([a, b])g = g(b) - g(a)$.*

Για οποιαδήποτε διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ του $[a, b]$ έχουμε

$$V(g, P) = \sum_{i=1}^{n} | g(x_i) - g(x_{i-1}) | = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1})] = g(b) - g(a)$$

Εφόσον το παραπάνω ισχύει για οποιαδήποτε διαμέριση θα ισχύει και για το $\sup$ επάνω σε όλες τις διαμερίσεις άρα $V_{[a,b]}g = g(b) - g(a)$.

Παράδειγμα 5.8.3. *Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο διάστημα $[a,b]$ με φραγμένη παράγωγο τότε η g είναι πεπερασμένης μεταβολής.*

Ας θεωρήσουμε μία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ του διαστήματος $[a,b]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής γνωρίζουμε ότι

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g^{'}(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

για κάποιο $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$,$i = 1, \cdots, n$.
Για την διαμέριση P ισχύει

$$\begin{aligned} V(g,P) &= \sum_{i=1}^{n} \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^{n} \mid g^{'}(t_i) \mid \mid x_i - x_{i-1} \mid < M \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - x_{i-1} \mid \\ &= M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a) \end{aligned}$$

όπου M είναι το άνω φράγμα της απόλυτης τιμής της παραγώγου της g.
Εφόσον η μεταβολή της g για κάθε διαμέριση P είναι φραγμένη απο την ποσότητα $M\,(b-a)$, η g είναι συνάρτηση πεπερασμένης μεταβολής.

Παράδειγμα 5.8.4. *Μία συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση πεπερασμένης μεταβολής. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι μια συνάρτηση τέτοια ωστε $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}$, $f(\frac{1}{2n+1}) = 0$, $n \in \mathbb{N}^+$, $f(0) = f(1) = 0$ και που ορίζεται με γραμμική παρεμβολή σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία $x \in [0,1]$ κατά τρόπο ώστε να είναι συνεχής. Για την συνάρτηση αυτή μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση του $[0,1]$ τέτοια ωστε η μεταβολή της να είναι άπειρη. Ένα άλλο παράδειγμα το οποίο είναι και πολύ χρήσιμο στην θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, είναι η τροχιά ενος τυχαίου περιπάτου αν την θεωρήσουμε στην κατάλληλη χρονική και χωρική κλίμακα, και συγκεκριμένα στην κλίμακα οπου η χρονική διαφορά Δt μεταξύ των διαδοχικων κινήσεων και η απόσταση που διανύεται Δx ικανοποιούν τις σχέσεις $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ και $\frac{\Delta x^2}{\Delta t} \to 1$.*

Ισχύει το ακόλουθο:

Πρόταση 5.8.5. *Έστω g μία συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο διάστημα $[a,b]$ και $x \in [a,b]$. Ισχύει ότι*

$$V_g([a,b]) = V_g([a,x]) + V_g([x,b]).$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ισχύει ταυτόχρονα

$$\begin{aligned} V_g([a,b]) &\leq V_g([a,x]) + V_g([x,b]), \\ V_g([a,b]) &\geq V_g([a,x]) + V_g([x,b]). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Για να δείξουμε την πρώτη ανισοτητα ας πάρουμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ του $[a,b]$ και οριζουμε την ένωση $P' := P \cup \{x\}$, η οποία προφανώς είναι επίσης διαμέριση του $[a,b]$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το σημείο x βρίσκεται μεταξύ των σημείων $x_{\ell-1}$ και x_ℓ της διαμέρισης P, για κάποιο $\ell \in \{1, \cdots, n\}$. Η διαμέριση $P' = \{x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}, x, x_\ell, \cdots, x_n\}$ μπορεί να γραφεί σαν η ένωση $P = P_1 \cup P_2$ όπου $P_1 := \{x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}, x\}$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[a,x]$ ενώ $P_2 := \{x, x_{\ell+1}, \cdots, x_n\}$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[x,b]$.
Για την $V(g,P)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(g,P) &= \sum_{i=1}^{n} \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^{\ell} \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid + \sum_{i=\ell+1}^{n} \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid + \mid g(x) - g(x_\ell) \mid + \mid g(x_{\ell+1}) - g(x) \mid + \sum_{i=\ell+1}^{n} \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid \\ &= V(g,P_1) + V(g,P_2) \leq V_g([a,x]) + V_g([x,b]) \end{aligned}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό, αρχικά προσθέσαμε τους θετικούς όρους $\mid g(x) - g(x_\ell) \mid$ και $\mid g(x_{\ell+1}) - g(x) \mid$ (οπότε και πηραμε την ανισότητα), και μετά αναγνωρίσαμε τα δύο κομμάτια του αθροίσματος σαν τα $V(g,P_1)$ και $V(g,P_2)$ αντίστοιχα. Για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της ολικής μεταβολής, βάσει του οποίου,

$V(g,P_1) \leq V_{[a,x]}g$ για οποιαδήποτε διαμέριση P_1 του διαστήματος $[a,x]$ και $V(g,P_2) \leq V_{[x,b]}g$ για οποιαδήποτε διαμέριση P_2 του διαστήματος $[x,b]$.
Εφόσον όμως $V(g,P) \leq V_g([a,x]) + V_g([x,b])$ για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a,b]$, η ανισότητα αυτή θα πρέπει να ισχύει και για το sup της $V(g,P)$ επάνω σε όλες τις διαμερίσεις. Συνεπώς

$$V_g([a,b]) \leq V_g([a,x]) + V_g([x,b]).$$

Για να δείξουμε την ανάποδη ανισότητα, ας θεωρήσουμε P_1 και P_2 δυο οποιεσδήποτε διαμερισεις των $[a,x]$ και $[x,b]$ αντίστοιχα. Η ένωση $P = P_1 \cup P_2$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$, οπότε απο τον ορισμό της ολικης μεταβολής θα εχουμε ότι $V(g,P) \leq \sup_{P'} V(g,P') = V_g([a,b])$. Παρατηρούμε ότι $V(g,P_1) + V(g,P_2) = V(g,P)$ οπότε

$$V(g,P_1) = V(g,P) - V(g,P_2) \leq V_g([a,b]) - V(g,P_2).$$

Αφού $V_g([a,x])$ είναι το sup της ποσότητας $V(g,P_1)$ επάνω σε όλες τις διαμερίσεις P_1 θα ισχύει ότι

$$V_g([a,x]) \leq V_g([a,b]) - V(g,P_2),$$

και σχέση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$V(g,P_2) \leq V_g([a,b]) - V_g([a,x]).$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε διαμέριση $P_2 \subset [x,b]$ άρα θα ικανοποιείται και απο το sup της ποσότητας $V(g,P_2)$ επάνω σε κάθε πιθανή διαμέριση του $[x,b]$ κατά συνεπεια

$$V_g([x,b]) \leq V_g([a,b]) - V_g([a,x]),$$

άρα $V_g([a,b]) \geq V_g([a,x]) + V_g([x,b])$, η οποία είναι και η ζητούμενη αντίστροφη ανισότητα. Καταλήγουμε λοιπόν στο ζητούμενο. ■

Σχόλιο 5.8.6. *Η Πρόταση 5.8.5 έχει την εξής πολύ ενδιαφέρουσα εναλλακτική ερμηνεία. Ας πάρουμε μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι πεπερασμένης μεταβολής. Για δεδομένη την συνάρτηση g ας ορίσουμε την απεικονιση $[c,d] \mapsto V_g([c,d])$ για κάθε διάστημα $[c,d] \subset [a,b]$. Η απεικόνιση αυτή απεικονίζει σύνολα (διαστήματα) σε πραγματικούς αριθμούς και είναι καλά ορισμένη απο την παραπάνω πρόταση. Επίσης η απεικόνιση αυτή έχει την πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα, αν $x \in [c,d]$ τότε $[c,d] = [c,x] \cup [x,d]$ και $V_g([c,d]) = V_g([c,x]) + V_g([x,d])$, δηλαδή αν την δούμε σαν μια απεικόνιση απο τα σύνολα στους πραγματικούς αριθμούς απεικονίζει ενώσεις ξένων μεταξύ των συνόλων σε άθροισμα των εικόνων τους. Λέμε οτι η απεικόνιση αυτή είναι αθροιστική.*

Παράδειγμα 5.8.7. *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση πεπερασμένης μεταβολής. Για κάθε $x \in [a,b]$ ορίζουμε την συναρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, ως $\varphi(x) := V_g([a,x])$. Η συνάρτηση φ είναι καλά ορισμένη και αύξουσα. Πράγματι, απο την απόδειξη της Πρότασης 5.8.5 μπορούμε να δούμε ότι αν $[a,x] \subset [a,b]$ και η g είναι πεπερασμένης μεταβολης στο $[a,b]$ θα είναι πεπερασμένης μεταβολής και στο $[a,x]$ οπότε η συνάρτηση φ οριζεται καλά. Αν τώρα πάρουμε οποιαδήποτε $x < y$ τέτοια ωστε $x,y \in [a,b]$ παρατηρούμε ότι $[a,y] = [a,x] \cup [x,y]$ και εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.8.5 έχουμε ότι $V_g([a,y]) = V_g([a,x]) + V_g([x,y])$ και επειδή $V_g([x,y]) \geq 0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $V_g([a,x]) \leq V_g([a,y])$ δηλαδή απο τον ορισμό της φ ότι $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.*

Ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης μεταβολής είναι ιδιαίτερα χρήσιμος.

Θεώρημα 5.8.8 (Χαρακτηρισμός συναρτήσεων πεπερασμένης μεταβολής). *Μία συνάρτηση g είναι φραγμένης μεταβολής αν και μόνο αν υπάρχουν δύο αύξουσες συναρτήσεις g_1 και g_2 έτσι ώστε η g να μπορεί να γραφεί σαν η διαφορά τους, $g = g_1 - g_2$.*

Απόδειξη: Το ότι η g είναι πεπερασμένης μεταβολής αν μπορεί να γραφεί σαν την διαφορά δύο αύξουσων συναρτήσεων είναι προφανές και αφήνεται σαν άσκηση. Ας δούμε το αντίστροφο. Ας ορίσουμε την συνάρτηση $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, ως

$$g_1(x) := \begin{cases} 0 & x = a \\ V_g([a,x]) & x \in (a,b]. \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε (βλ. Παράδειγμα 5.8.7) ότι η συνάρτηση g_1 είναι αύξουσα. Ας ορίσουμε επίσης την $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ με βάση τον τύπο $g_2(x) := g_1(x) - g(x)$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι επίσης αύξουσα. Πράγματι, έστω $x < y$ με $x,y \in [a,b]$. Απο τον ορισμό της g_2 έχουμε ότι

$$g_2(y) - g_2(x) = g_1(y) - g_1(x) - (g(y) - g(x)) = V_g([a,y]) - V_g([a,x]) = V_g([x,y]) - (g(y) - g(x)), \quad (5.10)$$

λόγω της Πρότασης 5.8.5. Θα πρέπει να συγκρίνουμε τώρα την ποσότητα $V_g([x,y])$ με την ποσότητα $g(y)-g(x)$. Θυμηθείτε ότι $V_g([x,y]) = \sup_P V(g,P)$ όπου το sup λαμβάνεται επάνω σε όλες τις διαμερίσεις P του διαστήματος $[x,y]$. Μία απο αυτές τις διαμερίσεις είναι και η $P_0 = \{x,y\}$, συνεπώς $V(g,P_0) \leq V_g([x,y])$. Όμως $V(g,P_0) = |g(y)-g(x)|$. Συνεπώς $g(y)-g(x) \leq |g(y)-g(x)| \leq V_g([x,y])$ άρα $V_g([x,y]) - (g(y)-g(x)) \geq 0$ κατά συνέπεια η (5.10) δίνει οτι $g_2(y)-g_2(x) \geq 0$ δηλαδη $g_2(x) \leq g_2(y)$. Η g_2 λοιπόν είναι επίσης αύξουσα. Απο τον ορισμό της g_2 προκύπτει με τετριμένο τρόπο ότι $g = g_1 - g_2$. ■

5.9 Το ολοκλήρωμα *Stieltjes* για γενικό ολοκληρωτή

Με βάση το παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Stieltjes της f ως προς οποιαδήποτε συνάρτηση g η οποία έχει πεπερασμένη μεταβολή.

Ορισμός 5.9.1. *Έστω g μία συνάρτηση φραγμένης μεταβολής η οποία μπορεί να εκφραστεί ως $g = g_1 - g_2$ όπου g_1 και g_2 αύξουσες συναρτήσεις. Το ολοκλήρωμα Stieltjes της f ως προς την g ορίζεται ως*

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f\, dg_1 - \int_a^b f\, dg_2$$

Το ολοκλήρωμα Stieltjes διατηρεί τις θεμελιώδεις ιδιότητες του π.χ. της γραμμικοτητας και της αθροιστικοτητας και όταν ο ολοκληρωτής είναι μια συνάρτηση πεπερασμένης μεταβολής.

Θεώρημα 5.9.2 (Αθροιστικότητα και γραμμικότητα).

1. *Έστω $x \in [a,b]$. Τότε*

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^x f\, dg + \int_x^b f\, dg$$

2. *Έστω f_1,f_2 συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Stieltjes και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\int_a^b (\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2)\, dg = \lambda_1 \int_a^b f_1\, dg + \lambda_2 \int_a^b f_2\, dg$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος παρατηρούμε αρχικά οτι εφόσον g πεπερασμένης μεταβολής, υπάρχουν αύξουσες συναρτήσεις g_1, g_2 τέτοιες ώστε $g = g_1 - g_2$ (βλ. Θεώρημα 5.8.8). Απο τον Ορισμό 5.9.1 βλέπουμε αμέσως ότι αν αποδείξουμε τα αποτελέσματα (1) και (2) για την περίπτωση όπου ο ολοκληρωτής είναι αύξουσα συνάρτηση, τότε θα ισχύουν και για την γενική περίπτωση. Όμως για την περίπτωση που ο ολοκληρωτής είναι αύξουσα συνάρτηση τα αποτελέσματα αυτά είναι γνωστό ότι ισχύουν. ■.

Θεώρημα 5.9.3. *(**Ολοκλήρωση κατά μέρη**) Ισχύει ότι*

$$\int_a^b f\, dg = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b g\, df$$

αρκεί τα αντίστοιχα ολοκληρώματα Stieltjes να είναι καλά ορισμένα.

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος παρατηρούμε αρχικά οτι εφόσον g πεπερασμένης μεταβολής, υπάρχουν αύξουσες συναρτήσεις g_1, g_2 τέτοιες ώστε $g = g_1 - g_2$ (βλ. Θεώρημα 5.8.8). Απο τον Ορισμό 5.9.1 βλέπουμε αμέσως ότι αν αποδείξουμε το αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου ο ολοκληρωτής είναι αύξουσα συνάρτηση, τότε θα ισχύει και για την γενική περίπτωση. Όμως για την περίπτωση που ο ολοκληρωτής είναι αύξουσα συνάρτηση τα αποτελέσματα αυτά είναι γνωστό ότι ισχύουν (βλ. Θεώρημα 5.7.1. ■.

Παράδειγμα 5.9.4. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} x\, d \mid x \mid$ με την χρήση της ολοκλήρωσης κατά μέλη.*

Έχουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} x\, d|x| = x\,|x|\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2 - 1 = 1$$

Το ολοκλήρωμα Stieltjes που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο έχει όλες τις ιδιότητες που έχει το ολοκλήρωμα Stieltjes ως προς ολοκληρωτές που ειναι αύξουσες συναρτήσεις.

5.10 Σχέση του ολοκληρώματος *Stieltjes* με το ολοκλήρωμα *Riemann*

Θεώρημα 5.10.1 (Σύνδεση ολοκληρώματος Stieltjes και Riemann). *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι* **συνεχής και διαφορίσιμη** *στο $[a,b]$. Τότε*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann.

Απόδειξη: Θα σκιαγραφήσουμε μόνο τα βήματα της απόδειξης. Το ολοκλήρωμα Stieltjes στο αριστερό μέλος μπορεί να γραφεί ως το όριο $\lim_{|P|\to 0} S(f,P,T)$ των αθροισμάτων Stieltjes $S(f,P,T) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_{i+1})-g(x_i)$. Εφόσον η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη από το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει ότι σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ θα υπάρχει κάποιο $s_i \in [x_i, x_{i+1}]$ τέτοιο ώστε $g(x_{i+1}) - g(x_i) = g^{'}(s_i)(x_{i+1} - x_i))$. Συνεπώς,

$$S(f,P,T) = \sum_{i=1}^n f(t_i)g^{'}(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$

αλλά αυτά δεν είναι παρά τα μερικά αθροίσματα τα οποία στο όριο $\mid P \mid \to 0$ μας δίνουν το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\,g^{'}(x)\,dx$ ■

Η σχέση αυτή του ολοκληρώματος Riemann με το ολοκλήρωμα Stieltjes μας επιτρέπει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων Stieltjes.

Παράδειγμα 5.10.2. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\,d(x^4)$.*

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το

$$\int_0^1 x\,d(x^4) = \int_0^1 x\,(4\,x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^4\,dx = \frac{4}{5}$$

Για το ολοκλήρωμα Riemann ισχύουν μία σειρά απο χρήσιμες ανισότητες, μερικές απο τις οποίες μπορεί μέσω του Θεωρήματος 5.10.1 να γενικευθούν και για το ολοκλήρωμα Stieltjes.

Πρόταση 5.10.3 (Ανισότητες για το ολοκληρώμα Riemann).

1. $\mid \int_a^b f(x)\,dx \mid \leq \int_a^b \mid f(x) \mid\, dx$

2. **Ανισότητα Cauchy-Schwartz**

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b f(x)^2\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)^2\,dx\right]$$

3. **Ανισότητα Hölder** *: Έστω $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ θετικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann , και λ_i θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Τότε,*

$$\int_a^b (f_1(x))^{\lambda_1} \cdots (f_n(x))^{\lambda_n}\,dx \leq \left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right]^{\lambda_1} \cdots \left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]^{\lambda_n}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $n = 2$ η ανισότητα αυτή παίρνει την μορφή

$$\mid \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \mid \leq \left[\int_a^b \mid f(x) \mid^p\right]^{1/p} \left[\int_a^b \mid g(x) \mid^q\right]^{1/q}$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε f, g οχι απαραίτητα θετικές, αρκεί να ορίζονται τα ολοκληρώματα που έμφανίζονται στα δύο μέλη της. Οι αριθμοί p, q πρέπει να είναι θετικοί.

4. **Η ανισότητα Minkowski**

$$\left[\int_a^b \mid f(x)+g(x)\mid^p\right]^{1/p} \leq \left[\int_a^b \mid f(x)\mid^p\right]^{1/p} + \left[\int_a^b \mid g(x)\mid^p\right]^{1/p}$$

όπου $1 \leq p < \infty$.

5. **Η ανισότητα του Jensen** *Έστω* $\phi(x)$ *μία κυρτή συνάρτηση και* $f(x)$ *μία συνάρτηση η οποία είναι θετική και έχει την ιδιότητα* $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. *Τότε,*

$$\int_a^b \phi(x)\, f(x)\, dx \geq \phi\left(\int_a^b x\, f(x)\, dx\right)$$

5.11 Το αόριστο ολοκλήρωμα *Stieltjes*

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος Stieltjes.

Ορισμός 5.11.1. *Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε* $x \in [a,b]$. *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^x f\,dg$ *ονομάζεται το αόριστο ολοκλήρωμα Stieltjes .*

Πρόταση 5.11.2. *Το αόριστο ολοκλήρωμα Stieltjes* $F(x) = \int_a^x f(x)\,dg$ *έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

1. *Η συνάρτηση* $F(x)$ *είναι πεπερασμένης μεταβολής.*

2. *Αν η συνάρτηση* $g(x)$ *είναι συνεχής στο* x *τότε και η συνάρτηση* $F(x)$ *είναι συνεχής στο* x.

3. *Αν η* g *είναι αύξουσα τότε η* F *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο στο οποίο η* g *είναι παραγωγίσιμη και η* f *συνεχής. Στα σημεία αυτά ισχύει* $F'(x) = f(x)\, g'(x)$.

Απόδειξη: 1. Εφόσον η g είναι πεπερασμένης μεταβολής, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.8.8 έχει αναπαράσταση ως $g = g_1 - g_2$ όπου g_1, g_2 αύξουσες. Για κάθε $x \in [a,b]$ μπορούμε να γράψουμε $f(x) = max(f(x),0) + max(-f(x),0)$ οπότε ορίζοντας τις συναρτήσεις $f^+, f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως $f^+(x) := (f(x))^+ = max(f(x),0)$ και $f^-(x) := (f(x))^- = max(-f(x),0)$ βλέπουμε πως $f = f^+ - f^-$ και $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις αναπαραστάσεις για τις f, g, την μονοτονία των g_1, g_2, την θετικότητα των f^+, f^- και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Stieltjes καταλήγουμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ μπορούμε να γράψουμε $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ όπου F_1, F_2 είναι αύξουσες συναρτήσεις. Απο το Θεώρημα 5.8.8 λοιπόν, η F είναι πεπερασμένης μεταβολής.
2. Απο την αθροιστικότητα του ολοκληρώματος Stieltjes (βλ. Θεώρημα 5.9.2) για οποιαδήποτε $x, y \in [a,b]$ τα οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε επιλέξει έτσι ώστε $x < y$ ισχύει $F(y) - F(x) = \int_x^y f dg$. Αυτό μας επιτρέπει την εκτίμηση της ποσότητας $|F(y) - F(x)|$ και να δείξουμε έτσι την συνέχεια της F.
3. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραγώγου, και το Θεώρημα 5.10.1 το οποίο συνδέει το ολοκλήρωμα Stieltjes με το ολοκλήρωμα Riemann. Μετά, εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θέωρημα του ολοκληρωτικού λογισμού για το ολοκλήρωμα Riemann που προκύπτει. Αρκεί λοιπον να δείξουμε το αποτέλεσμα αυτό για την ειδική περίπτωση όπου $g(x) = x$ δηλαδή για το ολοκλήρωμα του Riemann. Ας υποθέσουμε οτι η f είναι συνεχής στο $x \in [a,b]$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ωστε $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ για $|x - y| < \delta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x < y$. Λόγω της συνέχειας, ισχύει ότι $f(x) - \epsilon < f(z) < f(x) + \epsilon$ για κάθε $z \in [x,y]$, δηλαδή η συνάρτηση f περιορισμένη στο διάστημα $[x,y]$ είναι φραγμένη από τα κάτω και απο τα ανω απο τις σταθερές συνάρτησεις ϕ_1, ϕ_2 με $\phi_1(z) = f(x) - \epsilon$ και $\phi_2(z) = f(x) + \epsilon$, για κάθε $z \in [x,y]$. Η ανισότητα αυτή θα διατηρείται και για το ολοκλήρωμα Riemann συνεπώς, $\int_x^y \phi_1(z)dz < \int_x^y f(z)dz < \int_x^y \phi_2(z)dz$ το οποίο μας δίνει ότι

$$(f(x) - \epsilon)(y - x) < \int_x^y f(z)dz = F(y) - F(x) < (f(x) + \epsilon)(y - x).$$

Διαιρώντας με $y - x > 0$ και αναδιατάσσοντας, η ανισότητα αυτή μας δίνει

$$-\epsilon < \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) < \epsilon.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)| < \epsilon$ για $|y - x| < \delta$, και αυτό δείχνει ότι $\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$ άρα $F'(x) = f(x)$. ■

5.12 Το γενικευμένο ολοκλήρωμα *Stieltjes*

Πολλές φορές χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα Stieltjes στα οποία το δεξιό άκρο μπορεί να είναι όσο μεγάλο επιθυμούμε και/ή το αριστερο άκρο να είναι όσο μικρό επιθυμούμε. Τέτοιου τύπου ολοκληρώματα εμφανίζονται πολύ συχνά στον υπολογισμό των ροπών κατανομών.

Ορισμός 5.12.1. *Αν το όριο $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dg$ υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f\,dg$ συγκλίνει και*

$$\int_a^\infty f\,dg = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dg$$

Αν το όριο $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dg$ δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f\,dg$ αποκλίνει.

Ορισμός 5.12.2. *Αν το όριο $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\,dg$ υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^b f\,dg$ συγκλίνει και*

$$\int_{-\infty}^b f\,dg = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\,dg$$

Αν το όριο $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\,dg$ δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^b f\,dg$ αποκλίνει.

Ορισμός 5.12.3. *Αν τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^a f\,dg$ και $\int_a^\infty$ είναι και τα δύο συγκλίνοντα τότε μπορούμε να όρίσουμε το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^\infty f\,dg = \int_{-\infty}^a f\,dg + \int_a^\infty f\,dg$$

5.13 Εφαρμογές στις πιθανοτητες και την στατιστική.

5.13.1 Ροπές σαν το ολοκλήρωμα *Stieltjes* στην συνάρτηση κατανομής.

Για μια τυχαία μεταβλητή X μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση κατανομής $F(x) := P(X \leq x)$ η οποία όπως είδαμε είναι μία αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση. Οι κεντρικές ροπές της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να γραφούν στην μορφή ολοκληρωμάτων Stieltjes όπου το ρόλο του ολοκληρωτή παίζει η συνάρτηση κατανομής. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned}\mu = E[X] &:= \int_\infty^\infty x\,dF(x)\\ \mu_k = E[(X-\mu)^2] &:= \int_\infty^\infty (x-\mu)^k\,dF(x),\;\; k=2,3,\cdots\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.13.1. *Βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής Bernoulli για την οποία ισχύει $P(X=0)=p$ και $P(X=1)=1-p$, χρησιμοποιώντας τη αναπαράσταση των ροπών σαν ολοκλήρωμα Stieltjes .*

Η αθροιστική κατανομή είναι η συνάρτηση

$$F(x) := P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x<0\\ p & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$$

Η μέση τιμή δίνεται σαν το ολοκλήρωμα Stieltjes

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty x\,dF(x)$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα το ολοκλήρωμα $\int_a^b x\,dF(x)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ολοκλήρωση κατά μέλη, σύμφωνα με την οποία

$$\int_a^b x\,dF(x) = x\,F(x)|_a^b - \int_a^b F(x)\,dx$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε τα όρια $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b x\,dF(x)$ *και* $\lim_{c\to\infty}\int_b^c x\,dF(x)$. *Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας θεωρήσουμε ότι* $b<0$.
Τότε,

$$\int_a^b x\,dF(x) = b\,F(b) - a\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx = 0 - 0 - \int_a^b 0\,dx = 0$$

οπότε και το όριο καθώς $a\to-\infty$ *είναι και αυτό* 0 *συνεπώς,* $\int_{-\infty}^b x\,dF(x) = 0$.
Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}\int_b^c x\,dF(x) &= c\,F(c) - b\,F(b) - \int_b^c F(x)\,dx \\ &= c - \int_b^0 0\,dx - \int_0^1 p\,dx - \int_1^c 1\,dx \\ &= c - p - (c-1) = 1-p\end{aligned}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του c *οπότε και το όριο καθώς* $c\to\infty$ *είναι* $1-p$.
'ρα,

$$\mathbb{E}[X] = 1-p$$

Ανάλογα μπορεί να υπολογίσουμε και την διασπορά.

5.13.2 Ροπές με την χρήση του ολοκληρώματος *Riemann*

Για αρκετές περιπτώσεις που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, η συνεχής τυχαία μεταβλητή μπορεί να είναι και απόλυτα συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση f, τέτοια ώστε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)\,dx$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής.

Οι κεντρικές ροπές, όπως και κάθε αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής, στην περίπτωση αυτή μπορεί να γραφεί σαν ένα ολοκλήρωμα Riemann επάνω στην συνάρτηση f,

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k\,f(x)\,dx$$

Παράδειγμα 5.13.2. *Δειξτε ότι μια τυχαία μεταβλητή που έχει πυκνότητα πιθανοτητας την κατανομή Cauchy δεν έχει μέση τιμή.*

Η μέση τιμή θα δίνεται απο το ολοκλήρωμα

$$E[X] = \int_{-\infty} x\,\frac{c}{1+x^2}\,dx$$

όπου c *η σταθερά κανονικοποίησης της κατανομής.*
Μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι

$$\int_a^b x\,\frac{c}{1+x^2}\,dx = \frac{c}{2}\,\ln(1+x^2)$$

Τα όρια

$$lim_{a\to-\infty}\int_a^b x\,\frac{c}{1+x^2}\,dx = \infty$$

και

$$lim_{b\to\infty}\int_a^b x\,\frac{c}{1+x^2}\,dx = \infty$$

συνεπώς το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{c}{1+x^2}\,dx$ *δεν συγκλίνει.*

5.14 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Ο ορισμός του ολοκληρώματος Stieltjes και η ερμηνεία του. Προσοχή στο ολοκλήρωμα Stieltjes υπάρχουν δύο συναρτήσεις, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση f και ο ολοκληρωτής g (στο ολοκλήρωμα Riemann $g(x) = x$).
- Το ολοκλήρωμα Stieltjes για μονότονες συναρτήσεις – ορισμός μέσω του άνω και του κάτω ολοκληρώματος.
- Συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής και χαρακτηρισμός τους σαν την διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.
- Ορισμός του ολοκληρώματος Stieltjes για συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής (ως ολοκληρωτές).
- Προσέγγιση του ολοκληρώματος Stieltjes με αθροίσματα.
- Ολοκλήρωση κατά μέρη για το ολοκλήρωμα Stieltjes.
- Σχέση του ολοκληρώματος Stieltjes με το ολοκλήρωμα Riemann αν ο ολοκληρωτής είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.
- Ολοκλήρωμα Stieltjes και ροπές τυχαίων μεταβλητών (για συναρτήσεις κατανομής όχι απαραίτητα συνεχείς).

Κεφάλαιο 6

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

6.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την έννοια της σύγκλισης ακολουθίων συναρτήσεων και συγκεκριμένα θα εισάγουμε την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης. Η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πολύ χρήσιμη έννοια γιατί μας επιτρέπει να μεταφέρουμε ιδιότητες όπως π.χ. η συνέχεια απο **κάθε όρο** της ακολουθίας στο **όριο** της ακολουθίας. Θα ορίσουμε στην συνέχεια σειρές συναρτήσεων. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο γιατί μας επιτρέπει να ορίζουμε νέες συναρτήσεις (σαν το άθροισμα μιας σειράς συναρτήσεων). Οι περίσσοτερες συναρτήσεις που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα (π.χ. η εκθετική συνάρτηση) δεν είναι τίποτε άλλο παρά συναρτήσεις που ορίζονται με αυτό τον τρόπο. Η ομοιόμορφη σύγκλιση μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε και να ολοκληρώνουμε συναρτήσεις που ορίζονται με την μορφή σειράς, όρο κατά όρο, διευκολύνοντας έτσι, όποτε ισχύει, το χειρισμό αυτών των συναρτήσεων και επιτρέποντας μας να διατυπώσουμε κανόνες λογισμού για τις συναρτήσεις αυτές. Το θέμα της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι κεντρικό στην ανάλυση και όλα τα εγχειρίδια αφιερώνουν ένα σημαντικό μέρος σε αυτό (βλ. π.χ. Apostol (1974), Rudin (1964) κλπ).

6.2 Ακολουθίες συναρτήσεων και σημειακή σύγκλιση

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία ο κάθε όρος της οποίας εξαρτάται απο μία παράμετρο x. Μπορούμε να θεωρήσουμε δηλαδή την ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ο κάθε όρος της οποίας είναι μία συνάρτηση του $x \in I \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε και μία συνάρτηση $f_n : I \to \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in I$ παίρνουμε και μια πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \cdots$.

Ορισμός 6.2.1. *Έστω οι συναρτήσεις $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Η συλλογή όλων των πραγματικών ακολουθίων $\{f_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $x \in I$, ονομάζεται* **ακολουθία συναρτήσεων** *και συμβολίζεται $\{f_n\}$.*

Παράδειγμα 6.2.2. *Ας πάρουμε την οικογένεια συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Π.χ. για $n = 1$ η $f_1(x) = x$, για $n = 2$ η $f_2(x) = x^2$, κ.ο.κ. Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ είναι η συλλογή πραγματικων ακολουθίων $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [0,1]$. Π.χ. για $x = 0$ παίρνουμε την σταθερή ακολουθία $\{a_n\} = \{f_n(0)\}$ με $a_n = f_n(0) = 0$ για κάθε n, για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε την ακολουθία $\{a_n\} = \{f_n(\frac{1}{2})\}$ με $a_n = f_n(\frac{1}{2}) = 2^{-n}$ για κάθε n κ.ο.κ.*

Εφόσον για καθε $x \in I$ παίρνουμε και μια διαφορετική πραγματικη ακολουθία $\{f_n(x)\}$ αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει θα περιμένουμε και το όριο της να εξαρτάται απο το $x \in I$ το οποίο επιλέξαμε. Για να δώσουμε έμφαση σε αυτό θα συμβολίζουμε $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε για κάθε $x \in I$ το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Μπορούμε λοιπόν να συντομεύσουμε τα παραπάνω λέγοντας ότι το όριο της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ είναι η συνάρτηση f που ορίστηκε όπως προηγουμένως και να συμβολίζουμε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ εννοώντας πάντοτε ότι $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in I$.

Ορισμός 6.2.3 (Σημειακή σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων). *Λεμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$* **συγκλίνει** *στην συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ (σημειακά) αν για κάθε $x \in I$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για $n > N$. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ή πιο απλά για συντομία τον συμβολισμό $f_n \to f$.*

Εν γένει το N του παραπάνω ορισμού εξαρτάται τόσο απο την επιλογή του $x \in I$, όσο και απο την επιλογή του $\epsilon > 0$, και για να δώσουμε έμφαση σε αυτό θα γράφουμε $N = N(x, \epsilon)$.

Παράδειγμα 6.2.4. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$, συγκλίνει στην συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Μπορούμε να δούμε ότι για την ακολουθία συναρτήσεων αυτή, το N για το οποίο ικανοποιείται ο Ορισμός 6.2.3 είναι το $N = N(x, \epsilon) = \left[\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(x)}\right] + 1$.

Παράδειγμα 6.2.5. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, συγκλίνει στην συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

Γιατί χρειαζόμαστε τις ακολουθίες συναρτήσεων; Για πολλούς λόγους, όπως θα δείτε στο σύντομο μέλλον, αλλά ας αρκεστούμε εδώ να δώσουμε δυο απο αυτούς.

Παράδειγμα 6.2.6 (Ορισμός νεων συναρτήσεων σαν όριο ακολουθίας κάποιων πιο απλών συναρτήσεων.). *Όπως έχετε δει πολλές συναρτήσεις μπορούν να γραφούν σαν δυναμοσειρές κάνοντας χρήση π.χ. του αναπτύγματος Taylor. Σαν ένα παράδειγμα ας πάρουμε την εκθετικη συνάρτηση η τιμή της οποίας για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως μια αριθμητική σειρά $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$. Ένας τρόπος να δείτε αυτή τη σειρά είναι να ορίσετε τα μερικά αθροίσματα $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ και τότε η σειρά μπορεί να γραφεί ως $f(x) = \lim_{n\to} f_n(x)$. Συνεπώς το άθροισμα της σειράς μπορεί να εκφραστεί σαν το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων, της ακολουθιας $\{f_n\}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ με $f_n(x)$ όπως παραπάνω για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει όριο το όριο της είναι η συνάρτηση του εκθετικού.*

Παράδειγμα 6.2.7 (Εμπειρική συνάρτηση κατανομής). *Ας υποθέσουμε οτι παίρνουμε ενα τυχαίο δείγμα $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ απο n παρατηρήσεις. Με βάση αυτό το δείγμα μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ ως*

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Η τιμή της συνάρτησης στο $x \in \mathbb{R}$, μας εκφράζει τον αριθμό των στοιχείων του δείγματος μας που είναι μικρότερα ή ίσα απο την τιμή x διαιρεμένο με τον αριθμό των στοιχείων του δείγματος, οπότε μπορεί να κατανοηθεί σαν το ποσοστό των στοιχείων του δειγματος που είναι μικρότερα απο την τιμή x. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό το ποσοστό σαν μια πιθανότητα, η τυχαία μεταβλητή X που θεωρούμε οτι το δείγμα μας αποτελείται απο πραγματοποιήσεις της, να πάρει τιμές μικρότερες ή ισες του x. Η συνάρτηση f_n που ορίστηκε με αυτό τον τρόπο ονομαζεται **εμπειρική συνάρτηση κατανομής** *και παίζει σημαντικό ρόλο στην στατιστική και συγκεκριμένα στην μη παραμετρική στατιστική. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, \cdots\}$ και υπολογίζουμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής πρώτα χρησιμοποιώντας ένα σημείο του δείγματος, f_1, μετα τα πρώτα 2, f_2, κλπ, δηλαδή υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ για $n = 1, 2, \cdots$ με*

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \mathbf{1}_{\{x_1 \leq x\}}, \ \ x \in \mathbb{R}, \\
f_2(x) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_{\{x_1 \leq x\}} + \mathbf{1}_{\{x_2 \leq x\}}\right), \ \ x \in \mathbb{R}, \\
&\cdots \\
f_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}, \ \ x \in \mathbb{R}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ η οποία είναι μια ακολουθία εμπειρικών κατανομών. Η εμπειρία μας απο την στατιστική μας λέει οτι στο όριο όπου το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της εμπειρικης κατανομής είναι επαρκώς μεγάλο, η εμπειρική κατανομή θα είναι μια επαρκώς καλή προσέγγιση της πραγματικής κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία θεωρούμε οτι είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0,1]$. Είναι λοιπόν χρήσιμο να γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ και να μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε. Ο παραπάνω ορισμός για το όριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σκοπό αυτό.

6.3 Προβλήματα της σημειακής σύγκλισης

Η σημειακή σύγκλιση δυστυχώς δεν είναι αρκετά εύχρηστη έννοια. Με αυτό εννοούμε οτι μας οδηγεί σε ορισμένα προβλήματα ποιοτικής φύσεως. Θα απαριθμήσουμε εδώ τα προβλήματα αυτά.

▷ **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να διατηρήσει την ιδιότητα της συνέχειας.**

Παράδειγμα 6.3.1. *Ας παρουμε το Παράδειγμα 6.2.4. Παρατηρούμε ότι ενώ οι συναρτήσεις f_n για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[0,1]$, το όριο της ακολουθίας, η συναρτηση $f := \lim_{n\to} f_n(x)$* **δεν** *είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ εφόσον παρουσιάζει ασυνέχεια τύπου άλματος στο $x = 1$! Συνεπώς, η ιδιότητα της συνέχειας* **δεν** *μεταφέρεται στο όριο!*

Αυτό είναι μία ενοχλητική παρατήρηση η οποία δυστυχώς συμβαίνει αρκετά συχνά.

Παράδειγμα 6.3.2. *Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων$\{f_n\}$, $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = (1-x^2)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Βλέπουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πάλι το ίδιο φαινόμενο.

► **Το (σημειακό) όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητα μια συνεχής συνάρτηση. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε και ως την αδυναμία εναλλαγής δύο ορίων, εν γένει αναμένουμε**

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \neq \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)!$$

Τα προβλήματα όμως δεν σταματούν εδώ!

▷ **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της παραγώγισης, δηλαδή μια αν μια ακολουθία συναρτήσεων αποτελείται απο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο σημείο, δεν είναι απαραίτητο οτι το όριο της ακολουθίας αυτής είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο αυτό, και ακόμα και αν είναι δεν είναι απαραίτητο ότι το όριο της ακολουθίας των παραγώγων θα συμπίπτει με την παράγωγο του ορίου της ακολουθίας!**

Παράδειγμα 6.3.3. *Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Παρατηρούμε ότι ακολουθία αυτή συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ οι συναρτήσεις f_n ειναι παραγωγίσιμες σε κάθε $x \in [0,1]$ και μάλιστα $f_n'(x) = x^{n-1}$. Ας πάρουμε τώρα την ακολουθία των παραγώγων $\{f_n'\}$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 6.2.4 η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n'\}$ συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Θα περιμέναμε $\phi = f'$ όμως αυτό **δεν** *ισχύει εφόσον $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\phi(1) = 1$!*

Συνεπώς, βλέπουμε και ότι

► **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της παραγώγισης, δηλαδή εν γένει**

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x)! \tag{6.1}$$

Αυτό είναι προφανές οτι σχετίζεται και πάλι με την αδυναμία εναλλαγής 2 ορίων, εφόσον η παράγωγος μιας συνάρτησης ορίζεται με την χρήση του ορίου των συναρτήσεων διαφορών. Αυτό είναι ιδιαίτερα προβληματικό αν θελήσουμε αν κάνουμε λογισμό με συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σαν όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων.

Σχόλιο 6.3.4. *Δέδομένης μιας ακολουθίας συναρτήσεων* $\{f_n\}$ *μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία συναρτήσεων των διαφορών* $\{\varphi_{n,\epsilon}\}$ *ως* $\varphi_{n,\epsilon}(x) := \frac{f_n(x+\epsilon)-f_n(x)}{\epsilon}$*. Η παράγωγος* $f_n'(x) = \frac{df_n}{dx}(x)$ *μπορεί να ερμηνευθεί ως το όριο* $\lim_{\epsilon\to 0}\varphi_{n,\epsilon}(x) = f_n'(x)$*. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε την συνάρτηση* φ_ϵ*,* $\varphi_\epsilon(x) := \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$ *και η παράγωγος* $f'(x) = \frac{df}{dx}$ *είναι το όριο* $\lim_{\epsilon\to 0}\varphi_\epsilon(x) = f'(x)$ *για κάθε* x *για το οποίο υπάρχει. Με βάση αυτά μπορούμε να γράψουμε*

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\varphi_{n,\epsilon}(x),$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\varphi_{n,\epsilon}(x),$$

κατά συνέπεια η σχέση (6.1) *μπορει να ερμηνευθεί σαν την αδυναμία εναλλαγής του ορίου* $\epsilon\to 0$ [1] *με το όριο* $n\to\infty$.

Και δυστυχώς τα προβλήματα δεν σταματούν εδώ!

▷ **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της ολοκλήρωσης.**

Παράδειγμα 6.3.5. *Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}$, $f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$, *με*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4\,n^2\,x & 0\le x<\frac{1}{2n} \\ -4\,n^2\,x+4\,n & \frac{1}{2n}\le x<\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1. \end{cases}$$

Μπορούμε να δούμε (μετά απο πράξεις) ότι

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1,\quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Για κάθε $x\in[0,1]$ *έχουμε ότι* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ [2]*. 'ρα η ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}$ *συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση* f *η οποία είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνεπώς,*

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Αυτό είναι ιδιαίτερα ενοχλητικό, γιατί π.χ οι $f_n(x)$ μπορεί να ερμηνευθούν σαν μία ακολουθία συναρτήσεων κατανομών (βλ. π.χ. το Παράδειγμα 6.2.7), αλλά το όριο τους όχι! Αυτό μπορεί να μας οδηγήσει σε πολλά προβλήματα στην εκτιμητική όπου προσπαθούμε να χαρακτηρίσουμε τις ροπές μιας κατανομής απο την ακολουθία των εμπειρικών κατανομών.

Συνεπώς, βλέπουμε και ότι

▶ **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της ολοκλήρωσης, και εν γένει ισχύει**

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \ne \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx!$$

ή ισοδύναμα

$$\textbf{Αν } \lim_{n\to\infty} f_n = f \textbf{ δεν ισχύει απαραίτητα ότι } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx!$$

με παρόμοια προβλήματα να εμφανίζονται και για το ολοκλήρωμα Stieltjes!

Πρέπει λοιπόν να ορίσουμε μία πιο ισχυρή μορφή σύγκλισης η οποία και θα μας επιτρέπει να επιλύσουμε τα προβλήματα αυτά.

---

[1] Φυσικά, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{m}$, και το οριο $\epsilon\to 0$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν το όριο $m\to\infty$.

[2] Εφόσον $f_n(x) = 0$ στο $x = 0$ για κάθε n, και $f_n(x) = 0$ για n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} < x$.

6.4 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Στον Ορισμό 6.2.3 για την σημειακή σύγκλιση είδαμε οτι για κάθε $x \in I$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για $n > N$ και εν γένει το N εξαρτάται απο την επιλογή των ϵ και x δηλαδή $N = N(x, \epsilon)$. Για **δεδομένο** $\epsilon > 0$, κάποιες επιλογές του $x \in I$ αυτό το N μπορεί να είναι μικρό και για άλλες μεγάλο. Θα μπορούσαμε να βρούμε κάποιο $N^* = N(\epsilon)$ για το οποίο να ισχύει ότι $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in I$ αρκεί $n > N^*$, δηλαδή ένα N το οποίο να μας εξασφαλίζει την συνέχεια για κάθε x; Ένα τέτοιο N^* θα μπορούσε να είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το $N(x, \epsilon)$ που μας δίνει ο Ορισμός 6.2.3, όταν το x παίρνει ολες τις πιθανές τιμές που του επιτρέπονται στο διάστημα I. Με αλλα λόγια αν επιλέξουμε $N^*(\epsilon) = \sup_{x \in I} N(x, \epsilon)$ τότε για αυτό το N^* θα ισχύει οτι $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, για κάθε $x \in I$ αν $n > N^*$. Το πρόβλημα όμως είναι οτι αυτό δεν μπορούμε να το κάνουμε πάντοτε γιατί υπάρχει περίπτωση $\sup_{x \in I} N(x, \epsilon) = \infty$! Αυτό μας λέει ότι πολλές φορές αν έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ η οποία συγκλίνει σημειακά σε μία συνάρτηση f, **δεν** είναι απαραίτητο ότι μπορεί να υπάρχει μια επιλογή του N η οποία και να εξασφαλίζει το οτι για καθε x η τιμή $f_n(x)$ είναι το ‘ ίδιο ’ κοντά στην τιμή $f(x)$ για $n > N$ για κάθε $x \in I$. Θα δούμε ότι όλα τα προβλήματα της προηγούμενης παραγράφου ανάγονται σε αυτή την αδυναμια!

Παράδειγμα 6.4.1. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$ συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Αν επιλέξουμε οποιοδήποτε $x \in [0,1]$ και $\epsilon > 0$, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ αρκεί $n > N(x, \epsilon)$ όπου $N(x, \epsilon) = \left[\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(x)}\right] + 1$. Αν έχουμε καθορίσει ένα ϵ μπορούμε να βρούμε κάποιο N το οποίο να μας εξασφαλίζει οτι $f_n(x)$ είναι ϵ-κοντά στο $f(x)$ για όλες τις πιθανές τιμές του $x \in [0,1]$ αρκεί $n > N$; Ένας υποψηφιος φυσικος αριθμός με την ιδιότητα αυτή θα μπορούσε να ήταν το $N^*(\epsilon) = \sup_{x \in [0,1]} N(x, \epsilon)$ αλλά παρατηρούμε οτι $\sup_{x \in [0,1]} N(x, \epsilon) = \sup_{x \in [0,1]} \left(\left[\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(x)}\right] + 1\right) = +\infty$ οπότε αυτό μας στερεί κάθε ελπίδα να ισχύει αυτό! Είναι σχετικά εύκολο να δούμε γιατι συμβαίνει αυτό. Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $0 < x < 1$. Η ακολουθία $\{a_n\} = \{x^n\}$ συγκλίνει στο 0 αλλά η ταχύτητα σύγκλισης (και αρα το πόσο μεγάλο πρέπει να επιλέξουμε το N) εξαρτάται απο την επιλογή του x. Όσο το x πλησιάζει την τιμή $x = 1$ (αλλά χωρίς να γίνεται 1) τόσο πιο αργή γίνεται η σύγκλιση της ακολουθίας αυτής (και αρα το N που πρέπει να επιλέξουμε γίνεται άπειρο). Προσοχή, το πρόβλημα δεν είναι στην τιμή $x = 1$ αλλά σε τιμές $x < 1$ πολύ κοντά στο 1!

Αν είναι δυνατόν για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ να επιλέξουμε το ίδιο N έτσι ώστε να μας εξασφαλίζεται ότι για καθε $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, αν $n > N$ (δηλαδή να έχουμε μια ομοιομορφία στην ‘ απόσταση ’ των συναρτήσεων f_n για $n > N$ απο την συνάρτηση f) θα λέμε ότι η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$.

Ορισμός 6.4.2 (Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων). *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην συνάρτηση $f : I \to R$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$ για κάθε $x \in I$. Για να δηλώσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f_n \rightrightarrows f$.*

Σχόλιο 6.4.3. *Αν μια σκολουθία συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα τότε σίγουρα συγκλίνει και σημειακά. Αν μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σημειακά τότε δεν είναι απαραίτητο οτι συγκλίνει και ομοιόμορφα. Το όριο είναι μοναδικό.*

Παράδειγμα 6.4.4. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ του Παραδείγματος 6.4.1* **δεν** *συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f, για τον λόγο που αναπτύξαμε παραπάνω.*

Παράδειγμα 6.4.5. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n = \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι*

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}, \ \forall x \in [0,1], \ \ n \in \mathbb{N}$$

συνεπώς για κάθε $x \in [0,1]$ και για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ εφόσον ισχύει $\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$. Για να συμβαίνει αυτό το n θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $n > \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ άρα μπορούμε να επιλέξουμε ένα $N^* = N^*(\epsilon) := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ τέτοιο ωστε η συνθήκη του Ορισμού 6.4.2 να ικανοποιείται. Αν υπολογίζαμε το $N = N(x, \epsilon)$ για το οποίο ικανοποιείται ο Ορισμός 6.2.3 της σημειακής σύγκλισης για την ακολουθία αυτή, θα παρατηρούσαμε ότι το $\sup_{x \in [0,1]} N(x, \epsilon)$ στην περίπτωση αυτή θα είναι πεπερασμένο.

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει ενα εύκολο κριτήριο για να ελέγχουμε κατά πόσον μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f.

Πρόταση 6.4.6 (Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων). *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid\right) = 0$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η $f_n \rightrightarrows f$. Τότε για κάθε $x \in I$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Εφόσον η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x \in I$ θα ισχύει και για το sup της ποσότητας αυτής επάνω σε όλα τα x συνεπώς $\sup_{x\in I}(|f_n(x) - f(x)|) < \epsilon$. Η ποσότητα αυτή εξαρτάται απο το n, ας συμβολίσουμε λοιπόν $a_n := \sup_{x\in I}(|f_n(x) - f(x)|)$. Δείξαμε λοιπόν οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $0 \geq a_n < \epsilon$ άρα $|a_n| < \epsilon$. Συνεπώς η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ έχει την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Αυτό είναι και η συνθήκη που θέλουμε να αποδείξουμε. Το αντίστροφο αφήνεται σαν άσκηση. ■

Σχόλιο 6.4.7 (Κριτήριο <u>μη</u> ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων). *Η Πρόταση 6.4.6 μας δίνει επίσης ενα πολύ χρήσιμο αρνητικό κριτήριο, δηλαδή ενα κριτήριο σχετικά με το πότε μια ακολουθία συναρτήσεων* **δεν** *συγκλίνει ομοιόμορφα. Αυτό μας το παρέχει η άρνηση της Πρότασης 6.4.6 σύμφωνα με την οποία $f_n \not\rightrightarrows f$ αν $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid) \neq 0$. Ένας τρόπος να συμβαίνει αυτό είναι να υπάρχει κάποια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\} \subset I$ τέτοια ώστε αν υπολογίσουμε τις $b_n := |f_n(x_n) - f(x_n)|$ αυτή η ποσότητα να μην μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή επιθυμούμε για n αρκετά μεγάλο. 'ρα μπορούμε να πούμε οτι $f_n \not\rightrightarrows f$ αν υπάρχει κάποια ακολουθία $\{x_n\} \subset I$ και κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$ για κάθε n. Η παρατήρηση αυτή είναι πολύ χρήσιμη γιατί μας αρκεί να βρούμε μόνο μια ακολουθία με την ιδιότητα αυτή για να συμπεράνουμε ότι δεν εχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.*

Παράδειγμα 6.4.8. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f_n(x) = \begin{cases} 2\,n\,x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2 - 2\,n\,x & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

συγκλίνει σημειακά στην $f; [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ αλλά **όχι** *ομοιόμορφα. Για να το δείτε αυτό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρνητικό κριτήριο του Σχολίου 6.4.7: αν πάρουμε την ακολουθία $\{x_n\} \subset [0,1]$ με $x_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $\mid f_n(x_n) - f(x_n) \mid = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνεπώς $f_n \not\rightrightarrows f$.*

Παράδειγμα 6.4.9. *Ας πάρουμε την ακολουθία $\{f_n\}$ του Παραδείγματος 6.4.1. Ένας τρόπος να δείτε ότι η ακολουθία αυτή δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση είναι να επιλέξετε την ακολουθία $\{x_n\} \subset [0,1]$ με $x_n = \frac{n-1}{n}$ και να δείτε οτι αυτή επαληθεύει το αρνητικό κριτήριο του Σχολίου 6.4.7.*

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή προσφέροντας ένα κριτήριο για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ στην περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε απο πριν το όριο της. Αυτό μας θυμίζει το κριτήριο του Cauchy που ειχαμε δει στην περίπτωση των πραγματικών ακολουθιών. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να διατυπώσουμε ενα κριτήριο του Cauchy σχετικά με την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Θεώρημα 6.4.10 (Κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων). *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ωστε $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ για καθε $x \in I$ και κάθε $n, m > N$.*

Απόδειξη: Είναι πολύ απλό να δείξουμε ότι αν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (δηλαδή υπάρχει κάποια συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n \rightrightarrows g$) τότε η $\{f_n\}$ ικανοποιεί το ομοιόμορφο κριτήριο του Cauchy. Θα ασχοληθούμε μόνο με το αντίστροφο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ωστε $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ για καθε $x \in I$ και κάθε $n, m > N$. Αυτό σημαίνει οτι για κάθε $x \in I$ η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι Cauchy οπότε συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό τον οποίο ας ονομάσουμε $f(x)$. Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ και είναι προφανές απο την κατασκευή οτι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση f. Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι και ομοιόμορφη δηλαδή οτι $f_n \rightrightarrows f$. Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε οτι υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε $n > N$, $x \in I$. Αυτό το N θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο του $x \in I$ έτσι ώστε να έχουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση. Μέχρι τώρα το μόνο που γνωρίζουμε είναι οτι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $N' = N(x, \epsilon)$ τέτοιο ωστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για $n > N' = N'(x, \epsilon)$ δηλαδή το N' εν γένει εξαρτάται απο το x το οποίο έχουμε επιλέξει. Είναι ξεκάθαρο πως χρειαζόμαστε λίγο παραπάνω δουλειά για να δείξουμε το ζητούμενο. Ας πάρουμε την διαφορά $f_n(x) - f(x)$ και ας την εκφράσουμε ως

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|, \text{ οποιοδήποτε } m \in \mathbb{N}^+. \quad (6.2)$$

Απο την ομοιόμορφη ιδιότητα Cauchy υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, για κάθε $x \in I$, $n, m \in \mathbb{N}^+$. Επειδή η $\{f_m\}$ συγκλίνει σημειακά στην f για την επιλογή αυτή του $\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in I$ υπάρχει κάποιο $N' = N'(\epsilon, x)$ τέτοιο ώστε $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ για $m > N'$. Αν επιλέξουμε το $n > N(\epsilon)$ και $m > \max(N(\epsilon), N'(\epsilon, x))$ θα ισχύει απο την (6.2) ότι

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

'ρα $f_n \rightrightarrows f$. ■

6.5 Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Η ομοιόμορφη σύγκλιση μας εξασφαλίζει την διατήρηση της ιδιότητας της συνέχειας στο όριο

Πρόταση 6.5.1. *Έστω $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία συνεχων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει* **ομοιόμορφα** *στην $f : I \to \mathbb{R}$. Τότε, η f είναι συνεχής στο I.*

Σχόλιο 6.5.2. *Με άλλα λόγια μας επιτρέπεται να γράψουμε*

$$\text{Αν } f_n \text{ συνεχείς } \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ και } f_n \rightrightarrows f \text{ τότε } \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \forall x_0 \in I.$$

Απόδειξη: Αυτο που ζητάμε να δείξουμε είναι ότι για κάθε $x \in I$, και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ αν $|x - y| < \delta$. Ας επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $x \in I$ και ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Εφόσον η $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ ισχύει ότι μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in I$ αν $n \geq N$ να ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Η $f_N(x)$ είναι συνεχής στο I, συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in I$ να ισχύει

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3},$$

για καθε $y \in I$ τέτοιο ώστε $|x - y| < \delta$.

'ρα, για κάθε $y \in I$ τέτοιο ώστε $|x - y| < \delta$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

οπότε αποδείχθηκε και η συνέχεια της f. ■

6.6 Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωση

Πρόταση 6.6.1. *Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : I \to \mathbb{R}$ και g μια αύξουσα συνάρτηση. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ οι συναρτήσεις f_n είναι ολοκληρώσιμες κατά Stieltjes επάνω στην g και ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει* **ομοιόμορφα** *στην συναρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, δηλαδή $f_n \rightrightarrows f$. Τότε, και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes επάνω στην g και μάλιστα ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε αρχικά για πιο απλά ότι f_n συνεχείς για κάθε n. Τότε η f είναι επίσης συνεχής άρα και ολοκληρώσιμη. Εφόσον υπάρχει N τέτοιο ωστε για $n > N$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in I$, βλέπουμε οτι

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dg(x) \leq (b - a)\epsilon,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε πρώτα την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και μετά την βασική ανισότητα που ικανοποιεί. Απο την παραπάνω εκτίμηση προκύπτει το συμπέρασμα. Στην περίπτωση όπου f_n ολοκληρώσιμες αλλά όχι απαραίτητα συνεχείς, θέλουμε λιγάκι παραπάνω δουλειά για να δειξουμε ότι f ολοκληρώσιμη. ■

Παράδειγμα 6.6.2. *Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, $f_n : [-L, L] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, με $f_n(x) = e^{-x} + \frac{e^{-x^2}}{n}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f_n(x)dx$, για οποιοδήποτε τιμή του $L > 0$.*

Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε οτι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικα το ολοκλήρωμα $\int_{-L}^{L} f_n(x)dx$ και μετά να πάρουμε το όριο $n \to \infty$ εξαιτίας του όρου $\frac{e^{-x^2}}{n}$ που εισέρχεται στις συναρτήσεις f_n. Όμως $f_n \rightrightarrows f$, με $f(x) = e^{-x}$. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 6.6.1 και να δούμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} \left(e^{-x} + \frac{e^{-x^2}}{n} \right) dx = \int_{-L}^{L} e^{-x} dx = e^{L} - e^{-L}.$$

6.7 Ομοιόμορφη σύγκλιση και παραγώγιση

Πρόταση 6.7.1. *Έστω ότι το I είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = [a, b]$ και $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, μία ακολουθία διαφορίσιμων συναρτήσεων. Ας υποθέσουμε ότι*

1. *Υπάρχει κάποιο $z \in I$ τέτοιο ώστε η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{f_n(z)\}$ να συγκλίνει.*
2. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f'_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I στην συνάρτηση g, δηλαδή $f_n \rightrightarrows g$.*

Τότε, η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I σε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε ότι $f' = g$, δηλαδή

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \ \ \forall x \in I$$

Απόδειξη: Θα σκιαγραφησουμε τα βασικα σημεία της απόδειξης. Θα πρέπει να δειξουμε οτι για κάθε $x_0 \in (a, b)$ και για κάθε $\epsilon > 0$ ισχυει ότι

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| < \epsilon, \ \ \forall x \in (a, b), \ x \neq x_0.$$

Με παρόμοιο τρόπο που εργαστήκαμε στην για να δείξουμε την συνέχεια σπάμε την παραπάνω ποσότητα σε 3 μέρη,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \le \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| + \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f'_n(x_0) \right| + |f'_n(x_0) - g(x_0)|$$

Ο καθένας απο αυτούς τους όρους μπορεί να γίνει όσο μικρός επιθυμούμε. Ο πρώτος όρος λόγω του ότι $f_n \rightrightarrows f$ (για κάθε $x_0, x \in I$), ο δεύτερος λόγω του οτι η f_n είναι διαφορίσιμες για κάθε n στο I και ο τρίτος λόγω του ότι $f'_n \rightrightarrows g$ στο I. Οι 2 τελευταίοι όροι είναι εύκολο να εκτιμηθούν ως μικροτεροι του $\frac{\epsilon}{3}$ για κάθε ϵ, ο πρώτος όρος ενδεχομένως να είναι λίγο πιο προβληματικός λόγω της παρουσίας του $\frac{1}{x-x_0}$ και επειδή μας ενδιαφέρει το όριο $x \to x_0$. Για τον χειρισμό του πρώτου όρου αρκεί να παρατηρήσουμε οτι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}^+$ η συνάρτηση $f_n - f_m$ είναι διαφορίσιμη οπότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής για την παράγωγο της συνάρτησης $f_n - f_m$ μπορούμε να δούμε οτι υπάρχει x^* τέτοιο ώστε $|x^* - x_0| < |x - x_0|$ για το οποίο να ισχύει

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} = f'_n(x^*) - f'_m(x^*).$$

Απο την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\{f_n\}$ και το κριτήριο του Cauchy εχουμε οτι $|f_n(x^*) - f_m(x^*)| < \frac{\epsilon}{3}$, για n, m αρκετά μεγάλα, συνεπώς

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'_n(x^*) - f'_m(x^*)| < \frac{\epsilon}{3},$$

για n, m αρκετά μεγάλο. Κρατώντας το n σταθερό παίρνουμε πρώτα το όριο $m \to \infty$ και έτσι οδηγούμαστε ότι

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω οδηγούμαστε στο ζητούμενο. ■

6.8 Σειρές συναρτήσεων και ομοιόμορφη σύγκλιση

Θα ασχοληθούμε τώρα με σειρές συναρτήσεων. Αν $\{f_j\}$, $f_j : I \to \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων σαν σειρά συναρτήσεων θα θεωρήσουμε ένα άπειρο άθροισμα της μορφής $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$. Όπως και για τις ακολουθίες συναρτήσεων, για κάθε $x \in I$, μπορούμε να πάρουμε μια αριθμητική σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$, και μετά να χειριστούμε την πραγματική ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{S_n(x)\}$ όπου $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Με την ίδια λογική την οποία ακολουθήσαμε στις ακολουθίες συναρτήσεων μπορούμε να ορίζουμε μια καινούργια ακολουθία συναρτησεων, την ακολουθία των μερικών αθροισματων $\{S_n\}$, $S_n : I \to \mathbb{R}$, με $S_n := \sum_{j=1} nf_j$, $n \in \mathbb{N}^+$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n\}$ μπορούμε να ρωτήσουμε όλα τα ερωτήματα που θέσαμε στις προηγούμενες παραγράφους σχετικά με την σύγκλιση της.

Ορισμός 6.8.1 (Σημειακή σύγκλιση σειράς συναρτήσεων). *Έστω $\{f_j\}$, $f_j : I \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}^+$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Θα λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n\}$ με $S_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$ συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση F. Θα συμβολίζουμε $F := \sum_{j=1}^{\infty} f_j$.*

Ορισμός 6.8.2 (Ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων). *Έστω $\{f_j\}$, $f_j : I \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}^+$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Θα λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n\}$ με $S_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση F. Θα συμβολίζουμε $F := \sum_{j=1}^{\infty} f_j$.*

Ένα απο τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν θα είναι να βρούμε συνθήκες κάτω απο τις οποίες μια σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πρόταση 6.8.3 (Το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass). *Έστω $\{f_j\}$, $f_j : I \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}^+$ μια ακολουθία συναρτήσεων και $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ η αντίστοιχη σειρά συναρτήσεων. Αν υποθέσουμε οτι υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{M_j\}$ τέτοιων ώστε $| f_j(x) | \leq M_j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in I$ και η αριθμητικη σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ συγκλίνει, τότε, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.*

Απόδειξη: Απο τον Ορισμό 6.8.2 για να συγκλίνει η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ ομοιόμορφα, θα πρέπει η ακολουθία συναρτήσεων των μερικών αθροισμάτων $\{S_n\}$ να ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση. Η σειρά συναρτήσεων θα συγκλίνει ομοιομορφα αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n, m > N$. Ας θεωρησουμε ότι $n > m$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Βλέπουμε ότι $S_n - S_m = f_{m+1} + f_{m+2} + \cdots + f_n$.Απο την υπόθεση,

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} M_j, \ \ \forall\, x \in I. \tag{6.3}$$

Η αριθμητική σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ συγκλίνει απο την υπόθεση συνεπώς για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n > m \geq N$ να ισχύει

$$M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots M_n < \epsilon. \tag{6.4}$$

Συνδυάζοντας τις (6.3) και (6.4) βλέπουμε οτι η ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n\}$ ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση (βλ. Θεώρημα 6.4.10). ■

Παράδειγμα 6.8.4. *Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, με $f_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, \cdots$ ή σε συντομογραφία η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \frac{1}{1-x}$ στο διάστημα $-a \leq x \leq a$ αν $0 < a < 1$.*

Πραγματικά, η σειρά αυτή ικανοποιεί το κριτήριο του Weierstrass για την ακολουθία $\{M_j\}$ με $M_j = a^j$, $j \in \mathbb{N}^+$ αν $a \in (0, 1)$. Για να βρούμε τον τούτο της συνάρτησης F αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά μας αποτελέσματα απο τις γεωμετρικές σειρές.

Παράδειγμα 6.8.5. *Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, με $f_j(x) = \frac{\cos(j\,x)}{j^2}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$ ή σε συντομογραφία $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(j\,x)}{j^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για x στο διάστημα $I = [-R, R]$ για κάθε $R \in \mathbb{R}$.*

Πραγματικά, η σειρά αυτή ικανοποιεί το κριτήριο του Weierstrass για την ακολουθία $\{M_j\}$ με $M_j = \frac{1}{j^2}$. Η σειρά αυτή λοιπόν ορίζει μια συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$. Απο την Πρόταση 6.5.1 η συνάρτηση αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση. Η συνάρτηση F που ορίζεται με τον τρόπο αυτό ονομάζεται συνάρτηση του Weierstrass.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων μας επιτρέπει το να τις ολοκληρώσουμε όρο προς όρο.

Πρόταση 6.8.6 (Ολοκλήρωση σειράς συναρτήσεων). *Έστω $\{f_j\}$, $f : I : [a,b] \to \mathbb{R}$, μία ακολουθία συναρτήσεων τέτοιες ώστε f_j ολοκληρώσιμη για κάθε $j \in \mathbb{N}^+$. Αν η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$, τότε η F είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα*

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με την χρήση της Πρότασης 6.6.1, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $F = \lim_{n\to\infty} S_n$ όπου $\{S_n\}$ η ακολουθία συναρτήσεων $S_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$, $n \in \mathbb{N}^+$. ■

Παράδειγμα 6.8.7. *Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, με $f_j(x) = \frac{x^j}{j!}$, $j = 0,1,2,\cdots$ ή σε συντομογραφία η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ και συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως $F = \sum_{j=0}^{\infty} f_j$, με τύπο $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για την συνάρτηση αυτή συνήθως χρησιμοποιούμε την* **συντομογραφία** *$F(x) = e^x$ την οποία και ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση. Κάνοντας χρήση της Προτασης 6.8.6 μπρούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x\,dx$, ολοκληρώνοντας την σειρά όρο προς όρο.*

Πράγματι, βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^j}{j!} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \left. \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \right|_0^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} = e - 1.$$

Η ομοιόμορφη σύγκλιση μια σειράς συναρτήσεων μας επιτρέπει, αν τηρούνται και ορισμένοι πρόσθετοι περιορισμοί, την παραγώγιση της όρο προς όρο.

Πρόταση 6.8.8 (Παραγώγιση σειράς συναρτήσεων). *Έστω $\{f_j\}$, $f : I : (a,b) \to \mathbb{R}$, μία ακολουθία συναρτήσεων τέτοιες ώστε f_j διαφορίσιμη για κάθε $j \in \mathbb{N}^+$. Ας υποθέσουμε ότι*

1. *f_n' συνεχείς στο $I = (a,b)$*
2. *Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει* **σημειακά** *σε μία συνάρτηση F στο $I = (a,b)$*
3. *Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j'$ συγκλίνει* **ομοιόμορφα** *στο $I = (a,b)$.*

Τότε, η F είναι διαφορίσιμη στο $I = (a,b)$ και

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x), \ \ \forall\, x \in I = (a,b).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με την χρήση της Πρότασης 6.7.1, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $F = \lim_{n\to\infty} S_n$ όπου $\{S_n\}$ η ακολουθία συναρτήσεων $S_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$, $n \in \mathbb{N}^+$. ■

Παράδειγμα 6.8.9. *Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.8.8 μπορούμε να δούμε οτι η συνάρτηση $F(x) = e^x$ είναι διαφορίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα $F'(x) = e^x$.*

Παράδειγμα 6.8.10. *Η Πρόταση 6.8.8* **δεν** *μπορεί να εφαρμοστεί για την συνάρτηση του Weierstrass που ορίστηκε στο Παράδειγμα 6.8.5. Με βάση την παραρήρηση αυτή* **δεν** *μπορούμε να πούμε άμεσα οτι η συνάρτηση του Weierstrass είναι διαφορίσιμη, παρόλο το γεγονός ότι είναι το άθροισμα μιας ομοιόμορφα σύγκλίνουσας σειράς διαφορίσιμων συναρτήσεων. Ο λόγος που δεν ισχύει η Προταση 6.8.8 είναι γιατί η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j'$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα. Η παρατήρηση αυτή είναι μόνο μια ένδειξη ότι η συνάρτηση του Weierstrass δεν είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, ο Weierstrass απέδειξε ότι η συνάρτηση αυτή παρότι είναι συνεχής παντού δεν είναι πουθενα παραγωγίσιμη.*

6.9 Εφαρμογές στις δυναμοσειρές

Ορισμός 6.9.1 (Δυναμοσειρές). *Μία σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ όπου $f_j(x) = a_j(x-x_0)^j$, $j = 0, 1, \cdots$, όπου $\{a_j\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζεται* **δυναμοσειρά** *με κέντρο στο σημείο x_0. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την συντομογραφία $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(x-x_0)^j$ για μια δυναμοσειρά.*

Γνωρίζουμε (βλ. Πρόταση 3.7.7) ότι για τις δυναμοσειρές υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός R τέτοιος ώστε η σειρά να συγκλίνει απόλυτα αν $\mid x - x_0 \mid < R$ και να αποκλίνει αν $\mid x - x_0 \mid > R$. Ο αριθμός R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Θα δούμε τώρα, οτι αν μια δυναμοσειρά την δούμε σαν μια σειρά συναρτήσεων (συμφωνα με τον Ορισμό 6.9.1) η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα μέσα σην ακτίνα σύγκλισης της και έτσι ορίζει μια συνάρτηση F η οποία είναι συνεχής, ολοκληρώσιμη και διαφορίσιμη και μάλιστα μπορούμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και την παράγωγο κάνοντας τις αντίστοιχες πράξεις όρο προς όρο.

Πρόταση 6.9.2. *Έστω $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ μία δυναμοσειρά, R η ακτίνα σύγκλισης της και $F(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ για $|x-x_0| < R$. Τότε:*

1. *Αν $0 < S < R$, η σύγκλιση της δυναμοσειράς στην συνάρτηση F είναι* **ομοιόμορφη** *στο διάστημα $[x_0 - S, x_0 + S]$, και η συνάρτηση F είναι συνεχης στο διάστημα αυτό.*

2. *Αν $a, b \in (t - R, t + R)$ τότε η F είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_a^b (x-x_0)^j\,dx$$

3. *Η F είναι διαφορίσιμη στο $(x_0 - R, x_0 + R)$ και*

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j\,a_j\,(x-x_0)^{j-1}, \;\; \forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R) \mid x - t \mid < R.$$

Απόδειξη: Το 1 προκύπτει απο την εφαρμογή του κριτηρίου του Weierstrass (βλ. Πρόταση 6.8.3) και η συνέχεια της F απο άμεση εφαρμογή της Πρότασης 6.5.1. Τα 2 και 3 προκύπτουν απο άμεση εφαρμογή των Προτάσεων 6.8.6 και 6.8.8 αντίστοιχα. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση. ■

Σχόλιο 6.9.3. *Οι ισχυρισμοί 2 και 3 της Πρότασης 6.9.2 μας δίνουν αντιστοίχως ότι οι αριθμητικές σειρές*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,b_j, \;\; \text{όπου } b_j = \int_a^b (x-x_0)^j\,dx,$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} j\,a_j\,(x-x_0)^{j-1}, \;\; \text{για κάθε } x \in (-R + x_0, T + x_0),$$

συγκλίνουν. Αυτό επιτρέπει πολλές φορές τον υπολογισμό των τιμών ορισμένων αριθμητικων σειρών.

Παράδειγμα 6.9.4. *Ας θεωρήσουμε την γεωμετρική σειρά $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x} =: F(x)$, $|x| < 1$. Η εφαρμογή της Πρότασης 6.9.2 μας δίνει τις σχέσεις*

$$F'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2\,x - 3\,x^2 + \cdots, \;\; |x| < 1,$$
$$\int_0^b F(x)\,dx = \ln(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}\,b^j}{j}, \;\; |b| < 1.$$

Η Πρόταση 6.9.2 (1) **δεν** μας δίνει πάντοτε την μέγιστη πληροφορία για την σύγκλιση μιας σειράς, υπό την έννοια ότι μπορεί να μην εξασφαλίζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος που μας ενδιαφέρει. Το Θεώρημα του Abel μπορεί να συμπληρώσει το κενό αυτό.

Θεώρημα 6.9.5 (Abel). *Έστω $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ μια δυναμοσειρά και R η ακτίνα σύγκλισης της.*

1. *Αν η αριθμητική σειρά* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(R-x_0)^j$ *συγκλίνει τότε*

$$\lim_{x\to(R-x_0)^-} F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(R-x_0)^j.$$

2. *Αν η αριθμητική σειρά* $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j(R+x_0)^j$ *συγκλίνει τότε*

$$\lim_{x\to(-x_0-R)^+} F(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j(R+x_0)^j.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη παραλείπεται. ■

Παράδειγμα 6.9.6. *Δίνεται ότι η δυναμοσειρά* $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}x^j}{j}$ *συγκλίνει για* $|x|<1$ *στην συνάρτηση* $F(x) = \ln(1+x)$. *Τι γίνεται για* $x=1$; *Η σειρά* $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$ *συγκλίνει. Απο το θεώρημα του Abel έχουμε οτι* $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2)$.

6.10 Το θεώρημα προσέγγισης του *Weierstrass*

Θεώρημα 6.10.1. *Κάθε συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$, $I=[a,b]$ *η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής, μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα απο κάποιο πολυώνυμο* P_n.*, δηλαδή για κάθε* $\epsilon>0$ *υπάρχει κάποιο πολυώνυμο βαθμού* $n=n(\epsilon)$, $P_n : I\to\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $\sup_{x\in I}|f(x)-P(x)|<\epsilon$.

Η απόδειξη είναι κατασκευαστική και χρησιμοποιεί μια κατηγορία πολυωνύμων που ονομάζονται πολυώνυμα Bernstein.

Ορισμός 6.10.2 (Πολυώνυμα Bernstein). *Η πολυωνυμική βάση του Bernstein βαθμού* n*, είναι οι* $n+1$ *συναρτήσεις* $b_{m,n} : [0,1]\to\mathbb{R}$, $m=0,1,\cdots,n$, *με*

$$b_{m,n}(x) = \frac{n!}{m!(n-m)!}x^m(1-x)^{n-m},\ \ m=0,1,\cdots,n,\ \ x\in[0,1].$$

Ο γραμμικός συνδυασμός $B_n = \sum_{m=0}^{n}\beta_m b_{m,n}$ *ονομάζεται πολυώνυμο Bernstein βαθμού* n *και οι πραγματικοί αριθμοί* β_m, $m=0,1,\cdots,n$, *ονομάζονται συντελεστές Bernstein ή συντελεστές Bézier.*

Η πολυωνυμική βάση του Bernstein ικανοποιεί ορισμένες πολύ χρήσιμες ιδιότητες.

Πρόταση 6.10.3 (Διαμέριση της μονάδας). *Για κάθε* $n\in\mathbb{N}^+$ *και κάθε* $x\in[0,1]$, *ισχύει ότι*

$$\sum_{m=0}^{n} b_{m,n}(x) = 1.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}x^m y^{n-m}, \tag{6.5}$$

και θέτουμε $y=1-x$ στην (6.5). ■

Πρόταση 6.10.4. *Για κάθε* $n\in\mathbb{N}^+$ *και κάθε* $x\in[0,1]$, *ισχύει ότι*

$$\sum_{m=0}^{n} m b_{m,n}(x) = nx,$$
$$\sum_{m=0}^{n} m(m-1)b_{m,n}(x) = n(n-1)x^2,$$

και επίσης ισχύει ότι

$$\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2 b_{m,n}(x) = nx(1-x). \tag{6.6}$$

Απόδειξη: Οι δύο πρώτες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα (6.5) . Για την πρώτη παραγωγίζουμε την (6.5) ως προς x μετά θετουμε $y = 1 - x$. Για την δεύτερη παραγωγίζουμε την (6.5) δυο φορές ως προς x, μετά θέτουμε $y = 1 - x$. Για την (6.6) απλά προσθέτουμε την πρώτη και την δευτερη. ■

Εκτός απο αυτές, τα πολυώνυμα Bernstein έχουν τις εξής πολύ χρήσιμες ιδιότητες

Πρόταση 6.10.5 (Ιδιότητες των πολυωνύμων Bernstein). *Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, $m = 0, 1, \cdots, n$ και $x \in [0,1]$ ισχύει*

1. $b'_{m,n}(x) = n(b_{m-1,n-1}(x) - b_{m,n-1}(x))$,
2. $b_{m,n-1}(x) = \frac{n-m}{n} b_{m,n}(x) + \frac{m+1}{n} b_{m+1,n}(x)$,
3. $\int_0^1 b_{m,n}(x)dx = \frac{1}{n+1}$, $m = 0, 1, \cdots, n$.

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Ορισμός 6.10.6 (Προσέγγιση Bernstein). *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Το πολυώνυμο*

$$B_n^{(f)}(x) := \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) b_{m,n}(x),$$

ονομάζεται προσέγγιση Bernstein για την συνάρτηση f.

Θεώρημα 6.10.7. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{B_n^{(f)}\}$, $B_n^{(f)} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ με $B_n^{(f)}$ όπως παραπάνω συγκλίνει ομοιόμορφα στην συναρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Ας πάρουμε αρχικά ενα οποιοδήποτε $x \in [0,1]$. Απο την διαμέριση της μονάδας (βλ. Πρόταση 6.10.3) έχουμε οτι

$$B_n^{(f)}(x) - f(x) = \sum_{m=0}^{n} (f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)) b_{m,n}(x),$$

συνεπώς απο την τριγωνική ανισότητα

$$|B_n^{(f)}(x) - f(x)| \leq \sum_{m=0}^{n} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| b_{m,n}(x).$$

Σπάμε το άθροισμα αυτό σε δυο κομμάτια, αυτούς για τους οποίους $|\frac{m}{n} - x| < \delta$ και αυτούς για τους οποίους $|\frac{m}{n} - x| \geq \delta$ για κάποιο δεδομένο δ,

$$\sum_{m=0}^{n} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| b_{m,n}(x) = \sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|<\delta} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| b_{m,n}(x) + \sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|\geq\delta} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| b_{m,n}(x)$$

Απο την συνέχεια της f, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δ τέτοιο ώστε $|f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ για $|x' - x| < \delta$. Για το πρώτο άθροισμα λοιπόν έχουμε

$$\sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|<\delta} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| b_{m,n}(x) < \frac{\epsilon}{2} \sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|<\delta} b_{m,n}(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{m=0}^{n} b_{m,n}(x) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Θα ασχοληθούμε τώρα με το υπόλοιπο μέρος του αθροίσματος. Αν το m είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $|\frac{m}{n} - x| \geq \delta$ τότε $1 \leq \frac{|\frac{m}{n}-x|^2}{\delta^2}$ και

$$\sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|\geq\delta} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| b_{m,n}(x) \leq \sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|\geq\delta} |f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| \frac{|\frac{m}{n} - x|^2}{\delta^2} b_{m,n}(x)$$
$$\leq \frac{2C}{\delta^2} \sum_{m\,:\,|\frac{m}{n}-x|\geq\delta} |\frac{m}{n} - x|^2 b_{m,n}(x) \leq 2C \sum_{m=0}^{n} |\frac{m}{n} - x|^2 b_{m,n}(x) = \frac{2C}{\delta^2 n} x(1-x) \leq \frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Στην παραπάνω εκτίμηση χρησιμοποιήσαμε αρχικα το γεγονός οτι μια συνεχής συνάρτηση είναι και φραγμενη καθως και την ταυτότητα (6.6) που αποδείξαμε στην Προταση 6.10.4.

Καταλήγουμε λοιπόν οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δ τέτοιο ωστε

$$|B_n^{(f)}(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2C}{\delta^2 n}. \tag{6.7}$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο θα ισχύει $\frac{2C}{\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{2}$ οπότε οδηγούμαστε στο ότι $B_n^{(f)}(x) \to f(x)$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Θα δείξουμε τώρα οτι η σύγκλιση είναι και ομοιόμορφη. Αυτό προκύπτει απο το οτι η f είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ απο το θεώρημα του Heiner οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ το δ της παραπάνω απόδειξης είναι ανεξάρτητο του x. 'ρα το δεξιό μέλος της εκτιμήσεως (6.7) είναι ανεξάρτητο απο την επιλογή του $x \in [0,1]$ και σαν συνέπεια αυτού μας επιτρέπεται να πάρουμε το sup επάνω σε όλα τα $x \in [0,1]$ στην (6.7) και να οδηγηθούμε στην

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n^{(f)}(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2C}{\delta^2 n}, \;\; n > N$$

για κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ απο όπου προκύπτει η ομοιόμορφη σύγκλιση. ■

Η προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων απο τα πολυώνυμα Bernstein μπορεί να μας δώσει χρήσιμες πληροφορίες και για τις παραγώγους της συνάρτησης αν αυτή είναι διαφορίσιμη.

Θεώρημα 6.10.8. *Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in [0,1]$ τότε $(B_n^{(f)})'(x) \to f'(x)$. Αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη[3] στο $[0,1]$ τότε $(B_n^{(f)})' \rightrightarrows f'$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη παραλείπεται. ■

Η προσέγγιση Bernstein μας παρέχει μια πολύ χρήσιμη αναπαράσταση μια συνεχούς συνάρτησης σε ολο το πεδίο ορισμού της, και μας επιτρέπει τον υπολογισμό των παραγώγων της (αν αυτές υπάρχουν) ή τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της. Επίσης μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη στην κατασκευή γραφικών στην πληροφορική ή την υπολογιστική γεωμετρια (καμπύλες Beziér), την μη παραμετρική στατιστική (ανάλυση συναρτησιακών δεδομένων) κλπ.

6.11 Εφαρμογές

6.11.1 Αναλυτικές συναρτήσεις και σειρές *Taylor*

Ένας τρόπος να πάρουμε μια δυναμοσειρά απο μια άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση είναι μέσω της σειράς Taylor.

Ορισμός 6.11.1 (Σειρά Taylor). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Η σειρά Taylor της συνάρτησης f γύρω απο το σημείο $x_0 \in I$, είναι η δυναμοσειρά $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ όπου $a_j := \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ και $f^{(j)}(x_0) = \frac{d^j f}{dx^j}(x = x_0)$.*

Παράδειγμα 6.11.2. *Η σειρά Taylor γύρω απο το σημείο $x_0 = 0$ για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι η δυναμοσειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.*

Μπορεί κανείς να δει εύκολα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.9.2 ότι αν η f είναι άπειρες φορές συνεχως διαφορίσιμη (θα συμβολίζουμε αυτό με $f \in C\infty$) τότε επειδή τα a_j είναι φραγμένα για κάθε j, η σειρά Taylor της f συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση F σε κάποιο φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτό ομως **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι $f = F$ δηλαδή ότι η συνάρτηση f την οποία χρησιμοποιήσαμε για να παράγουμε την εν λόγω σειρά Taylor ταυτίζεται με την συνάρτηση F στην οποία η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα. Αυτό θέλει λίγο παραπάνω δουλειά!

Ορισμός 6.11.3 (Αναλυτικές συναρτήσεις). *Μια συνάρτηση f ονομάζεται αναλυτική γύρω απο ένα σημείο x_0 αν μπορεί να εκφραστεί με την μορφή μιας δυναμοσειράς με κέντρο το x_0 και θετική ακτίνα σύγκλισης R (δηλαδή $R > 0$).*

[3] δηλαδή η $f'(x)$ οριζεται σε κάθε $x \in [0,1]$ και η συνάρτηση $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$

Πρόταση 6.11.4 (Σύγκλιση σειρών Taylor). *Ας υποθέσουμε ότι η συναρτηση f ορίζεται απο μια δυναμοσειρά ως $f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(x-x_0)^j$, για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ όπου R είναι η ακτίνα συγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε $a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$, $j = 0, 1, \cdots$ συνεπώς $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε m φορές την Προταση 6.9.2 (3) και καταλήγουμε στο ότι

$$f^{(m)}(x) = \sum_{j=m}^{\infty} j\,(j-1)\,(j-2)\cdots(j-m+1)\,a_j\,(x-x_0)^{j-m},\ \ x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Θέτουμε τώρα $x = x_0$ και βλέπουμε ότι στο άθροισμα αυτό συνεισφέρει μόνο ο όρος $j = m$, συνεπώς $f^{(m)}(x_0) = a_j\,m!$ απο όπου και καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Παράδειγμα 6.11.5. *Δείξτε ότι $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor.*

6.11.2 Ροπογεννήτριες συναρτήσεις

Μία πολύ χρήσιμη εφαρμογή των σειρών συναρτήσεων στις πιθανότητες είναι οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις.

Ας θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή X η οποία μπορεί να πάρει τιμές σε κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$. Θεωρούμε ότι $P(X = x_j) = p_j \in [0,1]$, και $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$.

Ορισμός 6.11.6 (Ροπογεννήτρια). *Η συνάρτηση $\varphi_X : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται με την βοήθεια της δυναμοσειράς $\varphi_X(x) := \sum_{j=1}^{\infty} p_j\, x^{x_j} = \mathbb{E}[x^X]$, $x \in [0,1]$ ονομάζεται ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X.*

Η ροπογεννήτια μπορεί να μας χαρακτηρίσει πλήρως την κατανομή πιθανότητας. Η θεωρία της ομοιόμορφης συγκλισης σειρών συναρτήσεων και πιο συγκεκριμένα η εφαρμογή της στις δυναμοσειρές μας δίνει πολύτιμες πληροφορίες σχετικα με την ροπογεννήτρια.

Πρόταση 6.11.7. *Η ροπογεννήτρια είναι μια συνεχής συναρτηση με την ιδιότητα $\lim_{x\to 1^-} \varphi_X(x) = 1$.*

Απόδειξη: Η σειρά που ορίζει την φ_X συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1)$ οπότε η συνάρτηση φ_X είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Εφόσον η $\{p_j\}$ είναι μια διακριτή κατανομή πιθανότητας, η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} p_j$ συγκλίνει οπότε απο το θεώρημα του Abel

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1,$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. ■

Η ροπογεννήτρια μας επιτρέπει τον υπολογισμό των παραγοντικών ροπών της τυχαίας μεταβλητής.

Πρόταση 6.11.8. *Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και φ_X η ροπογεννήτρια της. Η k-τάξης παραγοντική ροπή της X μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια της k-οστής παραγώγου της ροπογεννήτριας ως*

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \lim_{x\to 1^-} \frac{d^k \varphi_X}{dx^k}(x) =: \varphi_X^{(k)}(1).$$

Απόδειξη: Η φ_X είναι αναλυτική συνάρτηση στο $(0,1)$. Απο τις ιδιότητες των δυναμοσειρών έχουμε οτι

$$\varphi_X^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j x^{x_j - k} x_j(x_j - 1)\cdots(x_j - k + 1)] = \mathbb{E}[x^{X-k} X(X-1)\cdots(X-k+1)]$$

Επειδή η k-παραγοντική ροπή υπάρχει η αριθμητικη σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} p_j x_j(x_j - 1)\cdots(x_j - k + 1)]$ συγκλίνει οπότε με εφαρμογή του Θεωρήματος του Abel παίρνουμε το ζητούμενο. ■

6.11.3 Πιθανοθεωρητική ερμηνεία της προσέγγισης *Bernstein*: Στοχαστική προσέγγιση

Τα πολυώνυμα Bernstein για κάποια συνάρτηση f (βλ. Ορισμό 6.10.6) επιδέχονται μια πολύ ενδιαφέρουσα πιθανοθεωρητική ερμηνεία. Ας πάρουμε $x \in [0,1]$. Αυτό μπορούμε να το ερμηνεύσουμε σαν την πιθανότητα επιτυχίας ενός πειράματος και το $1-x$ σαν την πιθανότητα αποτυχίας του πειράματος αυτού. Επαναλαμβάνουμε n ανεξάρτητα πειράματα. Η πιθανότητα να έχουμε m επιτυχίες στα n πειράματα είναι

$$P(m\,\text{επιτυχιες στα}\,n\,\text{πειράματα}) = \frac{n!}{m!(n-m)!}x^m(1-x)^{n-m} = b_{n,m}(x),$$

δηλαδη ταυτίζεται με την τιμή του m πολυωνύμου της πολυωνυμικης βάσης Bernstein στο σημείο x. Ας υποθέσουμε τώρα οτι παίζουμε το ακόλουθο 'παιχνίδι'. Αν στις n επαναλήψεις του πειράματος έχουμε m επιτυχίες κερδίζουμε ενα βραβείο $y_m = f\left(\frac{m}{n}\right)$. Το βραβείο είναι μια τυχαία μεταβλητή Y η οποία είναι διακριτή και

$$P(Y = y_m) = b_{n,m}(x)$$

Το αναμενόμενο μας βραβειο θα είναι ίσο προς

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{m=0}^{n} y_m P(Y = y_m) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) b_{n,m}(x) = B_n^{(f)}(x),$$

δηλαδή η τιμή που παίρνει η n-οστή προσέγγιση Bernstein για την συνάρτηση f στο σημείο $x \in [0,1]$ το οποίο ερμηνεύσαμε ως την πιθανότητα επιτυχίας των πειραμάτων.

Η ερμηνεία αυτή μας δίνει μια εναλλακτική προσέγγιση στην απόδειξη του θεωρήματος προσέγγισης του Weierstrass χρησιμοποιώντας την θεωρία πιθανοτήτων και τα θεωρήματα σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών καθώς και μια πολύ όμορφη περιοχή της θεωριας πιθανοτήτων, την θεωρια μεγάλων αποκλίσεων. Επίσης, μας οδηγεί σε εναλλακτικές 'στατιστικες' μεθόδους προσέγγισης συναρτήσεων, μια επιστημονική περιοχή που ονομάζεται στοχαστική θεωρία προσέγγισης.

6.11.4 Υπολογισμός πιθανοτήτων

Πολλές κατανομές δίνονται συναρτήσει της πυκνότητας κατανομής, η οποία όμως είναι μια συνάρτηση της οποίας το αόριστο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Σε αυτή την περίπτωση ο μόνος τρόπος να υπολογίσουμε τις πιθανότητες διαφόρων γεγονότων είναι χρησιμοποιώντας την θεωρία των σειρών συναρτήσεων, και με τον τρόπο αυτό να εκφράσουμε την ζητούμενη πιθανότητα με την μορφή μιας αριθμητικής σειράς.

Σαν ενα απο τα πολλα παραδείγματα ας πάρουμε την γνωστη μας κανονική κατανομή. Η πυκνότητα πιθανοτητας είναι μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = c_1 \exp(-c_2 x^2)$ για κατάλληλες τιμές των σταθερών c_1 και c_2. Έστω λοιπόν οτι θέλετε την πιθανότητα $P(a < X < b)$ όταν η X ακολουθεί την κατανομή αυτή. Απο την θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζετε οτι

$$P(a < X < b) = \int_a^b c_1 \exp(-c_2 x^2) dx,$$

αλλά αυτό το ολοκλήρωμα δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε σε κλειστή μορφή. Για να κάνουμε τον υπολογισμό ας θυμηθούμε οτι

$$\exp(-c_2 x^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(-c_2 x^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{c_2^j}{j!} x^{2j},$$

και η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα. Μπορούμε λοιπόν να υπολογισουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f ολοκληρώνοντας την παραπάνω σειρά όρο προς όρο. Αυτό μας δίνει

$$\int_a^b c_1 \exp(-c_2 x^2) dx = c_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{c_2^j}{j!} \int_a^b x^{2j} dx = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{c_2^j}{j!} \frac{1}{2j+1}(b^{2j+1} - a^{2j+1}),$$

δηλαδή η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται απο την αριθμητική σειρά

$$P(a < X < b) = c_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{c_2^j}{j!} \frac{1}{2j+1}(b^{2j+1} - a^{2j+1}),$$

η οποία και είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί. Οι πίνακες πιθανοτήτων ή ακομα και πολλές φορές οι προσεγγίσεις που σας δίνουν τα διάφορα στατιστικά πακέτα γίνονται με τον τρόπο αυτό, που πολλές φορές είναι προτιμητέος απο την αριθμητική ολοκλήρωση.

6.11.5 Ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτήσεων κατανομών

Το ακόλουθο θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Polya μας δείχνει ότι αν μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομών συγκλίνει τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον, γιατί όπως γνωρίζουμε, εν γένει η σύγκλιση των ακολουθιών συναρτήσεων μπορεί να μην είναι ομοιόμορφη. Στην περίπτωση όμως των συναρτήσεων κατανομών λόγω των ειδικών ιδιοτήτων τους και συγκεκριμένα της μονοτονίας η σημειακή σύγκλιση προυποθέτει και την ομοιόμορφη (Severini (2005)).

Θεώρημα 6.11.9. *Έστω F_n μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομής. Αν $F_n \to F$ και F συνεχής τότε και $F_n \rightrightarrows F$.*

Απόδειξη: Ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Οι συναρτήσεις F_n και F είναι αύξουσες εφόσον είναι συναρτήσεις κατανομής. Οι συναρτήσεις F_n, F ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$ και ας πάρουμε μια διαμέριση $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ του $\mathbb{R}$ θεωρώντας ότι $x_0 = -\infty$ και $x_m = +\infty$. Επιλέγουμε την διαμέριση τόσο λεπτή ώστε $F(x_j) - F(x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2}$ για όλα τα j, όπου έχουμε λάβει υπόψιν ότι $F(x_0) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $F(x_n) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Λόγω της συνέχειας της F, αυτό είναι δυνατό.

Ας πάρουμε τώρα οποιοδήποτε $x \in [x_{j-1}, x_j]$, για $j = 1, \cdots, m$. Εφόσον $F_n \to F$ (σημειακά) θα έχουμε ότι $F_n(x_j) \to F(x_j)$ για κάθε j, συνεπώς θα υπάρχει $N = N(x_j)$ τέτοιο ώστε $|F_n(x_j) - F(x_j)| < \frac{\epsilon}{2}$ για $n > N(x_j)$. Η σχέση αυτή μας δίνει

$$F_n(x_j) < F(x_j) + \frac{\epsilon}{2},$$

απο όπου αφαιρώντας κατά μέλη την $F(x_{j-1})$ παίρνουμε

$$F_n(x_j) - F(x_{j-1}) < F(x_j) - F(x_{j-1}) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.8}$$

Απο την άλλη, απο την μονοτονία της F_n, $F_n(x) \le F_n(x_j)$ και $F(x_{j-1}) \le F(x)$ οπότε αφαιρώντας κατά μέλη (και προσέχοντας την αλλαγή του προσήμου)

$$F_n(x) - F(x) \le F_n(x_j) - F(x_{j-1}) \tag{6.9}$$

Συνδυάζουμε τις (6.8) και (6.9) και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$F_n(x) - F(x) \le F_n(x_j) - F(x_{j-1}) < F(x_j) - F(x_{j-1}) + \frac{\epsilon}{2},\ \ n > N(x_j). \tag{6.10}$$

Με την ίδια λογική $F_n(x_{j-1}) \to F(x_{j-1})$ οπότε υπάρχει $N = N(x_{j-1})$ τέτοιο ώστε $|F_n(x_{j-1}) - F(x_{j-1})| < \frac{\epsilon}{2}$ για $n > N(x_{j-1})$ και άρα

$$F(x_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2} < F_n(x_{j-1}),$$

από οπου αφαιρώντας κατά μελη την $F(x_j)$ καταλήγουμε

$$F(x_{j-1}) - F(x_j) - \frac{\epsilon}{2} < F_n(x_{j-1}) - F(x_j). \tag{6.11}$$

Απο την μονοτονία των F_n, F έχουμε ότι $F_n(x) \le F_n(x_j)$ και $F(x) \le F(x_j)$ οπότε αφαιρώντας κατά μέλη

$$F_n(x) - F(x) \ge F_n(x_{j-1}) - F(x_j). \tag{6.12}$$

Συνδυάζοντας τις (6.11) και (6.12) και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$F(x_{j-1}) - F(x_j) - \frac{\epsilon}{2} < F_n(x_{j-1}) - F(x_j) \le F_n(x) - F(x),\ \ n > N(x_{j-1}). \tag{6.13}$$

Απο τον τρόπο που επιλέξαμε την διαμέριση έχουμε ότι $F(x_j) - F(x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2}$ και $F(x_{j-1}) - F(x_j) > -\frac{\epsilon}{2}$ οπότε χρησιμοποιώντας αυτό αντίστοιχα στις (6.10) και (6.13) οπότε για $n > \max(N(x_{j-1}), N(x_j))$ έχουμε ότι $F_n(x) - F(x) < \epsilon$ και $F_n(x) - F(x) > -\epsilon$ άρα

$$|F_n(x) - F(x)| < \epsilon,\ \ n > \max(N(x_{j-1}), N(x_j)),\ \ x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Αν επιλέξουμε $N = \max(N(x_0), N(x_1) \cdots, N(x_m))$ η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κατά συνέπεια δεδομένου κάποιου $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο N[4] τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

συνεπώς $F_n \rightrightarrows F$. ■

6.12 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Κατανοείστε την έννοια μιας ακολουθίας συναρτήσεων.
- Κατανοείστε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει – το όριο ορίζει μια συνάρτηση.
- Κατανοείστε την διαφορά μεταξύ της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης.
- Η σημειακή σύγκλιση παρουσιάζει προβλήματα σε σχέση με την συνέχεια, την ολοκλήρωση και την παραγώγιση: Το όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητα συνεχής συνάρτηση, το ολοκλήρωμα δεν αντιμετατίθεται με το όριο (αν χρησιμοποιούμε την σημειακή σύγκλιση), η παραγώγιση δεν αντιμετατίθεται με το όριο (αν χρησιμοποιούμε την σημειακή σύγκλιση).
- Η ομοιόμορφη σύγκλιση μας βοηθάει να ξεπεράσουμε όλα τα παραπάνω προβλήματα.

[4] Η διαμέριση που χρησιμοποιούμε περιέχει πάντοτε πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Κεφάλαιο 7

Εισαγωγή στους μετρικούς χώρους

7.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτη θα εισάγουμε την θεωρία των μετρικών χώρων. Η θεωρία αυτή μας επιτρέπει να γενικεύσουμε την μελέτη της σύγκλισης ακολουθίων και των συνεχών συναρτήσεων σε περιπτώσεις που ξεφεύγουν κατά πολύ απο τις αντίστοιχες έννοιες στο σύνολο $\mathbb{R}$ και που είναι πολύ χρήσιμες σε πολλές εφαρμογές μεταξύ άλλων και στις πιθανότητες, την στατιστική και την οικονομικη θεωρία. Για μια καλή εισαγωγή στην θεωρία των μετρικών χώρων και για περισσοτερες πληροφορίες μπορεί κανείς να συμβουλευθεί π.χ. τους Lebedev et al. (2002), Bobrowski (2005) κλπ. Επίσης μια πολύ καλή παρουσίαση γίνεται στο βιβλίο των Johnsonbaugh and Pfaffenberger (1981).

7.2 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 7.2.1. *Μία απεικόνιση $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **μετρική** *αν ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:*

1. $d(\mathsf{x},\mathsf{y}) \geq 0$ *για κάθε* $\mathsf{x},\mathsf{y} \in M$ *και* $d(\mathsf{x},\mathsf{y}) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathsf{x} = \mathsf{y}$.
2. $d(\mathsf{x},\mathsf{y}) = d(\mathsf{y},\mathsf{x})$ *για κάθε* $\mathsf{x},\mathsf{y} \in M$.
3. $d(\mathsf{x},\mathsf{z}) \leq d(\mathsf{x},\mathsf{y}) + d(\mathsf{y},\mathsf{z})$ *για κάθε* $\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z} \in M$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Απο τις τρείς αυτές συνθήκες συνήθως η δυσκολότερη να αποδειχθεί είναι η τριγωνική ανισότητα. Στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας μπορεί να μας βοηθήσει η ανισότητα Cauchy-Schwartz την οποία θα δούμε λίγο παρακάτω.

Ορισμός 7.2.2. *Ένας μετρικός χώρος είναι το ζεύγος (M, d) όπου M είναι κάποιο σύνολο και d είναι κάποια μετρική.*

Η έννοια του μετρικού χώρου είναι πολύ γενική και περιλαμβάνει πολλά και ετερόκλητα παραδείγματα. Παραθέτουμε ορισμένα απο αυτά.

Παράδειγμα 7.2.3. *Το πιο απλό παράδειγμα μετρικου χώρου που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι $M = \mathbb{R}$, $\mathsf{x} = x \in \mathbb{R}$, $\mathsf{y} = y \in \mathbb{R}$ και $d(\mathsf{x},\mathsf{y}) = d(x,y) = \mid x - y \mid$.*

Παράδειγμα 7.2.4. *Ένα άλλο παράδειγμα μετρικού χώρου είναι ο $M = \mathbb{R}^m = \{(x_1, \cdots, x_,) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$. Στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία $\mathsf{x} \in M$ θα συμβολίζονται $\mathsf{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ με*

$$d(\mathsf{x},\mathsf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}.$$

Η μετρική αυτή είναι η Ευκλείδια μετρική.

Παράδειγμα 7.2.5. *Ας θεωρήσουμε*

$$M = \ell^1 = \{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \mid a_i \mid < \infty\}$$

τον χώρο των ακολουθιών που είναι απόλυτα συγκλίνουσες. Κάθε στοιχείο x *του* M *είναι μία ακολουθία* $\mathsf{x} = (x_1, x_2, \cdots)$*, δηλαδή αποτελείται απο άπειρες το πλήθος 'συνιστώσες '. Στον χώρο αυτό μπορούμε να ορίσουμε μία μετρική την*

$$d(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i - y_i \mid .$$

Παράδειγμα 7.2.6. *Ας θεωρήσουμε*

$$M = \ell^p = \{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \mid a_i \mid^p < \infty\}$$

τον χώρο των ακολουθιών που είναι $p-$ *συγκλίνουσες,* $p \geq 1$*. Κάθε στοιχείο* x *του* M *είναι μία ακολουθία* $\mathsf{x} = (x_1, x_2, \cdots)$*, δηλαδή αποτελείται απο άπειρες το πλήθος 'συνιστώσες '. Στον χώρο αυτό μπορούμε να ορίσουμε μία μετρική την*

$$d(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i - y_i \mid^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Η περίπτωση $p = 2$ *παρουσιάζει ειδικό ενδιαφέρον.*

Παράδειγμα 7.2.7. *Έστω* M *το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$*. Κάθε στοιχείο* $\mathsf{x} \in M$ *είναι μια συνεχής συνάρτηση* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$*. Μπορούμε στο σύνολο αυτό να ορίζουμε την μετρική* $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ *ως εξής: Έστω* $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in M$*, όπου* $\mathsf{x} = f$ *μια συνεχής συνάρτηση* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *και* $\mathsf{y} = g$ *μια συνεχής συνάρτηση* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$*. Τότε*

$$d(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid .$$

Ο (M, d) *είναι μετρικός χώρος.*

Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας πολλές φορές μας βοηθάει η ανισότητα Cauchy-Schwarz/

Πρόταση 7.2.8. *Έστω* $x_1, \cdots, x_n$ *και* $y_1, \cdots, y_n$ *πραγματικοί αριθμοί. Τότε*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη της ανισότητας αυτής αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \lambda\, x_i)^2$ είναι θετική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, να την θεωρήσουμε σαν ένα διώνυμο στο λ και να εφαρμόσουμε την θεωρία για το πρόσημο του διωνύμου. ■

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μπορεί να εφαρμοστεί και για $n = \infty$ αρκεί το δεξιό και το αριστερό της μέλος να είναι καλά ορισμένα.

7.3 Ακολουθίες και σύγκλιση σε μετρικούς χώρους

Μπορούμε να γενικεύσουμε την θεωρία για την σύγκλιση ακολουθιών που είδαμε στους πραγματικούς αριθμούς στην περίπτωση που έχουμε γενικά ακολουθίες σε μετρικούς χώρους. Με την έννοια ακολουθία σε κάποιον μετρικό χώρο (M, d) εννοούμε μία συλλογή $\{\mathsf{x}_n\} \subset M$, ($\mathsf{x}_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$) απο στοιχεία του M.

Ορισμός 7.3.1. *Έστω* (M, d) *ένας μετρικός χώρος και* x_n *μία ακολουθία στοιχείων στον* M*. Λέμε ότι η ακολουθία* x_n *συγκλίνει στο* x *όπου* $\mathsf{x} \in M$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει κάποιο* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n > N$ *να ισχύει* $d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) < \epsilon$*. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $\lim_{n\to\infty} \mathsf{x}_n = \mathsf{x}$ *ή πιο απλά* $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$*.*

Σχόλιο 7.3.2. *Θα συμβολίζουμε εδώ τις ακολουθίες λίγο διαφορετικά απο το πως τις συμβολίζαμε στον* $\mathbb{R}$*. Αντί για* x_n *οι όροι της ακολουθίας εδώ θα συμβολίζονται με* x_n*. Αυτό γίνεται γιατί κάθε όρος της ακολουθίας μπορεί να είναι ένα διάνυσμα που αποτελείται απο κάποιες συνιστώσες, ή ακόμα και μία άπειρη ακολουθία απο μόνη της.*
Π.χ. αν $M = \mathbb{R}^m$ *τότε* $\mathsf{x}_n = (x_{1,n}, \cdots, x_{m,n})$*, δηλαδή κάθε όρος της ακολουθίας είναι ένα διάνυσμα* m *διαστάσεων. Εναλλακτικά κάθε όρος της ακολουθίας μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μία συλλογή απο* m *ακολουθίες στο* $\mathbb{R}$*. Για να μην μπερδεύουμε τον όρο της ακολουθίας με την συνιστώσα, αρκεί να θυμόμαστε ότι ο δείκτης πριν το κόμμα αντιστοιχεί στην συνιστώσα και ο δείκτης μετά το κόμμα αντιστοιχεί στον όρο της ακολουθίας.*

Ενα άλλο παράδειγμα είναι π.χ. αν $M = \ell^2$. *Στην περίπτωση αυτή* $\mathsf{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots)$. *Κάθε όρος της ακολουθίας μπορεί να θεωρήσουμε ότι αποτελείται απο άπειρες ακολουθίες στο* $\mathbb{R}$, *τέτοιες όμως ώστε να ισχύει* $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_{i,n}|^2} < \infty$ *για κάθε* n.

Παράδειγμα 7.3.3. *Έστω* $M = \mathbb{R}^m$ *με την Ευκλείδια μετρική, και* $\{\mathsf{x}_n\}$ *μία ακολουθία στον* M. *Λέμε οτι* $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ *για κάποιο* $\mathsf{x} = (x_1, \cdots, x_m) \in M$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}^+$ *τέτοιο ώστε για* $n > N$ *να ισχύει*

$$d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_{i,n} - x_i|^2} < \epsilon.$$

Παράδειγμα 7.3.4. *Έστω* $M = \ell^p$ *και* $\{\mathsf{x}_n\}$ *μία ακολουθία στον* M. *Λέμε οτι* $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ *για κάποιο* $\mathsf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in M$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για* $n > N$ *να ισχύει*

$$d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_{i,n} - x_i|^p} < \epsilon.$$

Τα περισσότερα αποτελέσματα σχετικά με την σύγκλιση ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ ισχύουν και στο γενικό αυτό πλαίσιο. Για παράδειγμα, αν μια ακολουθία συγκλινει στο M το όριο θα είναι μοναδικό, ή π.χ. μία συγκλίνουσα ακολουθία θα είναι φραγμένη κ.α. Φυσικά, πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός γιατί όλες οι ιδιότητες που έχουν οι ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ δεν μεταφέρονται απαραίτητα σε οποιονδήποτε γενικό μετρικό χώρο. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε π.χ. ότι εν γένει το θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει γενικά σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο, ή π.χ δεν είναι απαραίτητο ότι οποιαδήποτε ακολουθία Cauchy θα είναι συγκλίνουσα σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

Ας ξεκινήσουμε με την εξής σημαντική παρατήρηση.

Πρόταση 7.3.5. *Έστω* $\{\mathsf{x}_n\}$ *μία ακολουθία στον* $\mathbb{R}^m$ *και κάποιο στοιχείο* $\mathsf{x} = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. *Η* $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ *στον* $\mathbb{R}^m$ *αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συνιστώσα δηλαδή αν και μόνο αν* $x_{i,n} \to x_i$ *σαν ακολουθίες στο* $\mathbb{R}$ *για κάθε* $i = 1, \cdots, m$.

Απόδειξη: Έστω ότι x_n συγκλίνει στο x στον $\mathbb{R}^m$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει

$$d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \mid x_{i,n} - x_i \mid^2} < \epsilon.$$

Όμως,

$$\mid x_{j,n} - x_j \mid \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \mid x_{i,n} - x_i \mid^2} \text{ για κάθε } j = 1, \cdots, m.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει $\mid x_{j,n} - x_j \mid \leq \epsilon$ για κάθε $j = 1, \cdots, m$ οπότε εξασφαλίζεται και η σύγκλιση κατά συνιστώσα.
Αντίστροφα τώρα ας υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες $x_{j,n} \to x_j$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, \cdots, m$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στο $\mathbb{R}^m$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει

$$d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \mid x_{i,n} - x_i \mid^2} < \epsilon.$$

Επειδή $x_{j,n} \to x_j$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, \cdots, m$, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon^* := \epsilon_j > 0$ υπάρχει $N_j \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $n > N_j$ να ισχύει $\mid x_{j,n} - x_j \mid < \epsilon_j$ για κάθε $j = 1, \cdots, j$. Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και ας επιλέξουμε $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$, $j = 1, \cdots, m$. Τότε μπορούμε να βρούμε ένα $N \in \mathbb{N}^+$ και συγκεκριμένα το $N = max(N_1, \cdots, N_m)$ τέτοιο ώστε αν $n > N$ να ισχύει

$$d(\mathsf{x}_n, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \mid x_{i,n} - x_i \mid^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon,$$

οπότε και αποδείχθηκε ο ισχυρισμός μας. ■

Το πολύ διαισθητικό και χρήσιμο αυτό αποτέλεσμα δεν ισχύει όμως γενικα! Σε περιπτώσεις που ο μετρικός μας χώρος M αποτελείται απο στοιχεία που μπορεί να έχουν άπειρες συνιστώσες μπορεί να μην ισχύει ότι η σύγκλιση κατά συνιστώσα εξασφαλίζει και την σύγκλιση στον M! Αυτό συμβαίνει γιατί στην περίπτωση αυτή θα πρέπει στην παραπάνω εκτίμηση να πρέπει να αντικατασταθεί το $N = \max(N_1, \cdots, N_m)$ με το $N = \sup_{j\in\mathbb{N}^+} N_j$ το οποίο δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένο! Αντίθετως, η σύγκλιση στον M μας εξασφαλίζει **πάντοτε** την σύγκλιση κατά συνιστώσα, οποιαδήποτε και αν είναι η διάσταση του χώρου. Το παρακάτω παράδειγμα μπορεί να μας πείσει.

Παράδειγμα 7.3.6. *Έστω $M = \ell^2$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\{x_n\} \subset M = \ell^2$ με $\mathsf{x}_n := \delta_n = (\delta_{1,n}, \delta_{2,n}, \cdots, \delta_{k,n}, \cdots)$, όπου $\delta_{k,n}$ είναι το δέλτα του Kronecker. Μπορεί κανείς εύκολα να δει ότι $\delta_{k,n} \to 0$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, 2, \cdots$ καθώς $n \to \infty$. Θα έμπαινε λοιπόν στον πειρασμό να έλεγε ότι αν ορίσουμε ως $\mathsf{x} := \mathbf{0} = (0, 0, \cdots)$ την μηδενική ακολουθία, που φυσικά ανήκει στον ℓ^2 θα έπρεπε να είχαμε $\mathsf{x}_n = \delta_n \to \mathsf{x}$ στον ℓ^2. Αυτό όμως είναί* **λάθος** *γιατί*

$$d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) = d(\delta_n, \mathbf{0}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \mid \delta_{i,n} - x_i \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \mid \delta_{i,n} \mid^2} = 1,$$

για κάθε n. Αυτό, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.3.1 μας αποκλείει την σύγκλιση $\mathsf{x}_n = \delta_n \to \mathsf{x} = \mathbf{0}$ στον ℓ^2!

Απο τη Πρόταση 7.3.5 παραμένει σε ισχύ μόνο το ένα μέρος της στους χώρους ℓ^p, $p \geq 1$, δηλαδή ότι η σύγκλιση στον ℓ^p εξασφαλίζει και την σύγκλιση κατά συνιστώσα.

Πρόταση 7.3.7. *Έστω $M = \ell^p$, $p \geq 1$ και $\{\mathsf{x}_n\} \subset M$ μία ακολουθία. Αν $\mathsf{x}_n \to x$ τότε έχουμε σύγκλιση κατά συνιστώσα δηλαδή $x_{i,n} \to x_i$ στον $\mathbb{R}$ για κάθε i*

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ∎

7.4 Κλειστά και ανοιχτά σύνολα

7.4.1 Κλειστά σύνολα

Η έννοια του κλειστού συνόλου σχετίζεται με το πως ένα σύνολο τοποθετείται μέσα σε ένα μεγαλύτερο σύνολο.

Ορισμός 7.4.1 (Σημείο συσσώρευσης ή οριακό σημείο). *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και $X \subset M$. Ένα σημείο του $\mathsf{x} \in M$ είναι ένα* **σημείο συσσώρευσης** *ή* **οριακό σημείο** *του X αν υπάρχει μία ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ (με την σύγκλιση στον M).*

Από τον παραπάνω ορισμό μας είναι προφανές ότι για ορισμένες επιλογές των X και M δεν είναι απαραίτητο κάθε σημείο συσσώρευσης (οριακό σημείο) του X να ανήκει σε αυτό.

Ορισμός 7.4.2 (Κλειστό σύνολο). *Ένα υποσύνολο $X \subset M$ ονομάζεται* **κλειστό** *στο M αν κάθε σημειο συσσώρευσης (οριακό σημείο) του X ανήκει στο X.*

Παράδειγμα 7.4.3. *Έστω $M = \mathbb{R}$ και $X = [0, 1)$. Προφανώς ισχύει ότι $X \subset M$. Το σημείο $\{1\} \in M$ είναι ένα οριακό σημείο του X γιατί μπορεί να βρούμε μία ακολουθία $\mathsf{x}_n \in X$, π.χ. την $\mathsf{x}_n = x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$, για την οποία ισχύει ότι $\mathsf{x}_n \to 1$. Όμως το $\{1\}$ παρότι είναι οριακό σημείο του X δεν ανήκει στο X! Συνεπώς το X δεν είναι κλειστό!*

Παράδειγμα 7.4.4. *Αν στο παραπάνω παράδειγμα είχαμε παρει $X = [0, 1]$ τότε το X θα ήταν κλειστό.*

Παράδειγμα 7.4.5. *Έστω $M = \mathbb{R}^m$ με την ευκλείδια μετρική και $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$. Το X είναι κλειστό στο M.*

Παράδειγμα 7.4.6 (Κλειστή μπάλα του M). *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος, $x \in M$ και ας ορίσουμε το σύνολο $X = \{y \in M \mid d(y, x) \leq \epsilon\}$. Το υποσύνολο αυτό $X \subset M$ ονομάζεται κλειστή μπάλα του M με κέντρο x και ακτίνα ϵ. Το X είναι κλειστό στο M.*

Ορισμός 7.4.7 (Κλειστότητα ενός συνόλου). *Για κάποιο $X \subset M$ μπορούμε να ορίσουμε σαν την κλειστότητα του το συνολο $\bar{X} := \{x \in M \mid \text{υπάρχει } \{\mathsf{x}_n\} \subset X \text{ τέτοια ώστε } \mathsf{x}_n \to x\}$ δηλαδη το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του (δηλαδη των οριακών του σημείων).*

Είναι προφανές ότι ένα σύνολο $X \subset M$ είναι κλειστό στο M αν και μόνο αν $X = \bar{X}$. Επίσης, το αν ένα σύνολο $X \subset M$ είναι κλειστό ή όχι εξαρτάται φυσικά απο την επιλογή των X και (M, d).

Πρόταση 7.4.8. *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $\mathsf{x} \in M$. Τα υποσύνολα $M, \emptyset, \{\mathsf{x}\}$ είναι κλειστά στον M.*

Απόδειξη: Προκύπτει κατευθείαν απο τον ορισμό. Αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Παράδειγμα 7.4.9. *Αν $M = \mathbb{R}$ και $X = (0,1) \subset M$, το X δεν είναι κλειστό στον M. Αν όμως $M = (0,1)$ τότε το $X = (0,1)$ είναι κλειστό στον M. Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ξεκάθαρα ότι η έννοια του κλειστού είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το πως ενα σύνολο X τοποθετείται μέσα σε ένα μεγαλύτερο σύνολο M.*

Επίσης η ιδιότητα της κλειστότητας διατηρείται κάτω απο την πράξη των πεπερασμένων ενώσεων ή τομών.

Πρόταση 7.4.10. *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $X_i \subset M$, $i = 1, \cdots, m$, υποσύνολα του M τα οποία είναι κλειστά στον M. Ισχύει ότι*

1. *$\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ είναι κλειστό στο M.*
2. *$\bigcap_{i=1}^{m} X_i$ είναι κλειστό στο M.*

Απόδειξη: Θα δειξουμε μόνο το 1 αφήνοντας το 2 σαν άσκηση. Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση όπου $m = 2$. Ας θεωρήσουμε $\mathsf{x} \in M$, ένα οποιοδήποτε οριακό σημείο του $X_1 \cup X_2$. Για να δειξουμε την κλειστότητα του $X_1 \cup X_2$ θα πρέπει να δείξουμε ότι $\mathsf{x} \in X_1 \cup X_2$.

Επειδή x οριακό σημείο του $X_1 \cup X_2$ θα εχουμε ότι υπάρχει μία ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ τέτοια ώστε $\mathsf{x}_n \in X_1 \cup X_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$. Επειδή $\mathsf{x}_n \in X_1 \cup X_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, θα πρέπει είτε $\mathsf{x}_n \in X_1$ για άπειρα το πλήθος n είτε $\mathsf{x}_n \in X_2$ για άπειρα το πλήθος n. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $\mathsf{x}_n \in X_1$ για άπειρα το πλήθος n, δηλαδή μπορεί να πάρουμε μία υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ τέτοια ώστε $x_{n_k} \in X_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Η υποακολουθία αυτή θα συγκλίνει στο x (εφόσον η ακολουθία $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ το ίδιο θα ισχύει και για κάθε υποακολουθία). Όμως το X_1 είναι κλειστό, συνεπώς αφού $\mathsf{x}_{n_k} \in X_1$ και $\mathsf{x}_{n_k} \to \mathsf{x}$ θα πρέπει να ισχύει $\mathsf{x} \in X_1$. Τότε όμως και $\mathsf{x} \in X_1 \cup X_2$. 'ρα $X_1 \cup X_2$ κλειστό. Με επαγωγή μπορούμε πλέον να δείξουμε την γενική περίπτωση. ∎

Το αποτέλεσμα της πρότασης 7.4.10(1) δεν μπορεί να γενικευθεί για $m = \infty$ όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.4.11. *Παρατηρείστε ότι μπορούμε να γράψουμε*

$$(0,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right]$$

Παρότι τα $X_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right]$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ η άπειρη ένωση τους είναι $(0,1)$ το οποίο δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Αντίθετα, όσον αφορά τις τομές μπορούμε να πάρουμε $m = \infty$.

Πρόταση 7.4.12. *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $\{X_i\}$, μία αριθμήσιμη συλλογή κλειστών υποσυνόλων του M. Τότε, το σύνολο $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ είναι κλειστό στο M.*

Απόδειξη: Έστω x ένα οποιοδήποτε οριακό σημείο του $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Θα δειξουμε ότι $\mathsf{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Εφόσον $\mathsf{x} \in M$ οριακό σημείο του $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, θα υπάρχει ακολουθία $\mathsf{x}_n \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, τέτοια ώστε $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$. Επειδή $\mathsf{x}_n \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, θα έχουμε ότι $\mathsf{x}_n \in X_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$ και κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ (δηλαδή $\{\mathsf{x}_n\} \subset X_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$). Τα X_i είναι κλειστά για κάθε i, συνεπώς επειδή $\mathsf{x}_n \in X_i$ για κάθε i και επειδή $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ λόγω της κλειστότητας των X_i θα έχουμε ότι $\mathsf{x} \in X_i$ για κάθε i. Συνεπώς, θα ισχύει και ότι $\mathsf{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ άρα $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ κλειστό. ∎

7.4.2 Ανοιχτά σύνολα

Για την έννοια του ανοιχτού συνόλου θα χρειαστεί να ορίσουμε πρώτα την έννοια της ανοιχτής μπάλας σε κάποιον μετρικό χώρο.

Ορισμός 7.4.13 (Ανοιχτή μπάλα). *Έστω (M, d) κάποιος μετρικός χώρος και $\mathsf{x} \in M$. Το υποσύνολο του M*

$$B_\epsilon(\mathsf{x}) = \{\mathsf{y} \in M \mid d(\mathsf{y}, \mathsf{x}) < \epsilon\},$$

ονομάζεται **ανοιχτή μπάλα** *του M με κέντρο x και ακτίνα ϵ.*

Παράδειγμα 7.4.14. *Αν* $M = \mathbb{R}$ *με την μετρική που δίνεται απο την απόλυτη τιμή, τότε* $B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$.

Παράδειγμα 7.4.15. *Αν* $M = \mathbb{R}^2$ *με την Ευκλείδια μετρική τότε* $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$ *και*

$$B_\epsilon(\mathsf{x}) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2} < \epsilon\}$$

δηλαδή τα σημεία ενός δίσκου με κέντρο το σημείο $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$ *και ακτίνα* ϵ*. Στον δίσκο* **δεν** *συμπεριλαμβάνονται τα σημεία του κύκλου* $S = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2} = \epsilon\}$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό του ανοιχτού συνόλου.

Ορισμός 7.4.16. *Έστω* (M, d) *ένας μετρικός χώρος και* $X \subset M$*. Θα λέμε ότι το* X *είναι ανοιχτό στο* M *αν για κάθε* $\mathsf{x} \in X$ *υπάρχει μία ανοιχτή μπάλα* $B_\epsilon(\mathsf{x})$ *τέτοια ώστε* $B_\epsilon(\mathsf{x}) \subset X$.

Με άλλα λόγια μπορεί κανείς να πει ότι ένα υποσύνολο X ενός μετρικού χώρου M είναι ανοιχτό στο M αν για κάθε σημείο x του X μπορεί κανείς να βρει μία ανοιχτή μπάλα (ακτίνας της επιλογής μας αλλά αυστηρά μεγαλύτερης του 0) με κέντρο το x η οποία να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο X.

Παράδειγμα 7.4.17. *Έστω* $M = \mathbb{R}$ *και* $X = (a, b)$*. Το* X *είναι ανοιχτό στο* $\mathbb{R}$*. Πράγματι για κάθε* $x \in (a, b)$ *μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ανοιχτή μπάλα με κέντρο το* x *και ακτίνα* $\epsilon = min(b-x, x-a)$ *η οποία περιέχεται εξ ολοκλήρου στο* X.

Το αν είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου ανοιχτό ή όχι εξαρτάται τόσο απο την επιλογή του υποσυνόλου όσο και απο την επιλογή του μεγαλύτερου συνόλου ως μέρος του οποίου βλέπουμε το υποσύνολο.

Πρόταση 7.4.18. *Έστω* M *ένας μετρικός χώρος και* $\mathsf{x} \in M$*. Τα υποσύνολα* $M, \emptyset$ *είναι ανοιχτά στον* M*. Το υποσύνολο* $\{\mathsf{x}\}$ **δεν** *είναι ανοιχτό στον* M.

Αποδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Η ιδιότητα του να είναι κάποιο υποσύνολο ανοιχτό διατηρείται κάτω απο τις πράξεις των πεπερασμένων τομών και ενώσεων.

Πρόταση 7.4.19. *Έστω* M *ένας μετρικός χώρος και* $X_i \subset M$*,* $i = 1, \cdots, m$*, υποσύνολα του* M *τα οποία είναι ανοιχτά στον* M*. Ισχύει ότι*

1. $\bigcup_{i=1}^m X_i$ *είναι ανοιχτό στο* M
2. $\bigcap_{i=1}^m X_i$ *είναι ανοιχτό στο* M

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Το αποτέλεσμα της πρότασης 7.4.19(2) δεν μπορεί να γενικευθεί για $m = \infty$ όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.4.20. *Παρατηρείστε ότι μπορούμε να γράψουμε*

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

Παρότι τα $X_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ *είναι ανοιχτά υποσύνολα του* $\mathbb{R}$ *η άπειρη τομή τους είναι το* $\{0\}$*, το οποίο δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.

Αντίθετα, όσον αφορά τις ενώσεις μπορούμε να πάρουμε $m = \infty$.

Πρόταση 7.4.21. *Έστω* M *ένας μετρικός χώρος και* $\{X_i\}$*, μία αριθμήσιμη συλλογή ανοιχτών υποσυνόλων του* M*. Τότε,* $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ *είναι ανοιχτό στο* M.

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

7.4.3 Σχέση ανοιχτών και κλειστών συνόλων

Θέλει πολύ προσοχή να κατανοήσουμε ότι η άρνηση της πρότασης [το σύνολο X είναι κλειστό] **δεν** είναι η προταση [το σύνολο X είναι ανοιχτό] και το αντίστροφο! Μάλιστα υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά!

Παράδειγμα 7.4.22. *Έστω $M = \mathbb{R}$. Το σύνολο $X = (a, b]$ δεν είναι* **ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό** *στο $\mathbb{R}$.*

Υπάρχει όμως ένας τρόπος να συνδέσουμε την ιδιοτητα του κλειστου με την ιδιότητα του ανοιχτού.

Πρόταση 7.4.23. *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και $X \subset M$. Το X είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το $X^c = M \setminus X$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη: (i) Έστω X ανοιχτό υποσύνολο του M. Θα δείξουμε ότι X^c είναι κλειστό, δηλαδη ότι αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε οριακό σημείο x του X^c, θα ισχύει ότι $\mathsf{x} \in X^c$. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι $\mathsf{x} \notin X^c$. Εφόσον $\mathsf{x} \notin X^c$ αναγκαστικά $\mathsf{x} \in X$, και επειδή το X είναι ανοιχτό θα υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε η ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(\mathsf{x}) \subset X$. Επειδή όμως το x είναι οριακό σημειο του X^c θα υπάρχει (βλ. Ορισμό 7.4.1) μία ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ με $\mathsf{x}_n \in X^c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, τέτοια ώστε $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$. Αυτό σημαινει (βλ. Ορισμό 7.3.1) ότι θα υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $d(\mathsf{x}_N, \mathsf{x}) < \epsilon$, δηλαδή $\mathsf{x}_N \in B_\epsilon(\mathsf{x}) \subset X$. Συνεπώς το x_N είναι κοινό σημείο του X^c και του X δηλαδή $\mathsf{x}_N \in X \cap X^c$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $X \cap X^{'} = \emptyset$. Συνεπώς θα πρέπει $\mathsf{x} \in X^c$ άρα X^c κλειστό.
(ii) Θα δείξουμε τώρα το ανττίστροφο δηλαδη αν X^c κλειστό τότε το X είναι ανοιχτό. Ας υποθέσουμε ότι το αντίθετο δηλαδή ότι το X δεν είναι ανοιχτό. Αυτό σημαίνει (απο την άρνηση του Ορισμού 7.4.16) ότι υπάρχει κάποιο $\mathsf{x} \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $B_\epsilon(\mathsf{x}) \not\subset X$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι η μπαλα αυτή θα έχει κοινά σημεία με το X^c δηλαδή $B_\epsilon(\mathsf{x}) \cap X^c \neq \emptyset$. Δείξαμε λοιπόν οτι υπάρχει κάποιο $\mathsf{x} = \mathsf{x}_\epsilon$ τέτοιο ωστε κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $B_\epsilon(\mathsf{x}_\epsilon) \cap X^c \neq \emptyset$. Ας πάρουμε τα ϵ της μορφής $\epsilon = \epsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Η παραπάνω πρόταση λοιπόν μπορεί να γραφεί με την μορφή: Για κάθε n υπάρχει ένα στοιχείο x_n στο $B_{\frac{1}{n}}(\mathsf{x}) \cap X^c$. Τα x_n που ορίσαμε με τον τρόπο αυτό ορίζουν μία ακολουθία στον X^c για την οποία μπορουμε να δούμε ότι ισχύει $d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) < \frac{1}{n}$, συνεπώς $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$. Αυτό όμως μας λέει ότι το x είναι οριακό σημείο του X^c και επειδή το X^c είναι κλειστό θα έχουμε ότι $\mathsf{x} \in X^c$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $\mathsf{x} \in X$ και $\mathsf{x} \in X^c$ το οποίο είναι άτοπο. 'ρα, X ανοιχτό. □

Παράδειγμα 7.4.24. *Κάνοντας χρήση της Πρότασης 7.4.23 μπορούμε να δείξουμε πολύ εύκολα τις Προτάσεις 7.4.19 και 7.4.21 χρησιμοποιώντας τους νόμους του De Morgan βάσει των οποίων $(\bigcup_i X_i)^c = \bigcap_i X_i^c$, $(\bigcap_i X_i)^c = \bigcup_i X_i^c$ και των αντιστοίχων αποτελεσμάτων για τα κλειστά σύνολα. Όμοια, μπορούμε να δείξουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τα κλειστά σύνολα αν έχουμε αυτά τα αποτελέσματα για τα ανοιχτά. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση.*

7.5 Συμπάγεια

Η έννοια της συμπάγειας είναι μία πολύ χρήσιμη έννοια που εισήχθει στην ανάλυση στις αρχές του 20ου αιώνα απο τον Γάλλο μαθηματικό M. Fréchet. Η συμπάγεια είναι μία ιδιότητα ενός μετρικού χώρου που μας εξασφαλίζει καλές ιδιότητες σχετικά με την σύγκλιση ακολουθιών στον χώρο αυτό. Μία απο τις πιο βασικές απο αυτές, είναι ότι σε ένα συμπαγή χώρο μία ακολουθία έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν η γενίκευση του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass σε πιο γενικούς χώρους.

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της συμπάγειας με ένα πιο γενικό τοπολογικό ορισμό, ο οποίος μπορεί να γενικευθεί ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν έχουμε μετρικούς χώρους. Στην συνέχεια θα δώσουμε την σχέση της συμπάγειας με την σύγκλιση.

7.5.1 Ορισμοί και παραδείγματα.

Ο τοπολογικός ορισμός της συμπάγειας χρησιμοποιεί την έννοια του ανοιχτού συνόλου.

Ορισμός 7.5.1 (Κάλυμμα-Υποκάλυμμα). *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $X \subseteq M$. Ένα* **ανοιχτο κάλυμμα** *του X είναι μία συλλογή $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots\}$ απο ανοιχτά υποσύνολα U_i του X τέτοια ώστε $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U$. Ένα υποσύνολο $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U^*$, $U^* \in \mathcal{U}^*$ ονομάζεται* **υποκάλυμμα** *του $\mathcal{U}$.*

Παράδειγμα 7.5.2. *Η συλλογή $\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1\right) \mid n \geq 2 \right\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του διαστήματος $X = (0, 1)$, ενώ η συλλογη $\mathcal{U}^* = \left\{ \left(\frac{1}{2n}, 1\right) \mid n \geq 1 \right\}$ είναι ένα υποκάλυμμα του $\mathcal{U}$.*

Παράδειγμα 7.5.3. *Η συλλογή $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του $X = \mathbb{R}$, ενώ η συλλογή $\mathcal{U}^* = \{(-2n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα υποκάλυμμα της $\mathcal{U}$.*

Ορισμός 7.5.4 (Συμπάγεια-Τοπολογικός ορισμός). *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $X \subseteq M$. Το X ονομάζεται* **συμπαγές** *αν* <u>*κάθε*</u> *ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα*[1].

Ας ξεκινήσουμε με ορισμένα παραδείγματα σχετικά με το τι **δεν** είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 7.5.5. *Το διάστημα $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$,* **δεν** *είναι συμπαγές.*

Πράγματι ας πάρουμε το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του Παραδείγματος 7.5.2. Είναι αδύνατο να βρούμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα αυτού. Πράγματι έστω $U_n = (\frac{1}{n}, 1)$ και ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{U}' = \{U_2, \cdots, U_N\}$ για N πεπερασμένο ειναι μία οποιαδήποτε υποσυλλογή του $\mathcal{U}$. Όμως, $\cup_{i=2}^{N} U_i = (\frac{1}{N}, 1) \subset (0,1)$ για κάθε πεπερασμένο N. Συνεπώς είναι αδύνατο να καλύψουμε το $(0,1)$ με μία πεπερασμένη υποσυλλογή της $\mathcal{U}$ άρα το $(0,1)$ δεν είναι συμπαγές (γιατι αν ήταν με βάση τον Ορισμό 7.5.4, θα μπορούσαμε για κάθε ανοιχτό κάλυμμα άρα και για το $\mathcal{U}$ να βρούμε υποκάλυμμα). Φυσικά, είναι δύνατο να το καλύψουμε με μία άπειρη υποσυλλογή όπως π.χ. η $\mathcal{U}^*$ του Παραδείγματος 7.5.2, αλλά ο Ορισμός 7.5.4, αναφέρει ρητά οτι χρειαζόμαστε πεπερασμένα το πλήθος!

Παράδειγμα 7.5.6. *Το $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές. Η απόδειξη μπόρει να γίνει χρησιμοποιώντας το ανοιχτό κάλυμμα του Παραδείγματος 7.5.3 και δείχνοντας ότι δεν μπορεί να έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Ας δούμε τώρα τι απο τα γνωστά σύνολα που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι συμπαγή.

Θεώρημα 7.5.7. *(Heine-Borel) Τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ είναι συμπαγή, δηλαδή το $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ένα οποιοδήποτε ανοιχτό κάλυμμα του $X = [a,b]$ με $U_i = I_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}^+$. Εφόσον το $\mathcal{U}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα θα έχουμε οτι $X = [a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $X = [a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(a_i, b_i)$, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 7.5.4 το Q είναι συμπαγές.

Ας ονομάσουμε $Y = \{x \in (a,b] \mid [a,x] \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i,\ \ I_i \in \mathcal{U}\}$. Το σύνολο αυτό είναι ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ οπότε απο το βασικό Αξίωμα 1.8.11 έχει ελάχιστο άνω φράγμα έστω $x^* = \sup(Y)$. Εφόσον το $a \in Y$ θα ισχύει $a \leq x^*$. Το x^* θα πρέπει να ανήκει σε κάποιο απο τα διαστήματα της συλλογής $\mathcal{U}$ έστω το $I_{n^*} = (a_{n^*}, b_{n^*})$, για κάποιο $n^* \in \mathbb{N}^+$. Το αριστερό άκρο αυτού του διαστηματος $a_{n^*} < x^*$ οπότε το a_{n^*} **δεν** είναι άνω φράγμα του Y οπότε υπάρχει $x > a$, $x \in Y$ τέτοιο ώστε $a_{n^*} < x \leq x^*$. Εφοσον $x \in Y$, απο τον ορισμό του συνόλου Y θα υπάρχει $N^* \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ωστε $[a,x] \subset \bigcup_{i=1}^{N^*} I_i$. Επειδή το x έχει την ιδιότητα $a_{n^*} < x \leq x^*$ και το διάστημα $I_{n^*} = (a_{n^*}, b_{n^*})$ είναι τέτοιο ώστε $x^* \in (a_{n^*}, b_{n^*})$ (δηλαδή $a_{n^*} < x^* < b_{n^*}$) παρατηρούμε οτι το διάστημα $[a, x^*] \subset \left(\bigcup_{i=1}^{N^*} I_i\right) \cup I_{n^*}$ δηλαδη το διάστημα $[a,x^*]$ μπορεί να καλυφθεί απο πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα της συλλογής $\mathcal{U}$, και συγκεκριμένα $N^* + 1$ απο αυτά. Όμως, απο τον ορισμό του συνόλου Y έχουμε ότι $x^* \in Y$. Απομένει να δείξουμε οτι $x^* = b$. Ας υποθέσουμε οτι $x^* < b$. Εφόσον $x^* \in X$ θα υπάρχει $N' \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $[a, x^*] \subset \bigcup_{i=1}^{N'} I_i$. Το x^* θα πρέπει να περιέχεται τουλάχιστον σε ένα απο τα ανοιχτά αυτά διαστήματα έστω το $I_{n'} = (a_{n'}, b_{n'})$, $n' = 1, \cdots, N'$. Ας επιλέξουμε ένα x' στο διάστημα $I_{n'}$ τέτοιο ώστε $x^* < x' < b$ και $x^* < x' < b_{n'}$. Απο την επιλογή αυτή (κάνετε ένα σχήμα αν σας βοηθάει) είναι προφανές ότι $[a, x'] \subset \bigcup_{i=1}^{N'} I_i$, οπότε απο τον ορισμό του Y έχουμε ότι $x' \in Y$. Εφόσον $x' \in Y$ και $x^* = \sup(Y)$ θα πρέπει $x' \leq x^*$ όμως το x' έχει επιλεγεί έτσι ώστε $x^* < x'$. 'ρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο συνεπώς $x^* = b$. Στο Παράρτημα του κεφαλαίου παραθέτουμε και μια εναλλάκτικη απόδειξη του Θεωρηματος Heine-Borel. ■

Το θεώρημα Heine-Borel είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα. Θα δείξουμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί π.χ. για να δείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση απο ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$ είναι απαραίτητα φραγμένη.

Πρόταση 7.5.8. *Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε f φραγμένη.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in [a,b]$ η συνέχεια της f στο x μας εξασφαλίζει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ τέτοιο ώστε $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ για $|y - x| < \delta$. Επιλέγουμε $\epsilon = 1$ και ονομάζουμε $\delta^*(x) = \delta(1, x)$. Ας πάρουμε το ανοχτό διάστημα $I_x = (x - \delta^*(x), x + \delta^*(x))$ και ας πάρουμε την συλλογη ανοιχτών διαστημάτων $\mathcal{U} = \{I_x \mid x \in [a,b]\}$. Η συλλογή $\mathcal{U}$ είναι ενα κάλυμμα του $[a,b]$. Απο το Θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα για το $\mathcal{U}$, το $\mathcal{U}'$. Αυτό αποτελείται απο πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα της μορφής I_{x_i} για κάποια $i = 1, 2, \cdots, n$ όπου n κάποιος φυσικός αριθμός. 'ρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}^+$ και $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset [a,b]$ τέτοια ώστε $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}$. Ας πάρουμε $C = \max\{f(x_1), \cdots, f(x_n)\} + 1$. Ισχύει $f(x) < C$ για κάθε $x \in [a,b]$. Πραγματικά, ας πάρουμε οποιοδηποτε $x \in [a,b]$. Εφόσον το $\mathcal{U}'$ είναι κάλυμμα του $[a,b]$ θα υπάρχει κάποιο ανοιχτό διάστημα απο την συλλογη $\mathcal{U}'$ έστω το $I_{x_{n^*}}$, $n^* \in \{1, 2, \cdots, n\}$ για το οποίο θα ισχύει $x \in I_{x_{n^*}}$. Αυτό σημαίνει ότι $|x - x_{n^*}| < \delta^*(x_{n^*})$ οπότε απο τον ορισμό του $\delta^*(x_{n^*})$ θα ισχύει ότι $|f(x) - f(x_{n^*})| < 1$ δηλαδη $f(x) < f(x_{n^*}) + 1 \leq C$. Όμοια εργαζομαστε και για να βρούμε κάτω φράγμα. ■

[1] Δηλαδή απο **κάθε** ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά σύνολα τα οποία να μπορούν να καλύψουν το X.

7.5.2 Συμπάγεια και σύγκλιση

Θεώρημα 7.5.9. *Έστω M μετρικός χώρος. Το $X \subseteq M$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη: Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα. ■

Πρόταση 7.5.10. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^m$. Το X είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Η απόδειξη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.5.9 και αφήνεται σαν άσκηση. ■

Η παραπάνω ισοδυναμία δεν ισχύει γενικά, δηλαδή σε σύνολα που δεν είναι το $\mathbb{R}^m$. Για παράδειγμα μπορούμε να βρούμε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα ενός χώρου απείρων διαστάσεων, π.χ. του ℓ^1 τα οποία να μην είναι συμπαγή.

Παράδειγμα 7.5.11. *Ας πάρουμε $M = \ell^1$ και $X = \{x \in \ell^1 \mid d(x, 0) = 1\}$ όπου με 0 συμβολίζουμε την μηδενική ακολουθία $0 = (0, 0, \cdots)$. Το σύνολο X είναι κλειστό και φραγμένο. Το οτι είναι κλειστό μπορεί να αποδειχθεί απο τον ορισμό της κλειστότητας και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις ιδιότητες της συνάρτησης $f(x) := d(x, 0)$ η οποία είναι μία συνάρτηση $\ell^1 \to \mathbb{R}$. Το X όμως δεν είναι συμπαγές. Αν συνέβαινε αυτό θα έπρεπε κάθε ακολουθία στο X να έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την ακολουθία $\delta_n = (\delta_{1,n}, \delta_{2,n}, \cdots)$. Προφανώς $\delta_n \in X$. Όμως η ακολουθία αυτή δεν μπορεί να έχει καμία συγκλίνουσα υποακολουθία. Έστω ότι είχε, και το όριο της ήταν το $a \in \ell^1$. Απο την Πρόταση 7.3.7 θα πρέπει $\delta_{i,n} \to a_i$ στον $\mathbb{R}$ για κάθε i. Ο μόνος υποψήφιος όμως για το a_i είναι $a_i = 0$ για κάθε i. Αν λοιπόν η δ_n είχε συγκλίνουσα υποακολουθία, θα έπρεπε το όριο να ήταν το $a = (0, 0, \cdots)$. Όμως ξέρουμε (βλ. π.χ. το Παράδειγμα 7.3.6) ότι αυτο δεν συμβαίνει. 'ρα, υπάρχει ακολουθία στον X που δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, άρα ο X δεν είναι συμπαγής.*

Παραμένει όμως σε ισχύ το πρώτο μισό της πρότασης 7.5.10.

Πρόταση 7.5.12. *Έστω $X \subset M$ συμπαγές. Τότε το M είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή υπάρχει C τέτοιο ώστε $d(x, y) < C$ για κάθε $x, y \in X$.*

Απόδειξη: Για να δείξετε ότι είναι κλειστό αρκεί να πάρετε ένα οποιοδήποτε οριακό σημείο $x \in X$ και να δείξετε ότι $x \in X$. Θυμηθειτε τον ορισμό του οριακού σημείου και συνδυάστε το με τον ακολουθιακό ορισμό της συμπάγειας του Θεωρήματος 7.5.9. Για το φραγμένο ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $x \in M$ και το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{B_n(x) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ του M το οποίο φυσικά είναι και κάλυμμα του X. Λόγω της συμπάγειας του X το κάλυμμα αυτό έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα απο N απο τις μπάλες αυτές άρα το σύνολο είναι φραγμένο. ■

Πρόταση 7.5.13. *Ένα κλειστό υποσύνολο X ενός συμπαγούς μετρικού χώρου M είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω X ένα κλειστό υποσύνολο του M. Θα δειξουμε ότι κάθε ακολουθία $x_n \in X$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία στο X. Πραγματικά, έστω μία οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$. Εφόσον $x_n \in X \subset M$, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία $\{xn\}$ σαν μία ακολουθία στον M, και επειδή ο M είναι συμπαγής η x_n θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $x_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in M$. Το x είναι οριακό σημείο του X, γιατί υπάρχει μία ακολουθία, η $\bar{x}_n = x_{n_k}$ τέτοια ώστε $\bar{x}_n \in X$ και $\bar{x}_n \to x$. Επειδή όμως το X είναι κλειστό, το οριακό σημείο του $x \in X$. Συνεπώς, η x_n έχει συγκλίνουσα υποακολουθία στο X, άρα το X είναι συμπαγές. ■

7.6 Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός 7.6.1. *Έστω $\{x_n\}$ μία ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο M. Η ακολουθία $\{x_n\}$ θα λέγεται Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο $d(x_k, x_n) < \epsilon$, για κάθε $n, k > N$.*

Αν μία ακολουθία ειναι συγκλίνουσα τότε είναι και Cauchy . Όταν το $M = \mathbb{R}$ ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή μία ακολουθία Cauchy είναι και συγκλίνουσα. Εν γένει ομως αυτό δεν είναι σωστό. Το αν το αντίστροφο ισχύει ή όχι εξαρτάται απο τις ιδιότητες του χώρου M.

Ορισμός 7.6.2 (Πλήρης μετρικός χώρος). *Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται* **πλήρης** *αν έχει την ιδιότητα,* **κάθε** *ακολουθία Cauchy να είναι συγκλίνουσα στον χώρο αυτό, δηλαδή για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset M$ η οποία είναι Cauchy να υπάρχει $x \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Παράδειγμα 7.6.3. *Ενώ το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, αν πάρουμε σαν $M = (a, b)$ το M δεν είναι πλήρης. Αυτό γιατί ναι μεν οι ακολουθίες Cauchy στο M θα συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$ αλλά επειδή το όριο αυτό δεν είναι απαραίτητα στο M, δεν θα συγκλίνουν στο M. Σαν παράδειγμα πάρτε την ακολουθία Cauchy $\mathsf{x}_n = a + \frac{1}{n}$ η οποία συγκλίνει στο $a \neq M$. Αν πάρουμε ως $M = [a, b]$ αυτός είναι πλήρης.*

Πρόταση 7.6.4. *Ο $\mathbb{R}^m$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη: Ας πάρουμε μία ακολουθία Cauchy x_n στον $\mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για $n, k > N$ να ισχύει $d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}_k) < \epsilon$. Από τον ορισμό της μετρικής στο χώρο αυτό έχουμε ότι

$$d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_{i,n} - x_{i,k})^2} > | x_{j,n} - x_{j,k} |, \; j = 1, \cdots, m$$

Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για $n, k > N$ να ισχύει $|x_{j,n} - x_{j,k}| < \epsilon$, $j = 1, \cdots, m$, οπότε οι ακολουθίες $x_{j,n}$ είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, \cdots, m$. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος οι $x_{j,n}$ θα συγκλίνουν στον $\mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, \cdots, m$, έστω σε κάποιο x_j. Απο την Πρόταση 7.3.5 αυτό μας εξασφαλίζει ότι $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον $\mathbb{R}^m$ όπου $\mathsf{x} = (x_1, \cdots, x_m)$. Συνεπώς ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε. ■

Μπορούμε όμως να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, με κάποια προσοχή στην αποδειξη, ειδικά εκεί που επικαλεστήκαμε την Πρόταση 7.3.5, και στους χώρους ℓ^p για $p \geq 1$. Θα αρκεστούμε στην περίπτωση όπου $p = 1$.

Πρόταση 7.6.5. *Ο χώρος ℓ^p, $p \geq 1$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Θα αρκεστούμε στην περίπτωση όπου $p = 1$. Όπως και στην περίπτωση της πρότασης 7.6.4 μπορούμε να δείξουμε ότι αν η ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ με $\mathsf{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots)$ είναι Cauchy στον ℓ^1 τότε και οι ακολουθίες $x_{j,n}$ είναι Cauchy στον $\mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots$. 'ρα έχουμε ότι $x_{j,n} \to x_j$ στον $\mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots$. Όμως, αυτό δεν είναι πλεόν επαρκές για να μας εξασφαλίσει ότι αν ορίσουμε $\mathsf{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ τότε $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον ℓ^1. Όπως γνωρίζουμε απο την συζήτηση στην ενότητα 7.3 εν γένει αυτό δεν είναι αληθές για οποιαδήποτε ακολουθία. Στην περίπτωση μας όμως, επειδή η ακολουθία x_n είναι Cauchy θα δειξουμε ότι αυτό είναι αληθινό. Υπάρχουν δύο προφανή προβλήματα (1) να δείξουμε ότι το $\mathsf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^1$ και (2) να δείξουμε ότι $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον ℓ^1.

Για το πρώτο παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}^+$, έχουμε απο την τριγωνική ανισότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n}| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{k,m} + x_{k,m}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{k,m}| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,m}|, \tag{7.1}$$

όπου m είναι οποιοδήποτε φυσικός αριθμός (το οποίο και έχουμε σταθεροποιήσει). Η $\{\mathsf{x}_n\}$ είναι Cauchy οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{k,m}| < \epsilon$ για $n, m > N$. Αν επιλέξουμε $m > N$ στην (7.1) παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n}| \leq \epsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,m}|$$

Το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι πεπερασμένο εφόσον $\mathsf{x}_n \in \ell^1$ για κάθε n, άρα και $\mathsf{x}_m \in \ell^1$. Συνεπώς, δείξαμε ότι υπάρχει κάποιο C τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n}| \leq C, \;\; \text{για κάθε } \; n > N. \tag{7.2}$$

Μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι η ανισότητα αυτή διατηρείται και στο όριο καθώς $n \to \infty$ όμως θα πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί στο πως θα περάσουμε στο όριο. Η ανισότητα (7.2) μας εξασφαλίζει ότι εφοσον για κάθε πεπερασμενο $r \in \mathbb{N}^+$ ισχύει ότι $\sum_{k=1}^{r} |x_{k,n}| < \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,n}|$ θα έχουμέ ότι

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{k,n}| < C, \;\; \text{για κάθε } \; r \in \mathbb{N}^+, \;\; n > N.$$

Κάνοντας αυτό είναι σαν να παίρνουμε την προσέγγιση του $\mathsf{x}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots) \in \ell^1$ με την ακολουθία $\bar{\mathsf{x}}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r$. Επειδή στον χώρο αυτό έχουμε καλές ιδιότητες ως προς την σύγκλιση έχουμε ότι αν πάρουμε το όριο $n \to \infty$ θα ισχύει

$$\sum_{k=1}^{r} |x_k| < C, \;\; r \in \mathbb{N}^+.$$

Δεν μένει τώρα παρά να πάρουμε το όριο $r \to \infty$ και να καταλήξουμε ότι $\mathsf{x} \in \ell^1$.

Θα δείξουμε τώρα την σύγκλιση $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον ℓ^1. Με παρόμοια επιχειρήματα όπως και παραπάνω μπορούμε να δειξουμε ότι για κάθε $r \in \mathbb{N}^+$ πεπερασμένο ισχύει

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{k,m} - x_{k,n}| < \epsilon$$

αρκεί $n, m > N$. Ας πάρουμε τώρα το όριο $m \to \infty$. Επειδή ουσιαστικά είναι σαν να εργαζόμαστε στον $\mathbb{R}^r$ έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{r} |x_k - x_{k,n}| < \epsilon$$

αρκεί $n > N$. Παίρνουμε ύστερα το όριο $r \to \infty$. Αυτό μας δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k,n}| < \epsilon$$

αρκεί $n > N$, το οποίο μας εξασφαλίζει την σύγκλιση $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον ℓ^1. ■

Ένας πλήρης μετρικός χώρος δεν είναι απαραίτητα και συμπαγής. Ένας συμπαγής μετρικός χώρος όμως ειναι απαραίτητα πλήρης.

Παράδειγμα 7.6.6. *Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης αλλά όχι και συμπαγής. 'λλο παράδειγμα μπορεί να είναι ο χώρος ℓ^p, $p \geq 1$.*

7.7 Συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους

7.7.1 Ορισμοί

Ορισμός 7.7.1. *Έστω (M_1, d_1) και (M_2, d_2) δυο μετρικοί χώροι και $f : M_1 \to M_2$ μία συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathsf{x}_1 \in M_1$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_1) < \delta$ να ισχύει $d(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{x}_1)) < \epsilon$.*

Ο ορισμός της συνέχειας σχετίζεται με την έννοια του ορίου, τηρουμένων των αναλογιών, με τον ίδιο τρόπο που συμβαίνει αυτό για τις πραγματικές συναρτήσεις.

Πρόταση 7.7.2. *Μία συνάρτηση $f : M_1 \to M_2$ είναι συνεχής αν και μονο αν για κάθε ακολουθία $\mathsf{x}_n \in M_1$ για την $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον M_1, ισχύει ότι η ακολουθία $f(\mathsf{x}_n) \to f(\mathsf{x})$ στον M_2.*

Αποδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί τα ίδια βήματα με την αντίστοιχη απόδειξη για τις πραγματικές συναρτήσεις αρκεί να είμαστε προσεκτικοί να αντικαταστήσουμε καταλλήλως τις απόλυτες τιμές με τις μετρικές d_1 και d_2. Αφήνεται στον αναγνώστη. ■

Παράδειγμα 7.7.3. *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $\mathsf{x}_0 \in M$. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $f(\mathsf{x}) = d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_0)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής.*

Αυτο μπορούμε να το δούμε εύκολα με την χρήση της τριγωνικής ανισότητας. Θα πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο x_1 στο M και θα δείξουμε οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_1) < \delta$ να ισχύει $| f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_1) | < \epsilon$. Απο τον ορισμό της f έχουμε ότι

$$f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_1) = d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_0) - d(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_0) \leq d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_1)$$

λόγω της τριγωνικής ανισότητας. Επίσης,

$$f(\mathsf{x}_1) - f(\mathsf{x}) = d(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_0) - d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_0) \leq d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_1)$$

ξανα λόγω της τριγωνικής ανισότητας. Συνεπώς, $| f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_1) | \leq d(\mathsf{x}, \mathsf{x}_1) < \delta$. Αν επιλέξουμε $\delta = \epsilon$ έχει αποδειχθεί το ζητούμενο.

7.7.2 Συνεχείς συναρτήσεις και ανοιχτά και κλειστά σύνολα

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν χρήσιμες ιδιότητες ως προς τα κλειστά και τα ανοίχτά σύνολα.

Πρόταση 7.7.4. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδυναμες:*

1. *Η $f : M_1 \to M_2$ είναι μία συνεχής συνάρτηση.*
2. *Η f^{-1} απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του M_2 σε κλειστά υποσύνολα του M_1.*
3. *Η f^{-1} απεικονίζει ανοιχτά υποσύνολα του M_2 σε ανοιχτά υποσύνολα του M_1.*

Αποδειξη: $1 \to 2$. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής. Αν το $Y \subset M_2$ ειναι κλειστό θα δείξουμε οτι $X := f^{-1}(Y) \subset M_1$ είναι κλειστό. Αρκεί να δείξουμε οτι το $f^{-1}(Y)$ περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Έστω $\mathsf{x} \in M_1$ ένα οριακό σημείο του $f^{-1}(Y)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset f^{-1}(Y)$ τέτοια ώστε $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$. Απο την συνέχεια της f θα έχουμε τότε ότι $f(\mathsf{x}_n) \to f(x)$. Επειδή $\mathsf{x}_n \in X = f^{-1}(Y)$ για κάθε n, θα έχουμε οτι $f(\mathsf{x}_n) \in Y$ για κάθε n. 'ρα, η ακολουθία $\{f(\mathsf{x}_n)\} \subset Y$ και $f(\mathsf{x}_n) \to f(x)$. Αυτό μας λέει ότι το $f(x)$ είναι οριακό σημείο του Y. Αλλά το Y είναι κλειστό οπότε $f(\mathsf{x}) \in Y$ και αυτό μας εξασφαλίζει ότι $\mathsf{x} \in f^{-1}(Y)$.
$2 \to 3$. Έστω $Y \subset M_2$ ανοιχτό. Το Y^c θα είναι κλειστό. Απο την υπόθεση $f^{-1}(Y^c)$ κλειστό. Όμως $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$! 'ρα $(f^{-1}(Y))^c$ κλειστό, συνεπώς $f^{-1}(Y)$ ανοιχτό.
$3 \to 1$. Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} απεικονίζει ανοιχτά υποσύνολα του M_2 σε ανοιχτά υποσύνολοα του M_1. Θα δείξουμε ότι είναι συνεχής. Έστω $\epsilon > 0$ και κάποιο $\mathsf{x}_0 \in M_1$ και ορίζουμε $\mathsf{y}_0 = f(\mathsf{x}_0)$. Παίρνουμε την ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(\mathsf{y}_0) = B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0))$ που είναι ενα ανοιχτό σύνολο του M_2 οπότε και η εικόνα του $f^{-1}(B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0)))$ θα είναι ανοιχτό σύνολο του M_1. Το $\mathsf{x}_0 \in f^{-1}(B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0)))$ και το $f^{-1}(B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0)))$ είναι ανοιχτό σύνολο, οπότε με κέντρο κάθε σημείο του, άρα και στο x_0 μπορούμε να βρούμε μια ανοιχτή μπάλα η οποία να περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε αυτό. 'ρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathsf{x}_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0)))$. Αν $d_1(\mathsf{x}, \mathsf{x}_0) < \delta$, τότε $\mathsf{x} \in B_\delta(\mathsf{x}_0)$ άρα και $\mathsf{x} \in f^{-1}(B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0)))$. Αυτό όμως μας εξασφαλίζει οτι $f(x) \in B_\epsilon(f(\mathsf{x}_0))$ δηλαδή $d_2(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{x}_0)) < \epsilon$. Η f είναι συνεχής. ■

7.7.3 Συνεχείς συναρτήσεις και συμπάγεια

Πρόταση 7.7.5. *Έστω $f : M_1 \to M_2$ συνεχής συνάρτηση απο τον συμπαγή μετρικό χώρο M_1 στον μετρικό χώρο M_2. Τότε η $f(M_1)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του M_2.*

Απόδειξη: Για δείξουμε την συμπάγεια του $f(M_1)$ θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $\mathsf{y}_n \in f(M_1)$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Εστω $\mathsf{y}_n \in f(M_1)$ μία οποιαδήποτε τέτοια ακολουθία. Το ότι $\mathsf{y}_n \in f(M_1)$ σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία $\mathsf{x}_n \in M_1$ τέτοια ώστε $\mathsf{y}_n = f(\mathsf{x}_n)$. Επειδή ο M_1 είναι συμπαγής, η ακολουθία x_n έχει συγκλίνουσα υποακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $\mathsf{x} \in M_1$, έστω $\mathsf{x}_{n_k} \to \mathsf{x}$. Επειδή η f είναι συνεχής $f(\mathsf{x}_{n_k}) \to f(\mathsf{x})$. Αυτό όμως σημαίνει οτι μπορούμε να βρούμε μία υποακολουθία της y_n, την $\mathsf{y}_{n_k} = f(\mathsf{x}_{n_k})$ η οποία συγκλίνει στο όριο $f(\mathsf{x})$. 'ρα το $f(M_1)$ είναι συμπαγές. ■

Πρόταση 7.7.6. *Έστω $f : M_1 \to M_2$ συνεχής συνάρτηση απο τον συμπαγή μετρικό χώρο M_1 στον μετρικό χώρο M_2. Τότε η f^{-1} είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Για να είναι η f^{-1} συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι η $((f^{-1}))^{-1} = f$ απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του M_1 σε κλειστά υποσύνολα του M_2. Ας πάρουμε ένα κλειστό υποσύνολο $C \subset M_1$. Ένα κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου είναι και αυτό συμπαγές (Προτασή 7.5.13). Συνεπώς απο την Προταση 7.7.5 το $f(C)$ είναι συμπαγές. Εφόσον όμως ειναι συμπαγές είναι και κλειστό. ■

Θα κλείσουμε με την γενίκευση του θεωρήματος του μεγίστου του Weierstrass για συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγείς μετρικούς χώρους.

Πρόταση 7.7.7. *Μια συνεχής συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο M επιτυγχάνει το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή έχει ελάχιστο και μέγιστο.*

Απόδειξη: Η απόδειξη μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Ξεκινάμε με το ελάχιστο. Παίρνουμε την ελαχιστοποιητική ακολουθία, δηλαδή μια ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset M$ με την ιδιότητα $f(\mathsf{x}_n) \to s := \inf_{\mathsf{x} \in M} f(\mathsf{x})$. Μπορούμε να δείξουμε οτι η μια τέτοια ακολουθία υπάρχει πάντοτε. Εφόσον το M είναι συμπαγές, η $\{\mathsf{x}_n\}$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ και έστω $\mathsf{x} \in M$ το όριο της. Η συνέχεια της f μας εξασφαλίζει ότι $f(\mathsf{x}) = s$ δηλαδή η συνάρτηση έχει ελάχιστο στο x. Όμοια και για το μέγιστο. ■

Σχόλιο 7.7.8. *Στην παραπάνω απόδειξη, η συμπάγεια του M μας υποκαθιστά την χρήση του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass το οποίο είχαμε χρησιμοποιήσει στην αντίστοιχη απόδειξη για συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (βλ. Θεώρημα 4.6.2). Η συνέχεα μπορεί να αντικατασταθεί και απο την ημισυνέχεια αν μας ενδιαφέρει να δείξουμε μόνο την ύπαρξη μεγίστου ή ελαχίστου, μπορούμε δηλαδή να γενικεύσουμε την Πρόταση 4.8.11) στην περίπτωση συναρτησεων $f : M \to \mathbb{R}$ όπου M συμπαγής.*

Ορισμός 7.7.9 (Ομοιόμορφη συνέχεια). *Μία συνάρτηση $f : M_1 \to M_2$ είναι* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο $X \subset M_1$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ωστε $d_2(f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_0)) < \epsilon$ για κάθε $\mathsf{x}, \mathsf{x}_0 \in X$ τέτοια ώστε $d_1(\mathsf{x}, \mathsf{x}_0) < \delta$.*

Πρόταση 7.7.10 (Heine). *Αν $f : X \to M_2$ συνεχής συνάρτηση και $X \subset M_1$ με X συμπάγες τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X.*

Απόδειξη: Δίνεται στο Παράρτημα. ∎

7.8 Παράρτημα

7.8.1 Μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος *Heine – Borel*

Θεώρημα 7.8.1. *(Heine-Borel) Τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ είναι συμπαγή, δηλαδή το $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω ότι δεν ισχύει. Μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{I_1, I_2, \cdots\}$ του $[a, b]$ τέτοιο ώστε κανένα υποσύνολο του με πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία να μην είναι κάλυμμα του $[a, b]$. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων $\{J_n\}$, $J_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}^+$ τέτοια ώστε να είναι φθίνουσα, $J_{n+1} \subset J_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, τα μήκη των διαστημάτων να ικανοποιούν την συνθήκη $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ και το J_n να μην μπορεί να καλυφθεί απο πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά διαστήματα απο το $\mathcal{U}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Η κατασκευή της ακολουθίας κλειστών διαστημάτων $\{J_n\}$ μπορεί να γίνει **επαγωγικά**:

Α. $J_1 = [a, b]$ (απο την υπόθεση δεν μπορεί να καλυφθεί απο πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά διαστήματα της συλλογής $\mathcal{U} = \{I_i\}$).

Β. Έστω οτι εχουμε φτάσει στο n-οστό βήμα και εχουμε βρει $J_1, J_2, \cdots, J_n$ με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Γ. Για την κατασκευή του $n + 1$ όρου μπορούμε να εργαστούμε ως εξής. Γράφουμε το διαστημα $J_n = [a_n, b_n]$ ως την ενωση δύο διαστημάτων

$$J_n = J_n' \cup J_n'' = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right].$$

Τουλάχιστον ένα απο τα διαστήματα J_n' ή J_n'' **δεν** μπορεί να καλυφθεί απο πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά διαστήματα I_i απο την αρχική συλλογή $\mathcal{U}$[2]. Θέτουμε J_{n+1} αυτό το διάστημα εκ των J_n' και J_n'' το οποίο δεν μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα της αρχικής συλλογής $\mathcal{U}$. Το J_{n+1} ικανοποιεί και τις άλλες ιδιότητες, δηλαδη $J_{n+1} \subset J_n$ και $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^n}$.

Δ. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο.

Επειδή $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ υπάρχει ένα μοναδικό $x^* \in \mathbb{R}$, το οποίο να ανήκει σε όλα τα J_n, δηλαδή $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$, και $x^* = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ (βλ. Λήμμα 7.8.2). Επειδή $x^* \in [a, b]$ και το $[a, b]$ καλύπτεται απο την συλλογή ανοιχτών διαστημάτων $\mathcal{U}$ θα υπάρχει κάποιο ανοιχτό διάστημα απο την συλλογή αυτή, έστω το $I_{n^*} = (\alpha_{n^*}, \beta_{n^*})$ τέτοιο ώστε $x^* \in (\alpha_{n^*}, \beta_{n^*})$. Εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n = x^*$ και $\alpha_{n^*} < x^*$ θα υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $a_n > \alpha_{n^*}$ για κάθε $n > N$. Επίσης, εφόσον $\lim_{n\to\infty} b_n = x^*$ και $x^* < \beta_{n^*}$ θα υπάρχει κάποιο $N' \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε $b_n < \beta_{n^*}$, για $n > N'$. Αν επιλέξουμε $n > \max(N, N')$ θα ικανοποιούνται και οι δύο ανισότητες ταυτοχρόνως οπότε $J_n = [a_n, b_n] \subset I_{n^*} = (\alpha_{n^*}, \beta_{n^*})$, και άρα τα J_n για $n > \max(N, N')$ καλύπτονται απο πεπερασμένα το πλήθος (ένα μονο!) μέλη απο την αρχικη συλλογή $\mathcal{U}$. Αυτό ομως είναι αντίθετο με την κατασκευή της ακολουθίας $\{J_n\}$ οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο. ∎.

[2] Αυτό πρέπει να είναι προφανές: Έστω πως και τα δυο μπορούσαν να καλυφθούν απο πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά διαστήματα απο την αρχική συλλογη, δηλαδή $\mathcal{U}'$ και $\mathcal{U}''$ πεπερασμένα υποσύνολα της $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε $\mathcal{U}'$ κάλυμμα του J_n' και $\mathcal{U}''$ κάλυμμα του J_n''. Τότε όμως $\mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$ είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο και κάλυμμα του $J_n' \cup J_n'' = J_n$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το αμέσως προηγούμενο βήμα στο οποίο υποθέσαμε οτι το J_n έχει την ιδιότητα να μην καλύπτεται απο πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά διαστήματα απο την συλλογή $\mathcal{U}$.

Λήμμα 7.8.2 (Κιβωτισμένα διαστήματα). *Ας υποθέσουμε ότι $\{J_n\}$ είναι μια ακολουθία κλειστών διαστηματων της μορφής $J_n = [a_n, b_n]$ με ιδιότητες*

1. $J_{n+1} \subset J_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^+$,
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό $x^* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ (δηλαδή το x^* είναι κοινό στοιχείο όλων των διαστημάτων J_n) και μάλιστα $x^* = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Απόδειξη: Η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αύξουσα και φραγμένη απο τα άνω άρα συγκλίνουσα. Ας ονομάσουμε x^* το όριο της. Η ακολουθία $\{b_n\}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη απο τα κάτω αρα συγκλίνουσα. Μπορούμε να γράψουμε $b_n = a_n + (b_n - a_n) \to x^* + 0 = x^*$. Συνεπώς οι δυο ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο. Λόγω της μονοτονίας των δύο ακολουθιών θα έχουμε απο τις ιδιότητες του ορίου ότι $a_n \le x^*$ και $x^* \le b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ άρα $x^* \in (a_n, b_n) = J_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, συνεπώς $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$.

Θα κλείσουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι υπάρχει ένα μοναδικό x για το οποίο ισχύει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$, το οποίο φυσικά τότε θα ταυτίζεται με το x^*. Έστω ότι υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ τέτοιο ώστε $x < x^*$. Εφόσον το $x^* = \sup_n a_n$ και $x < x^*$ το x δεν θα είναι άνω φράγμα της ακολουθίας $\{a_n\}$ οπότε θα υπάρχει κάποιο n' για το οποίο θα ισχύει $x \notin J_{n'}$ οπότε $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. Ομοίως δεν μπορεί να έχουμε και $x > x^*$. 'ρα $x = x^*$. ■

7.8.2 Ακολουθιακός ορισμός της συμπάγειας

Θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 7.8.3 (Ακολουθιακή συμπάγεια). *Ένα σύνολο X θα λέγεται* **ακολουθιακά συμπαγές** *αν έχει την ιδιότητα κάθε ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$ να έχει συγκλίνουσα υποακολουθία (με το όριο της στο σύνολο αυτό) δηλαδή για κάθε $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$ υπάρχει υποακολουθία $\{\mathsf{x}_{n_k}\}$ και $\mathsf{x} \in X$ τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} \mathsf{x}_{n_k} = \mathsf{x}$.*

Ορισμός 7.8.4 (Ολικά φραγμένο συνολο). *Ένα συνολο $X \subset M$ θα λέγεται* **ολικά φραγμένο** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ενα πεπερασμένο υποσύνολο του X, έστω το $Y = \{\mathsf{y}_1, \cdots, \mathsf{y}_N\} \subset X$ για το οποίο ισχύει $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(\mathsf{y}_i)$*

Θεώρημα 7.8.5. *Έστω M μετρικός χώρος. Αν το $X \subseteq M$ είναι συμπαγές τότε είναι και ακολουθιακά συμπαγές.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα οτι X είναι συμπαγές και ας πάρουμε μια ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$. Θα δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Έστω πως όχι. Αυτό σημαίνει πως για κάθε $\mathsf{x} \in M$ υπάρχει $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ έτσι ώστε αν πάρουμε την ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(\mathsf{x})$ μόνο πεπερασμένοι όροι της ακολουθίας $\{\mathsf{x}_n\}$ θα βρίσκονται μέσα στην $B_\epsilon(\mathsf{x}) = B_{\epsilon(x)}(\mathsf{x})$ [3]. Η συλλογή $\mathcal{U} = \{B_{\epsilon(\mathsf{x})}(\mathsf{x}) \mid \mathsf{x} \in X\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X [4]. Επειδή το X είναι συμπαγές απο τον Ορισμό 7.5.1 το κάλυμμα αυτό θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Αν αυτό όμως συνέβαινε τότε το σύνολο $\{n \in \mathbb{N}^+ \mid \mathsf{x}_n \in X\}$ θα ήταν πεπερασμένο το οποίο είναι ισοδύναμο με το να ισχυριστούμε ότι η ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ έχει πεπερασμένους το πλήθος όρους [5], που είναι προφανώς άτοπο. 'ρα, αν το X είναι συμπαγές, κάθε ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$ θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. ■

Θεώρημα 7.8.6. *Αν το $X \subset M$ είναι ακολουθιακά συμπαγές τότε είναι και συμπαγές.*

Απόδειξη: Για να διευκολύνουμε τα πράγματα θα εισάγουμε την ορολογία του ακολουθιακά συμπαγούς συνόλου. Ένα σύνολο X θα λέγεται ακολουθιακά συμπαγές αν έχει την ιδιότητα κάθε ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$ να έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Η απόδειξη γινεται σε 3 βήματα.

---

[3] Αν δεν ήταν αυτό αληθές, δηλαδή αν κάθε ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(\mathsf{x})$ περιείχε άπειρους όρους της $\{\mathsf{x}_n\}$, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μια συγκλίνουσα υποακολουθία $\{\mathsf{x}_{n_k}\}$ της $\{\mathsf{x}_n\}$ ως εξής: Ας πάρουμε $\epsilon_1 = 1$ και ας ονομάσουμε x_{n_1} τον πρώτο όρο της ακολουθίας με την ιδιότητα $\mathsf{x}_{n_1} \in B_{\epsilon_1}(\mathsf{x}) = B_1(\mathsf{x})$. Μετά ας πάρουμε $\epsilon_2 = 2$ και ας ονομάσουμε x_{n_2} τον πρώτο όρο της ακολουθίας με την ιδιότητα $\mathsf{x}_{n_2} \in B_{\epsilon_2}(\mathsf{x}) = B_{1/2}(\mathsf{x})$. Εφόσον η $B_{\epsilon_2}(\mathsf{x}) = B_{1/2}(\mathsf{x})$ περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της ακολουθίας, μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε $n_2 > n_1$. Συνεχίζουμε με τον τρόπο αυτό και στο k-οστό βήμα θέτουμε $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ και ονομάζουμε x_{n_k} τον πρώτο όρο της ακολουθίας με την ιδιότητα $\mathsf{x}_{n_k} \in B_{\epsilon_k}(\mathsf{x}) = B_{1/k}(\mathsf{x})$. Σε όλη την κατασκευή έχουμε προσέξει να ισχύει $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Συνεχιζοντας με τον τρόπο αυτό, έχουμε κατασκευάσει μια υποακολουθία της $\{\mathsf{x}_n\}$, την $\{\mathsf{x}_{n_k}\}$ η οποία είναι συγκλίνουσα.

[4] Το κάλυμμα αυτό κατασκευάζεται ως ακολούθως, παίρνουμε οποιοδήποτε στοιχείο $\mathsf{x} \in X$, γύρω απο αυτό βρίσκουμε μια ανοιχτή μπάλα ακτίνας $\epsilon(\mathsf{x})$, $B_{\epsilon(\mathsf{x})}(\mathsf{x})$ που να περιέχει πεπερασμένους το πλήθος όρους της ακολουθίας $\{\mathsf{x}_n\}$. Αυτό το κάνουμε για κάθε $x \in X$ και κατόπιν παίρνουμε την συλλογή όλων αυτών των μπαλών για όλα τα $\mathsf{x} \in X$. Είναι προφανές οτι $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\epsilon(\mathsf{x}_n)}(\mathsf{x}_n)$.

[5] Ας υποθέσουμε οτι το $\mathcal{U}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{U}'$. Το υποκάλυμμα αυτό θα περιέχει πεπερασμένες το πλήθος, έστω N, μπάλλες με κέντρο κάποια πεπερασμένα το πλήθος $x \in X$. Ας συμβολίσουμε με $\bar{\mathsf{x}}_i \in X$, $i = 1, \cdots, N$ τα κέντρα αυτών των μπαλών. Έχουμε οτι $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\epsilon(\bar{\mathsf{x}}_i)}(\bar{\mathsf{x}}_i)$ και κάθε μία απο την μπάλες που απαρτίζουν την συλλογή περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία της ακολουθίας $\{\mathsf{x}_n\}$, άρα το ίδιο ισχύει και για ολόκληρη την συλλογή. Για κάθε n, $\mathsf{x}_n \in X$ οπότε $x_n \in Y := \bigcup_{i=1}^{N} B_{\epsilon(\bar{\mathsf{x}}_i)}(\bar{\mathsf{x}}_i)$ και το σύνολο Y περιέχει πεπερασμένους το πλήθος όρους της $\{\mathsf{x}_n\}$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν η ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ απαρτίζεται απο πεπερασμένους το πλήθος όρους, πράγμα που βέβαια είναι αδύνατο.

Α. Ένα σύνολο το οποίο είναι ακολουθιακά συμπαγές είναι όπως λέμε και ολικά φραγμένο δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ενα πεπερασμένο υποσύνολο του X, έστω το $Y = \{\mathsf{y}_1, \cdots, \mathsf{y}_N\} \subset X$ για το οποίο ισχύει $X \subset \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(\mathsf{y}_i)$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού δίνεται σαν ένα χωριστό Λήμμα (βλ. Λήμμα 7.8.7).

Β. Για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathsf{x} \in X$ να υπάρχει κάποιο $U = U_{\mathsf{x}} \in \mathcal{U}$, δηλαδη ένα ανοιχτό σύνολο απο την αρχική μας συλλογή, τέτοιο ώστε $B_\epsilon(\mathsf{x}) \subset U$. Η απόδειξη και αυτού του ισχυρισμού δίνεται σαν ένα χωριστό Λήμμα (βλ. Λήμμα 7.8.8).

Γ. Έστω λοιπόν $\mathcal{U}$ ένα οποιοδήποτε ανοιχτό κάλυμμα του ακολουθιακά συμπαγούς συνόλου X. Απο το βήμα Α μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος $\mathsf{y}_i \in X$, $i = 1, \cdots, N$ τέτοια ώστε $X \subset \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(\mathsf{y}_i)$. Απο την άλλη, απο το βήμα Β κάθε μια απο τις μπάλες $B_\epsilon(\mathsf{y}_i)$, θα περιέχεται σε ένα ανοιχτό σύνολο απο την αρχική συλλογή. 'ρα η ένωση τους θα περιέχεται στην ενωση N ανοιχτών συνόλων απο την αρχική συλλογή $\mathcal{U}$. Αυτό όμως μας λέει ότι η $\mathcal{U}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

'ρα το X είναι συμπαγές. ∎

Λήμμα 7.8.7. *Έστω ότι $X \subset M$ ακολουθιακά συμπαγές. Τότε το X είναι και ολικά φραγμένο, δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ενα πεπερασμένο υποσύνολο του X, έστω το $Y = \{\mathsf{y}_1, \cdots, \mathsf{y}_N\} \subset X$ για το οποίο ισχύει $X \subset= \bigcup_{\mathsf{x} \in Y} B_\epsilon(\mathsf{x}) = \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(\mathsf{y}_i)$.*

Απόδειξη: Έστω οτι το X ειναι ακολουθιακά συμπαγές αλλά όχι ολικά φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $\epsilon > 0$ δεν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $Y \subset X$ τέτοιο ώστε $X \subset \bigcup_{\mathsf{x} \in Y} B_\epsilon(\mathsf{x})$. Τότε όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε την εξής ακολουθία: Παίρνουμε $\mathsf{x}_1 \in X$. Υπάρχει κάποιο $\mathsf{x}_2 \in X \setminus B_\epsilon(\mathsf{x}_1)$. Μετά βρισκουμε κάποιο $\mathsf{x}_3 \in X \setminus (B_\epsilon(\mathsf{x}_1) \cup B_\epsilon(\mathsf{x}_2))$. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο. Έχουμε φτιάξει μια ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\} \subset X$ για την οποία ισχύει $d(\mathsf{x}_n, \mathsf{x}_m) > \epsilon$ για κάθε $n \neq m$. Αυτή η ακολουθία αποκλείεται να έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο. ∎

Λήμμα 7.8.8. *Έστω ότι $X \subset M$ ακολουθιακά συμπαγές. Για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathsf{x} \in X$ να υπάρχει κάποιο $U = U_{\mathsf{x}} \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $B_\epsilon(\mathsf{x}) \subset U$*

Απόδειξη: Έστω πως αυτό δεν ίσχυε. Τότε και κάθε ϵ υπάρχει κάποιο $\mathsf{x}(\epsilon) \in X$ τέτοιο ώστε η $B_\epsilon(\mathsf{x})$ να μην καλύπτεται απο κανένα ανοιχτό σύνολο $U \in \mathcal{U}$. Παίρνουμε $\epsilon = \epsilon_n = \frac{1}{n}$ και κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ τέτοια ώστε $B_{\epsilon_n}(\mathsf{x}_n) = B_{1/n}(\mathsf{x}_n)$ να μην καλύπτεται απο κανένα ανοιχτό σύνολο $U \in \mathcal{U}$. Εφόσον ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής η ακολουθία $\{\mathsf{x}_n\}$ αυτή θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $\{\mathsf{x}_{n_k}\}$ και έστω $x \in X$ το όριο της. Εφόσον το $\mathcal{U}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X θα υπάρχει κάποιο $U \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $\mathsf{x} \in U$. Επειδή τό U είναι ανοιχτό θα για κάθε στοιχείο του, άρα και για το x θα υπάρχει μια ανοιχτη μπάλα με κέντρο το x που θα περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο U, δηλαδη θα υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B_\epsilon(\mathsf{x}) \subset U$. Επειδή όμως $\mathsf{x}_{n_k} \to x$, θα υπάρχει κάποιο $K \in \mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $k > K$ να έχουμε $B_{\epsilon/2}(\mathsf{x}_{n_k}) \subset U$ το οποίο είναι άτοπο. ∎

7.8.3 Συνέχεια και ομοιόμορφη συνέχεια σε συμπαγή σύνολα

Πρόταση 7.8.9 (Heine). *Αν $f : X \to M_2$ συνεχής συνάρτηση και $X \subset M_1$ με X συμπάγες τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X.*

Απόδειξη: Ας πάρουμε κάποιο $\epsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της f για κάθε $\mathsf{z} \in X$ υπάρχει $\delta = \delta(\mathsf{z}) > 0$ τέτοιο ώστε αν $d_1(\mathsf{x}, \mathsf{z}) < \delta(\mathsf{z})$, να ισχύει $d_2(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{z})) < \frac{\epsilon}{2}$. Η συλλογή $\mathcal{U} := \{B_{\delta(\mathsf{z})}(\mathsf{z}) \mid \mathsf{z} \in X\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X Απο το Λήμμα 7.8.7 το οποίο εφαρμόζουμε στο $\mathcal{U}$ έχουμε ότι για κάθε $\mathsf{x} \in X$ θα υπάρχει $\delta^* > 0$ τέτοιο ώστε να υπάρχει κάποιο U της συλλογής $\mathcal{U}$ με την ιδιότητα $B_{\delta^*}(\mathsf{x}) \subset U$. Απο τον τρόπο κατασκευής της $\mathcal{U}$ αυτό το U θα είναι της μορφής $U = B_{\delta(\mathsf{z}')}(\mathsf{z}')$ για κάποιο $\mathsf{z}' \in X$.

Αν υποθέσουμε $d_1(\mathsf{x}, \mathsf{y}) < \delta^*$ τότε $B_{\delta^*}(\mathsf{x}) \subset B_{\delta(\mathsf{z})}(\mathsf{z})$ για κάποιο $\mathsf{z} \in X$ και επειδή $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in B_{\delta^*}(\mathsf{x})$ θα έχουμε επίσης και ότι $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in B_{\delta(\mathsf{z})}(\mathsf{z})$, κατά συνέπεια $d_1(\mathsf{x}, \mathsf{z}) < \delta(\mathsf{z})$ και $d_1(\mathsf{y}, \mathsf{z}) < \delta(\mathsf{z})$. Λόγω της συνέχειας της f αυτό μας εξασφαλίζει και ότι $d_2(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{y})) < \frac{\epsilon}{2}$ και $d_2(f(\mathsf{y}), f(\mathsf{z})) < \frac{\epsilon}{2}$ και απο την τριγωνική ανισότητα

$$d_2(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{y})) \leq d_2(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{z})) + d_2(f(\mathsf{y}), f(\mathsf{z})) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

'ρα, δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta^*$ τέτοιο ώστε $d_2(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{y})) < \epsilon$ για κάθε $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$ με $d_1(\mathsf{x}, \mathsf{y}) < \delta$, οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X. ∎

7.9 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Η έννοια της μετρικής και του μετρικού χώρου. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι μια ευρεία γκάμμα συνόλων (αρκετά διαφορετικών μεταξύ τους) μπορεί να περιγραφούν κάτω απο την γενικότερη θεωρία των μετρικών χώρων.
- Η έννοια της ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο και η έννοια της σύγκλισης.
- Ακολουθίες Cauchy σε ένα μετρικό χώρο και η σχέση τους με τις συγκλίνουσες ακολουθίες: Πλήρεις μετρικοί χώροι.
- Ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου.
- Ενώσεις και τομές ανοιχτών και κλειστών υποσυνόλων: Διαφορά μεταξύ πεπερασμένων και άπειρων ενώσεων και τομών.
- Συμπάγεια και η σχέση της με την σύγκλιση.
- Συνεχείς συναρτήσεις, ανοιχτά και κλειστά σύνολα, σχέση με την συμπάγεια.

Κεφάλαιο 8

Εισαγωγή στους χώρους εσωτερικού γινομένου

8.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μία πολύ σημαντική κατηγορία μετρικών χώρων, οι οποίοι ονομάζονται χώροι εσωτερικού γινομένου. Οι χώροι αυτοί έχουν την ιδιότητα η μετρική τους να παράγεται απο μια απεικόνιση με συγκεκριμένες ιδιότητες η οποία ονομάζεται το εσωτερικό γινόμενο. Για μια πολύ καλή εισαγωγή στους χώρους εσωτερικού γινομένου και την εφαρμογή τους στην θεωρία προσέγγισης συναρτήσεων παραπέμπουμε στους Lebedev et al. (2002). Οι χώροι εσωτερικού γινομένου, βρίσκουν πολύ σημαντικές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες στην μελέτη της θεωρίας πιθανοτήτων και στην στατιστική (βλ. π.χ. Jacod and Protter (2003)).

8.2 Διανυσματικοί χώροι

Στην ενότητα αυτή θα θεωρούμε ότι οι χώροι που μελετάμε έχουν γραμμική δομή, δηλαδή είναι σύνολα με την ιδιότητα ότι αν δύο στοιχεία του συνόλου αυτού ανήκουν στο σύνολο, τότε και κάθε γραμμικός τους συνδυασμός θα ανήκει στο σύνολο αυτό.

Θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.2.1. *Ένα σύνολο X, με ένα σώμα F, στο οποίο έχουμε ορίσει τις πράξεις της πρόσθεσης,$+$, και του πολλαπλασιασμού, $\cdot$, με ένα στοιχείο του σώματος, ονομάζεται* **διανυσματικός χώρος** *αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

1. $\mathsf{x}+\mathsf{y}=\mathsf{y}+\mathsf{x}$, $\forall \mathsf{x},\mathsf{y}\in X$
2. $(\mathsf{x}+\mathsf{y})+\mathsf{z}=\mathsf{x}+(\mathsf{y}+\mathsf{z})$, $\forall \mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z}\in X$
3. $\exists \mathbf{0}\in X : \mathsf{x}+\mathbf{0}=\mathsf{x}$, $\forall \mathsf{x}\in X$
4. $\forall \mathsf{x}\in X$, $\exists \mathsf{y}\in X$: $\mathsf{x}+\mathsf{y}=\mathbf{0}$.
5. $\lambda_1(\lambda_2\,\mathsf{x})=(\lambda_1\,\lambda_2)\,\mathsf{x}$, $\forall \lambda_1,\lambda_2\in F$, $\mathsf{x}\in X$.
6. $1\,\mathsf{x}=\mathsf{x}$, $\forall \mathsf{x}\in X$, *όπου* 1 *είναι το μοναδιαίο στοιχείο του σώματος* F
7. $\lambda(\mathsf{x}+\mathsf{y})=\lambda\,\mathsf{x}+\lambda\,\mathsf{y}$, $\forall \lambda\in F$, $\mathsf{x},\mathsf{y}\in X$
8. $(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathsf{x}=\lambda_1\,\mathsf{x}+\lambda_2\,\mathsf{x}$, $\forall \lambda_1,\lambda_2\in F$, $\mathsf{x}\in X$.

Σχόλιο 8.2.2. *Η πιο κοινή επιλογή για το σώμα F είναι $F=\mathbb{R}$. Μία άλλη επιλογή είναι $F=\mathbb{C}$, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.*

Παράδειγμα 8.2.3. *Το πιο απλό παράδειγμα διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $X=\mathbb{R}$ με την επιλογή $F=\mathbb{R}$. Η πράξη $+$ είναι η τυπική πρόσθεση των πραγματικών αριθμών, ενώ η πράξη $\cdot$ είναι ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών.*

Παράδειγμα 8.2.4. *Το σύνολο $X = \mathbb{R}^n$ με την επιλογή $F = \mathbb{R}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Η πράξη $+$ είναι η πρόσθεση των διανυσμάτων,*

$$\begin{aligned} \mathsf{x} + \mathsf{y} &= (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \\ \mathsf{x} &= (x_1, \cdots, x_n) \\ \mathsf{y} &= (y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

ενώ η πράξη $\cdot$ είναι η

$$\lambda \mathsf{x} = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$
$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathsf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

Παράδειγμα 8.2.5. *Το σύνολο των πινάκων $X = \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι διανυσματικός χώρος επάνω στο σώμα $F = \mathbb{R}$, με πρόσθεση την συνήθη πρόσθεση πινακων και πολλαπλασιασμό το πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επι πίνακα.*

Παράδειγμα 8.2.6. *Ας θεωρήσουμε το σύνολο X των συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή, δύο οποιαδήποτε στοιχεία $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$ είναι συναρτήσεις δηλαδή $\mathsf{x} = f$, $\mathsf{y} = g$, $f, g : I \to \mathbb{R}$. Η πρόσθεση $\mathsf{x} + \mathsf{y}$ είναι η συνήθης πρόσθεση συναρτήσεων δηλαδη $\mathsf{x}+\mathsf{y}$ είναι η συνάρτηση $f+g : I \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ για κάθε $x \in I$ Το σύνολο των συναρτήσεων $X = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός χώρος επάνω στο σώμα $F = \mathbb{R}$, με πρόσθεση την πρόσθεση συναρτήσεων και ο πολλαπλασιασμός με το στοιχείο του σώματος είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός συνάρτησης με πραγματικό αριθμό, δηλαδή το στοιχείο $\lambda\mathsf{x}$ αντιστοιχεί στην συνάρτηση $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι τέτοια ωστε $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Παράδειγμα 8.2.7. *Το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών, X, είναι διανυσματικός χώρος επάνω στο σώμα $F = \mathbb{R}$ όπου χρησιμοποιούμε τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης τυχαίων μεταβλητών και του πολλαπλασιασμού τυχαίας μεταβλητής με πραγματικό αριθμό.*

Σχόλιο 8.2.8. *Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα θα μπορούσαμε να πάρουμε $F = \mathbb{C}$ αντί $F = \mathbb{R}$.*

Σε ότι ακολουθεί θα θεωρούμε ότι $F = \mathbb{R}$.

8.3 Νόρμα

Θα χρειαστούμε επίσης τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.3.1. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+$ ονομάζεται* **νόρμα** *αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*

1. $\| \mathsf{x} \| = 0$, *αν και μόνο αν* $\mathsf{x} = 0$.
2. $\| \lambda \mathsf{x} \| = |\lambda| \, \| \mathsf{x} \|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathsf{x} \in X$.
3. $\| \mathsf{x} + \mathsf{y} \| \leq \| \mathsf{x} \| + \| \mathsf{y} \|$, $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$.

Παρατηρείστε ότι η νόρμα έχει ιδιότητες οι οποίες μας θυμίζουν πολύ τις ιδιότητες της μετρικής, με την διαφορά ότι η μετρική είναι μια απεικόνιση η οποία ορίζεται $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, δηλαδή χρειάζεται σαν όρισμα ένα ζεύγος στοιχείων του X και όχι μόνο ένα στοιχείο του X όπως συμβαίνει για την νόρμα. Όπως είναι αναμενόμενο, απο μια νόρμα μπορούμε να παράγουμε μια μετρική.

Πρόταση 8.3.2. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα. Τότε η απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ η οποία ορίζεται ως*

$$d(\mathsf{x}, \mathsf{y}) := \| \mathsf{x} - \mathsf{y} \|$$

είναι μία μετρική στον X.

Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. ■

Παράδειγμα 8.3.3. *Ο χώρος ℓ^p είναι ένας γραμμικός χώρος. Η απεικόνιση $\|\cdot\|: \ell^p \to \mathbb{R}^+$,*

$$\| \mathsf{x} \| := \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

είναι μια νόρμα. Αν πάρουμε οποιαδήποτε στοιχεία $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \ell^p$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $\| \mathsf{x} - \mathsf{y} \| = d(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ όπου d είναι η μετρική που ορίσαμε το σύνολο ℓ^p.

Ορισμός 8.3.4. *Ένας πλήρης γραμμικός χώρος με νόρμα ονομάζεται χώρος Banach*

Παράδειγμα 8.3.5. *Ο χώρος ℓ^p είναι ένας χώρος Banach.*

8.4 Εσωτερικό γινόμενο

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 8.4.1. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **εσωτερικό γινόμενο** *αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*

1. $(\lambda \mathsf{x} + \mathsf{y}, \mathsf{z}) = \lambda\, (\mathsf{x}, \mathsf{z}) + (\mathsf{y}, \mathsf{z})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in X$.
2. $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = (\mathsf{y}, \mathsf{x})$, $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$.
3. $(\mathsf{x}, \mathsf{x}) \geq 0$, $\forall \mathsf{x} \in X$.
4. $(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathsf{x} = \mathbf{0}$.

Ορισμός 8.4.2. *Ένας διανυσματικός χώρος X με ένα εσωτερικό γινομενο $(\cdot,\cdot)$ ονομάζεται* **χώρος εσωτερικού γινομένου**.

Απο ένα εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα, με βάση τον κανόνα

$$\| \mathsf{x} \| := \sqrt{(\mathsf{x}, \mathsf{x})}$$

Ορισμός 8.4.3. *Ένας χώρος εσωτερικού γινομένου ο οποίος είναι πλήρης ονομάζεται* **χώρος Hilbert**.

Παράδειγμα 8.4.4. *Ο διανυσματικος χώρος $X = \mathbb{R}^n$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\begin{aligned} (\mathsf{x}, \mathsf{y}) &:= x_1\, y_1 + \cdots x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \mathsf{x} &= (x_1, \cdots, x_n) \\ \mathsf{y} &= (y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

Επίσης, είναι πλήρης, άρα είναι χώρος Hilbert.

Παράδειγμα 8.4.5. *Ο χώρος ℓ^2 με εσωτερικό γινόμενο*

$$\begin{aligned} (\mathsf{x}, \mathsf{y}) &:= \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i \\ \mathsf{x} &= (x_1, x_2, \cdots) \\ \mathsf{y} &= (y_1, y_2, \cdots) \end{aligned}$$

είναι χώρος εσωτερικού γινομένου. Επειδή είναι πλήρης, είναι και χώρος Hilbert.

Παράδειγμα 8.4.6. *Ο διανυσματικός χώρος X των συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\int_I \mid f(x) \mid^2 dx < \infty$, είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με εσωτερικό γινόμενο*

$$(f, g) := \int_I f(x)\, g(x)\, dx$$

Το διανυσματικό αυτό χώρο θα τον συμβολίζουμε με $X = L^2(I)$, και τα στοιχεία του x θα είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 8.4.7. *Ο διανυσματικός χώρος των τυχαίων μεταβλητών U, για τις οποίες ισχύει ότι $\mathbb{E}[U^2] < \infty$, είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με εσωτερικό γινόμενο*

$$(U_1, U_2) := \mathbb{E}[U_1\, U_2]$$

Πολλές απο τις ιδιότητες της διασποράς που έχουμε συναντήσει στην στατιστική είναι ουσιαστικά ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Μια απο τις πιο σημαντικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου είναι η ανισότητα Cauchy-Schwartz.

Πρόταση 8.4.8 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz). *Έστω X ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Για οποιαδήποτε στοιχεία $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$ ισχύει*

$$|\, (\mathsf{x}, \mathsf{y})\, | \leq \|\, \mathsf{x}\, \|\, \|\, \mathsf{y}\, \|,$$

όπου $\|\, \mathsf{x}\, \| = \sqrt{(\mathsf{x}, \mathsf{x})}$.

Απόδειξη: Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι

$$(\mathsf{x} - \lambda \mathsf{y}, \mathsf{x} - \lambda \mathsf{y}) \geq 0$$

για κάθε $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$. Όμως,

$$(\mathsf{x} - \lambda \mathsf{y}, \mathsf{x} - \lambda \mathsf{y}) = (\mathsf{x}, \mathsf{x}) - 2\lambda\, (\mathsf{x}, \mathsf{y}) + \lambda^2\, (\mathsf{y}, \mathsf{y})$$

συνεπώς,

$$(\mathsf{x}, \mathsf{x}) - 2\lambda\, (\mathsf{x}, \mathsf{y}) + \lambda^2\, (\mathsf{y}, \mathsf{y}) \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Η σχέση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί σαν ένα διώνυμο στο λ το οποίο κρατάει το πρόσημο του συντελεστή του πιο υψηλόβαθμου όρου $(\mathsf{y}, \mathsf{y}) \geq 0$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει το διώνυμο να μην έχει πραγματική λύση ή αν έχει η λύση αυτή να είναι διπλή. Συνεπώς πρέπει η διακρίνουσα του διωνύμου να είναι μικρότερη ή ίση απο το 0,

$$\Delta = 4\, (\mathsf{x}, \mathsf{y})^2 - 4\, (\mathsf{x}, \mathsf{x})\, (\mathsf{y}, \mathsf{y}) \leq 0$$

απο την οποία και παίρνουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. ■

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι πολύ χρήσιμη στο να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα για τις μετρικές ή τις νόρμες που ορίζονται μέσω εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 8.4.9. *Δύο στοιχεία $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$ ονομάζονται* **ορθογώνια** *αν* $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = 0$.

Παράδειγμα 8.4.10. *Έστω U_1, U_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[U_2] = 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές U_1, U_2 αν τις δούμε ως στοιχεία του διανυσματικού χώρου των τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες τετραγωνικές ροπές (βλ. Παράδειγμα 8.4.7) είναι ορθογώνια στοιχεία.*

Παράδειγμα 8.4.11. *Αν $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in X$ και $(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2) = 0$, δηλαδή x_1, x_2 ορθογώνια, τότε*

$$\|\mathsf{x}_1 + \mathsf{x}_2\|^2 = \|\mathsf{x}_1\|^2 + \|\mathsf{x}_2\|^2.$$

Αυτό είναι η γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο γενικότερο πλαίσιο ενός χώρου εσωτερικού γινομένου.

Σχόλιο 8.4.12. *Οι χώροι εσωτερικού γινομένου είναι μια πολύ ειδική κατηγορία μετρικών χώρων. Για παράδειγμα απο όλους τους χώρους ℓ^p οι οποίοι είναι όλοι πλήρεις με τις αντίστοιχες νόρμες του Παραδείγματος 8.3.3* **μόνο** *ο ℓ^2 είναι χώρος Hilbert.*

8.5 Σειρές *Fourier*

Ας θεωρήσουμε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου X.

Ορισμός 8.5.1. *Η συλλογή στοιχείων* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots, \mathsf{x}_n\} \subset X$ *για τα οποία ισχύει* $(\mathsf{x}_i, \mathsf{x}_j) = \delta_{ij}$ *ονομάζεται* **ορθοκανονικό σύστημα**.

Παράδειγμα 8.5.2. *Αν* $X = \mathbb{R}^n$ *τα γνωστά μας διανύσματα βάσης*

$$\begin{aligned} \mathsf{x}_1 &= (1, 0, \cdots, 0), \\ \mathsf{x}_2 &= (0, 1, \cdots, 0), \\ &\cdots \\ \mathsf{x}_n &= (0, 0, \cdots, 1) \end{aligned}$$

αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα.

Παράδειγμα 8.5.3. *Αν* $X = L^2(I)$ *με* $I = [-\pi, \pi]$, *το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (βλ. Παράδειγμα 8.4.6) τότε οι συναρτήσεις* $\mathsf{x}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\,x)$, $\mathsf{y}_0 = 1$, $\mathsf{y}_m := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\,x)$, $n, m \in \mathbb{N}^+$ *(επιτρέπουμε και την τιμή* $m = 0$*) είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα. Πράγματι, μπορούμε να δείξουμε οτι*

$$\begin{aligned} (\mathsf{x}_n, \mathsf{x}_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\,x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(m\,x) dx = \delta_{n,m}, \\ (\mathsf{y}_n, \mathsf{y}_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\,x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\,x) dx = \delta_{n,m}, \\ (\mathsf{x}_n, \mathsf{y}_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\,x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\,x) dx = 0. \end{aligned}$$

Πρόταση 8.5.4. *Έστω* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots, \mathsf{x}_n\}$ *ορθοκανονικό σύστημα και* x *κάποιο στοιχείο του* X. *Ας υποθέσουμε οτι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *τέτοιοι ώστε* $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathsf{x}_i$. *Τότε* $c_k = (\mathsf{x}, \mathsf{x}_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

Απόδειξη: Εφόσον $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathsf{x}_i$, έχουμε ότι

$$(\mathsf{x}, \mathsf{x}_k) = (\sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathsf{x}_i, \mathsf{x}_k) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, (\mathsf{x}_i, \mathsf{x}_k) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \delta_{ik} = c_k$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου. ∎

Συνεπώς αν $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathsf{x}_i$ τότε $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$. Το ερώτημα είναι τι συμβαίνει αν υποθέσουμε ότι το n δεν είναι πεπερασμένο αλλά **άπειρο**, δηλαδή οτι το ορθοκανονικό σύστημα μπορεί να είναι αριθμήσιμο. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, γιατι τα βήματα της απόδειξης της παραπάνω προτασης βασίζονται στην παραδοχή ότι το n είναι πεπερασμένο, συνεπώς πρέπει να είμαστε σε θέση να δείξουμε οτι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\, \mathsf{x}_i$ είναι **συγκλίνουσα**! Ένα συναφές ερώτημα που προκύπτει είναι επίσης το ακόλουθο: Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο x ενός διανυσματικού χώρου X και πάρουμε την σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$ η οποία υποθέτουμε οτι συγκλίνει στον X, πότε μπορούμε να πούμε οτι $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι πολύ σημαντική, γιατί αν είναι καταφατική τότε μας δίνει ένα τρόπο έκφρασης οποιουδήποτε στοιχείου του X ως ενα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του ορθοκανονικού συστήματος $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$. Τέτοια αναπτύγματα βρίσκουν πολύ ενδιαφέρουσες εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα της ανάλυσης, των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Για παράδειγμα, αναπτύγματα της μορφής αυτής χρησιμοποιούνται στις χρονολογικές σειρές.

Ορισμός 8.5.5. *Έστω* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$ *ένα αριθμήσιμο ορθοκανονικό σύνολο στο* X *και* $\mathsf{x} \in X$. *Η σειρά* $\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$ *ονομάζεται* **σειρά Fourier** *του* x.

Τα ακόλουθα ερωτήματα είναι πολυ σημαντικά:

1. Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο y στον X δηλαδή μπορούμε να ισχυριστούμε οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

   $$||\, \mathsf{x} - \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i \,|| < \epsilon$$

   για $n > N$;

2. Κάτω ποιές συνθήκες $\mathsf{x} = \mathsf{y}$;

Θα απαντήσουμε τα ερωτήματα αυτά ένα ένα.

Πρόταση 8.5.6. *Ας υποθέσουμε οτι* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$ *είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον* X *και* $\mathsf{x} \in X$. *Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $c_1, c_2, \cdots$ *τέτοιοι ώστε* $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, \mathsf{x}_i$. *Τότε* $c_i = (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)$, *δηλαδή* $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$.

Απόδειξη: Έστω $\mathsf{z} \in X$. Η απεικόνιση $f_{\mathsf{z}} : X \to \mathbb{R}$, $f_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) := (\mathsf{z}, \mathsf{x})$ είναι **συνεχής**, δηλαδή αν $\mathsf{x}_n \in X$, $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στον X, τότε $f_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}_n) \to f_{\mathsf{z}}(\mathsf{x})$ (στον $\mathbb{R}$). Πράγματι, απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$| f_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) - f_{\mathsf{z}}(\mathsf{y}) | = | (\mathsf{z}, \mathsf{x}) - (\mathsf{z}, \mathsf{y}) | = | (\mathsf{z}, \mathsf{x} - \mathsf{y}) | \leq || \mathsf{z} || \, || \mathsf{x} - \mathsf{y} ||$$

Θέτωντας $\mathsf{y} = \mathsf{x}_n$ παίρνουμε το αποτέλεσμα που ζητάμε, δηλαδή ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}_n) = f_{\mathsf{z}}(\lim_{n\to\infty} \mathsf{x}_n)$$

όπου το όριο στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης αυτής είναι όριο στο $\mathbb{R}$ ενώ το όριο στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης είναι όριο στο X.

Η συνέχεια της απεικόνισης f_{z} μας εξασφαλίζει ότι αν η $\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{y}_i$ συγκλίνει στο y στον X, τότε $f_{\mathsf{z}}(\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{y}_i) = f_{\mathsf{z}}(\mathsf{y})$, υπο την έννοια ότι

$$f_{\mathsf{z}}(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{y}_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_{\mathsf{z}}(\mathsf{y}_i).$$

Αν $\mathsf{y}_i = c_i\, \mathsf{x}_i$ τότε

$$(\mathsf{x}, \mathsf{x}_j) = (\sum_{i=1}^{\infty} c_i\, \mathsf{x}_i, \mathsf{x}_j) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, (\mathsf{x}_i, \mathsf{x}_j) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, \delta_{ij} = c_j$$

απο όπου και προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Οι σειρές Fourier έχουν ορισμένες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες σχετικά με την προσέγγιση **οποιουδήποτε** στοιχείου x στον χώρο X.

Πρόταση 8.5.7. *Έστω* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$ *ένα ορθοκανονικό σύστημα στο* X *και* $c_1, c_2, \cdots$ *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε τις ακολουθίες*

$$\begin{aligned} \mathsf{y}_n &= \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathsf{x}_i, \ \ \textit{για οποιαδήποτε}\ (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ n \in \mathbb{N}^+, \\ \mathsf{z}_n &= \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i, \ \ n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Τότε,

$$|| \mathsf{x} - \mathsf{z}_n || \leq || \mathsf{x} - \mathsf{y}_n ||, \ \ n \in \mathbb{N}^+. \tag{8.1}$$

Απόδειξη: Για την y_n ισχύει

$$|| \mathsf{x} - \mathsf{y}_n ||^2 = || \mathsf{x} ||^2 - \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2 + \sum_{i=1} [(\mathsf{x}, \mathsf{x}_i) - c_i]^2 \tag{8.2}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\|\, \mathsf{x}-\mathsf{y}_n \,\|^2 &= (\mathsf{x}-\mathsf{y}_n, \mathsf{x}-\mathsf{y}_n) = (\mathsf{x},\mathsf{x}) - 2(\mathsf{x},\mathsf{y}_n) + (\mathsf{y}_n,\mathsf{y}_n) \\
&= \|\, \mathsf{x} \,\|^2 - 2(\mathsf{x}, \sum_{i=1}^n c_i\, \mathsf{x}_i) + (\sum_{k=1}^n c_k\, \mathsf{x}_k, \sum_{i=1}^n c_i\, \mathsf{x}_i) \\
&= \|\, \mathsf{x} \,\|^2 - 2\sum_{i=1}^n c_i\, (\mathsf{x},\mathsf{x}_i) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_k\, c_i\, (\mathsf{x}_k,\mathsf{x}_i) \\
&= \|\, \mathsf{x} \,\|^2 - 2\sum_{i=1}^n c_i\, (\mathsf{x},\mathsf{x}_i) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_k\, c_i\, \delta_{ik} \\
&= \|\, \mathsf{x} \,\|^2 - 2\sum_{i=1}^n c_i\, (\mathsf{x},\mathsf{x}_i) + \sum_{i=1}^n c_i^2 \\
&= \|\, \mathsf{x} \,\|^2 - \sum_{i=1}^n (\mathsf{x},\mathsf{x}_i)^2 + \sum_{i=1} [(\mathsf{x},\mathsf{x}_i) - c_i]^2
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του εσωτερικού τετραγώνου (και κυρίως την γραμμικότητα). Προσέξτε ότι όλα τα αθροίσματα που συναντήσαμε μέχρι τώρα είναι πεπερασμένα αθροίσματα.

Αν τώρα όπου c_i θέσουμε $c_i = (\mathsf{x},\mathsf{x}_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ η εξίσωση (8.2) δίνει

$$\|\, \mathsf{x}-\mathsf{z}_n \,\|^2 = \|\, \mathsf{x} \,\|^2 - \sum_{i=1}^n (\mathsf{x},\mathsf{x}_i)^2 \tag{8.3}$$

Εφόσον

$$\sum_{i=1}^n [(\mathsf{x},\mathsf{x}_i) - c_i]^2 \geq 0$$

συγκρίνοντας τις (8.2), (8.3) καταλήγουμε ότι

$$\|\, \mathsf{x}-\mathsf{z}_n \,\| \leq \|\, \mathsf{x}-\mathsf{y}_n \,\|$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Σχόλιο 8.5.8 (Καλύτερες προσεγγισεις και ορθογώνιες προβολές). *Η Πρόταση 8.5.7 μας λέει ότι απο όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots, \mathsf{x}_n\}$, ο γραμμικός συνδυασμός που χρησιμοποιεί σαν σταθμίσεις τους πραγματικούς αριθμούς $\{(\mathsf{x},\mathsf{x}_1), (\mathsf{x},\mathsf{x}_2), \cdots, (\mathsf{x},\mathsf{x}_n)\}$ δίνει την* **καλύτερη προσέγγιση** *στο $\mathsf{x} \in X$, υπο την ακόλουθη έννοια. Έστω $X_n = \{\mathsf{y} \in X \mid \mathsf{y} = \sum_{i=1}^n c_i \mathsf{x}_i, \text{ για κάποια } c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}\}$. Αυτό είναι ένα υποσύνολο του X το οποίο είναι επίσης διανυσματικός χώρος, και κάθε στοιχείο του καθορίζεται πλήρως αρκεί να γνωρίζουμε την επιλογή $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε στοιχείο του $\mathsf{y} \in X_n$ σε ενα στοιχείο $c = (c_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, πράγμα που μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τους διανυσματικούς χώρους X_n και $\mathbb{R}^n$ σαν 'ισοδύναμους ', ή σύμφωνα με την επικρατούσα μαθηματική ορολογία σαν* **ισόμορφους**. *Θα συμβολίζουμε μάλιστα $X_n \simeq \mathbb{R}^n$. Ο διανυσματικός χώρος X_n έχει διασταση n. Σε αντίθεση θα δούμε ότι ο αρχικός χώρος X περιέχει στοιχεία τα οποία για να τα περιγράψουμε χρειαζόμαστε άπειρους πραγματικούς αριθμούς $c_1, c_2, \cdots$. Η διάσταση του αρχικού χώρου είναι άπειρη.*

Υπο αυτό το πρίσμα, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την (8.1) σαν την λύση σε ενα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ας υποθέσουμε ότι για **δεδομένο** *$\mathsf{x} \in X$ μας ζητούν να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης*

$$\min_{\mathsf{y}\in X_n} ||\mathsf{x}-\mathsf{y}||^2 = \min_{\mathsf{y}\in X_n} (\mathsf{x}-\mathsf{y}, \mathsf{x}-\mathsf{y}),$$

δηλαδή να βρούμε το στοιχείο του X_n το οποίο έχει την ελάχιστη απόσταση απο το x. Η σχέση (8.1) μας λέει οτι η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι το στοιχείο $\mathsf{z}_n \in X_n$ το οποίο καθορίζεται απο την σχέση $\mathsf{z}_n = \sum_{i=1}^n (\mathsf{x},\mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$, και αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Το στοιχείο z_n ονομαζεται η **ορθογώνια προβολή** *του $\mathsf{x} \in X$ στον X_n. Η ορθογώνια προβολή βρίσκει πολύ σημαντικές εφαρμογές μεταξύ άλλων και στις πιθανότητες και την στατιστική. Για παράδειγμα, η υπο συνθήκη μέση τιμή δεν είναι τίποτε αλλο απο μια εφαρμογή του παραπάνω αποτελέσματος για κατάλληλη επιλογη των χώρων X και X_n (μάλιστα μπορούμε να τροποποιήσουμε το παραπάνω επιχείρημα και να ορίσουμε την προβολή ακόμα και στην περίπτωση οπου επιλέγουμε ένα απειροδιάστατο υποσύνολο $Y \subset X$). Ένα αλλο παράδειγμα είναι η εφαρμογή του στην θεωρια της εκτιμητικης των γραμμικών υποδειγμάτων στην στατιστική.*

Η παρακάτω ανισότητα γνωστή και ως ανισότητα του Bessel είναι πολύ σημαντική.

Πρόταση 8.5.9. *Έστω* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$ *ένα ορθοκανονικό σύστημα στο* X *και* $\mathsf{x} \in X$ *ένα οποιοδήποτε στοιχείο του* X. *Τότε η αριθμητικη σειρά* $\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2$ **συγκλίνει** *και*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2 \leq \| \mathsf{x} \|^2 .$$

Απόδειξη: Στην εξίσωση (8.2) θέτουμε $c_i = (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)$, $i = 1, \cdots, n$ οπότε

$$\| \mathsf{x} \|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2 = \| \mathsf{x} - \mathsf{y}_n \|^2$$

Όμως

$$\| \mathsf{x} - \mathsf{y}_n \|^2 \geq 0, \text{ για κάθε } n$$

συνεπώς,

$$\| \mathsf{x} \|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2 \geq 0$$

για κάθε n. Αυτό μας δείχνει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2 \leq \| x \| \tag{8.4}$$

συνεπώς η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_n := \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2$ είναι αύξουσα και φραγμένη. 'ρα είναι συγκλίνουσα, και η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2$ συγκλίνει. Παίρνοντας τώρα το όριο στην (8.4) καταλήγουμε στην ανισότητα του Bessel . ■

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας δίνουν ενδιαφέρουσες πληροφορίες σχετικά με την σύγκλιση μιας σειράς Fourier. Σχετικά όμως με το δεύτερο ερώτημα, δηλαδή σχετικά με το αν το όριο της σειράς Fourier του στοιχείου $\mathsf{x} \in X$ ταυτίζεται με το x, θα χρειαστούμε κάποιες παραπάνω ιδιότητες και ορισμούς.

Ορισμός 8.5.10. *Το ορθοκανονικό σύστημα* $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$ *ονομάζεται* **πλήρες** *αν* $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i$ *για κάθε* $\mathsf{x} \in X$.

Το αν ένα ορθοκανονικό σύστημα είναι πλήρες ή όχι είναι μια ερώτηση που πολλές φορές είναι δύσκολο να απαντηθεί.

Παράδειγμα 8.5.11. *Παράδειγμα πλήρους ορθοκανονικου συστήματος είναι π.χ. οι συναρτησεις* $\mathsf{x}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$, $\mathsf{y}_0 = 1$ *και* $\mathsf{y}_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx)$ *(βλ Παράδειγμα 8.5.3) που είναι ενα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα για τον* $X = L^2([-\pi, \pi]) \cap C([-\pi, \pi])$, *τον διανυσματικό χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ε-ίναι και συνεχείς στο διάστημα* $[-\pi, \pi]$. *Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος δεν είναι καθόλου απλή! Συνδέεται με το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass (βλ. Θεώρημα 6.10.1).*

Για τα πληρη ορθοκανονικά συστήματα, είμαστε σίγουροι για την σύγκλιση της σειράς Fourier του x στο x (απο τον ίδιο τον ορισμό) και έχουμε επίσης και διάφορες ενδιάφερουσες ιδιότητες.

Πρόταση 8.5.12. *Έστω* $S = \{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \cdots\}$ *ένα* **πλήρες ορθοκανονικό σύστημα** *στο* X. *Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα*

1. $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, (\mathsf{y}, \mathsf{y}_i)$, $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in X$
2. *Ταυτότητα του Parseval*

$$\| \mathsf{x} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2, \quad \forall \mathsf{x} \in X. \tag{8.5}$$

3. *Αν υπάρχει κάποιο $\mathsf{x} \in X$ τέτοιο ώστε $(\mathsf{x}, \mathsf{x}_i) = 0$ για κάθε i, τότε $\mathsf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή το μόνο στοιχείο του X που είναι κάθετο σε κάθε στοιχεί του πλήρους ορθοκανονικού συστήματος είναι το $\mathbf{0}$!.*

4. *Αν $\mathsf{x} \notin S$, και μη μηδενικό, τότε το $S \cup \{\mathsf{x}\}$ δεν είναι ορθοκανονικό σύστημα, δηλαδή ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα είναι και το μεγαλύτερο ορθοκανονικό σύστημα που μπορούμε έχουμε για το X.*

Απόδειξη: (1) Εφόσον S πλήρες ορθοκανονικο σύστημα τότε απο τον ορισμό

$$\begin{aligned} \mathsf{x} &= \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i \\ \mathsf{y} &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mathsf{y}, \mathsf{x}_j)\, \mathsf{x}_j \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} (\mathsf{x}, \mathsf{y}) &= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i \,,\, \sum_{j=1}^{\infty} (\mathsf{y}, \mathsf{x}_j)\, \mathsf{x}_j\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\,(\mathsf{y}, \mathsf{x}_j)\,(\mathsf{x}_i, \mathsf{x}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\,(\mathsf{y}, \mathsf{x}_j)\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\,(\mathsf{y}, \mathsf{x}_i) \end{aligned}$$

Φυσικά το παραπάνω σημαίνει ότι παίρνουμε τις ακολουθίες

$$\begin{aligned} \mathsf{x}_n &= \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i, \\ \mathsf{y}_n &= \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{y}, \mathsf{x}_i)\, \mathsf{x}_i, \end{aligned}$$

οι οποίες γνωρίζουμε ότι συγκλίνουν στα x και y αντιστοίχως, και μετά παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο $(\mathsf{x}_n, \mathsf{y}_n)$ για το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου άρα

$$(\mathsf{x}_n, \mathsf{y}_n) = \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)\,(\mathsf{y}, \mathsf{x}_i)$$

και μετά να περάσουμε στο όριο $n \to \infty$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.
(2) Αν θέσουμε $\mathsf{x} = \mathsf{y}$ στο παραπάνω, παίρνουμε την ταυτότητα του Parseval.
(3) Απο την ταυτότητα του Parseval έχουμε ότι

$$\| \mathsf{x} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{x}, \mathsf{x}_i)^2$$

Αφού $(\mathsf{x}, \mathsf{x}_i) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots$ καταλήγουμε στο ότι $\| \mathsf{x} \| = 0$ άρα $\mathsf{x} = \mathbf{0}$.
(4) Αν $\mathsf{x} \notin S$ και $S \cup \{\mathsf{x}\}$ ορθοκανονικό σύστημα τότε $(\mathsf{x}, \mathsf{x}_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$. Επειδή όμως S πλήρες και το x είναι κάθετο σε όλα τα στοιχεία του S θα έχουμε $\mathsf{x} = \mathbf{0}$ το οποίο είναι άτοπο. ■

Παράδειγμα 8.5.13. *Όπως αναφέραμε στο Παράδειγμα 8.5.11, το ορθοκανονικό σύστημα το οποίο αποτελείται απο τα ημίτονα και τα συνημίτονα είναι πλήρες στο $X = L^2([-\pi, \pi]) \cap C([-\pi, \pi])$, τον διανυσματικό χώρο που αποτελείται απο τις συνεχεις τετραγωνικά ολοκλήρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς απο τα παραπάνω κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\mathsf{x} = f \in X$ μπορεί να γραφει σαν μια σειρά Fourier*

$$\mathsf{x} = f = \mathsf{y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathsf{y}_n + \sum_{m=1}^{\infty} b_n \mathsf{x}_n \tag{8.6}$$

όπου

$$\begin{aligned} a_0 &= (\mathsf{y}_0, \mathsf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= (\mathsf{y}_n, \mathsf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos(n\, x) dx \\ b_n &= (\mathsf{x}_n, \mathsf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin(n\, x) dx \end{aligned}$$

Η εξίσωση (8.6) είναι μια ισότητα συναρτήσεων δηλαδή σημαίνει οτι για $x \in [-\pi, \pi]$ θα πρέπει να ισχύει

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos(n\, x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin(n\, x). \tag{8.7}$$

Σχόλιο 8.5.14. *Τι θα συνέβαινε αν αντί του $X = L^2([-\pi, \pi]) \cap C([-\pi, \pi])$ παίρναμε απλά το $X = L^2([-\pi, \pi])$, δηλαδή τις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[-\pi, \pi]$ οι οποίες όμως μπορεί να έχουν και σημεία ασυνέχειας; Στην περίπτωση αυτή χρειαζόμαστε κάποιες τροποποιήσεις στα αποτελέσματα του Παραδειγματος 8.5.11. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (8.7)* **δεν** *είναι ακριβώς έτσι! Η ισότητα (8.7) ισχύει* **σχεδόν για όλα** *τα $x \in [-\pi, \pi]$ αλλά μπορούμε να βρούμε και μεμονωμένα σημεία $x \in [-\pi, \pi]$ για τα οποία η σειρά $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos(n\, x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin(n\, x)$* **δεν** *συγκλίνει στο $f(x)$! Το σωστό συμπέρασμα λοιπόν είναι το ακόλουθο, αν το $x \in [-\pi, \pi]$ είναι ένα σημείο συνέχειας της f τότε η (8.7) ισχύει. Αν το $x \in [-\pi, \pi]$ είναι σημείο ασυνέχειας της f τότε η σωστή τροποποίηση της (8.7) είναι η*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos(n\, x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin(n\, x),$$

δηλαδή στα σημεία ασυνέχειας της f η σειρά Fourier συγκλίνει στο ημιάθροισμα του δεξιού και του αριστερού ορίου της f στο σημείο αυτό.

8.6 Εφαρμογές στις πιθανότητες και την στατιστική

8.6.1 Χώροι εσωτερικού γινομένου και τυχαίες μεταβλητές

Όπως αναφέραμε και στο Παράδειγμα 8.4.7 το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών οι οποίες έχουν πεπερασμένες τετραγωνικές ροπές, έχει την δομή ενός χώρου εσωτερικού γινομένου. Μάλιστα, ικανοποιείται και η πληρότητα, δηλαδή ο χώρος αυτός είναι χώρος Hilbert. Η πλήρης κάλυψη του αντικειμένου αυτού απαιτεί γνώσεις απο την Θεωρία Μέτρου, τις οποίες ακόμα δεν έχουμε εισάγει αλλά θα επιχειρήσουμε εδώ μια πρώτη προσέγγιση σχετικά με το πως οι χώροι εσωτερικού γινομένου μπορούν να εφαρμοστούν στις πιθανοτητες και την στατιστική.

Συμβολισμός 8.6.1. *Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό. Θα συμβολίζουμε τον διανυσματικό χώρο με το σύμβολο $\mathbb{X}$ και θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό X για μια πραγματική τυχαία μεταβλητή, δηλαδη για μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου Ω είναι κάποιο σύνολο που περιέχει τα ενδεχόμενα για κάποιο τυχαίο πείραμα. Θα αποφύγουμε για την ώρα την ορολογία χώρος πιθανότητας που προϋποθέτει τον ορισμό 2 ακόμα εννοιών που δεν μας είναι απαραίτητες την παρούσα στιγμή. Το στοιχείο $\mathsf{x} \in \mathbb{X}$ θα συμβολίζεται λοιπόν με $\mathsf{x} = X$, για να είναι ο συμβολισμός μας σε πλήρη αντιστοιχία με τον συνήθη συμβολισμό της θεωριας πιθανοτήτων.*

Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, μπορούμε αν γνωρίζουμε την κατανομή της να υπολογίζουμε τις ροπές της. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{E}[\phi(X)]$ την μέση τιμή της σύνθεσης της τυχαίας μεταβλητής X με μια κατάλληλη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ας πούμε συνεχή). Η μέση τιμή αυτή μπορεί να εκφραστεί π.χ σαν ένα ολοκλήρωμα Stieltjes

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x)$$

όπου $F(x) = P(X \leq x)$. Θα δούμε αργότερα ότι ο πιο σωστός τρόπος είναι να ορίζουμε τις μέσες τιμές σαν το ολοκλήρωμα Lebesgue αλλά προς το παρόν ας αρκεστούμε στην παραπάνω αναπαράσταση.

Αν τώρα έχουμε δυο τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 μπορούμε να ορίσουμε και απο κοινού κατανομή τους

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2),$$

και χρησιμοοιώντας αυτή να ορίσουμε ποσότητες όπως π.χ.

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF(x_1, x_2)$$

όπου στην παρούσα μπορούμε να κατανοήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα σαν ένα επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα. Και σε αυτή την περίπτωση ο πιο σωστός τρόπος είναι να ορίζουμε τις μέσες τιμές σαν το ολοκλήρωμα Lebesgue αλλά προς το παρόν ας αρκεστούμε στην παραπάνω αναπαράσταση.

Θεώρημα 8.6.2. *Στον χώρο* $\mathbb{X} := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[X^2] < \infty\}$ *μπορούμε να ορίσουμε ενα εσωτερικό γινόμενο*

$$(X_1, X_2) := \mathbb{E}[X_1 X_2]$$

και αυτό ορίζει την νόρμα

$$||X|| = \left(\mathbb{E}[X^2]\right)^{\frac{1}{2}},$$

η οποία κάνει τον χώρο $\mathbb{X}$ *χώρο Hilbert.*

Απόδειξη: Το ότι η ποσότητα που ορίσαμε είναι ενα εσωτερικό γινόμενο προκύπτει άμεσα. Το θέμα της πληρότητας είναι λίγο πιο λεπτό, και η σωστή του αντιμετώπιση προϋποθέτει ορισμένες έννοιες της θεωρίας μέτρου και της θεωρίας ολοκλήρωσης του Lebesgue τις οποίες θα δούμε σε ξεχωριστό μάθημα. ■

Το θεώρημα αυτό μας λέει οτι ο διανυσματικός χωρος των τυχαίων μεταβλητών οι οποίες έχουν πεπερασμένη διασπορά, είναι χώρος εσωτερικού γινομένου και μπορεί να θεωρηθεί ως χώρος Hilbert με νόρμα την διασπορά. Η δομή του χώρου Hilbert που δώσαμε στον χώρο $\mathbb{X}$ μας εξασφαλίζει μερικές πολύ ενδιαφέρουσες και χρήσιμες ιδιότητες. Η πληρότητα του χώρου αυτού εχει π.χ. πολύ σημαντικές εφαρμογές στην προσέγγιση τυχαίων μεταβλητών απο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Σαν ένα άλλο παράδειγμα αναφέρουμε την γνωστή μας ανισότητα των διακυμάνσεων.

Πρόταση 8.6.3. *Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές* X_1, X_2 *για τις οποίες ισχύει* $\mathbb{E}[X_i^2] \leq \infty$, $i = 1, 2$. *Δείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή* $X_1\,X_2$ *έχει μέση τιμή και ισχύει ότι*

$$|\,\mathbb{E}[X_1\,X_2]\,| \leq \{\mathbb{E}[|\,X_1\,|^2\,]\}^{\frac{1}{2}}\,\{\mathbb{E}[|\,X_2\,|^2\,]\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.8}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz (βλ. Προταση 8.4.8). ■

8.6.2 Ανεξαρτησία και καθετότητα

Γνωρίζουμε απο την θεωρία πιθανοτήτων ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τότε $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$. Αν θεωρήσουμε ότι οι τυχαίες αυτές μεταβλητές έχουν την ιδιότητα $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$ τότε βλέπουμε ότι η ανεξαρτησία μπορεί να ερμηνευθεί σαν

$$(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = 0,$$

δηλαδη σαν μια συνθήκη καθετότητας των X_1, X_2 ως στοιχείων του χώρου Hilbert $\mathbb{X}$.

Πρόταση 8.6.4. *Έστω* $X_1, X_2 \in \mathbb{X}$ *ανεξάρτητες. Τότε*

$$Var(X_1 + x_2) = Var(X_1) + Var(X_2).$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τις $X_1' = X_1 - \mathbb{E}[X_1]$ και $X_2' = X_2 - \mathbb{E}[X_2]$, για τις οποίες ισχύει $\mathbb{E}[X_1'] = \mathbb{E}[X_2'] = 0$ και $X_1', X_2' \in \mathbb{X}$. Επίσης, εφόσον X_1, X_2 ανεξάρτητες ισχύει και X_1', X_2' ανεξάρτητες, και συνεπώς $(X_1', X_2') = 0$. Απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

$$||X_1' + X_2'||^2 = (X_1' + X_2', X_1' + X_2') = (X_1', X_1') + 2(X_1', X_2') + (X_2', X_2') = ||X_1'||^2 + ||X_2'||^2,$$

που είναι και το ζητούμενο εφόσον στο πλάισιο αυτό $||X'||^2 = Var(X)$. ■

8.6.3 Θεωρία προσέγγισης, προβολές και γραμμικά υποδείγματα

Ας δούμε τώρα πως η θεωρία της προσέγγισης και ειδικότερα η ιδέα της ορθογώνιας προβολής μπορεί να φανεί χρήσιμη στην μελέτη των γραμμικών υποδειγμάτων στην στατιστική. Ας υποθέσουμε οτι μια σειρά απο τυχαίους παράγοντες επηρεάζουν την εξέλιξη ενός φαινομένου που μας ενδιαφέρει. Ας θεωρήσουμε λοιπόν, σε αφηρημένο επίπεδο, οτι η τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει να μετρησουμε Y επηρεάζεται απο n τυχαίες μεταβλητές (παράγοντες) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ με κάποιο γραμμικό τρόπο. Θεωρούμε λοιπόν οτι οι Y και $(X_1, \cdots, X_n$ συνδέονται με μια γραμμική σχέση της μορφής

$$Y = C_1 X_1 + \cdots + C_n X_n + \xi$$

όπου $C_1, \cdots, C_n$ είναι πραγματικές σταθερές οι οποίες πρέπει να καθοριστούν. Ο όρος ξ μας ποσοτικοποιεί το σφάλμα αυτής της προσέγγισης. Αν καθορίσουμε τις σταθερές αυτές μετά μπορούμε να 'προβλέπουμε ' την τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y έχοντας μετρήσεις απο τις τυχαίες μεταβλητές $(X_1, \cdots, X_n)$. Υποδείγματα της μορφής αυτής εμφανίζονται σε πληθώρα εφαρμογών, απο την οικονομετρία μέχρι την διαχείριση κινδύνου ή τις φυσικές επιστήμες.

Ένας ωραίος και γενικός τρόπος για να δούμε ένα γραμμικό υπόδειγμα είναι να θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές Y και $X_1, \cdots, X_n$ σαν στοιχεία του χώρου Hilbert $\mathbb{X}$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \cdots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και έχουν μέση τιμή 0. Αυτό όπως θα δούμε πολύ σύντομα δεν βλάπτει την γενικότητα του επιχειρήματος μας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν $\mathsf{x}_i = X_i \in \mathbb{X}$, $\mathsf{y} = Y \in \mathbb{X}$, $i = 1, \cdots, n$, και απο τις υποθέσεις μας η συλλογή $\{\mathsf{x}_1, \cdots, \mathsf{x}_n\}$ αποτελεί ένα ορθοκανονικό σύστημα στο $\mathbb{X}$. Ας ονομάσουμε $\mathbb{X}_n = \{\mathsf{x} \in X \mid \mathsf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathsf{x}_i, \text{ για κάποια } c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}\}$. Σύμφωνα με το Σχόλιο 8.5.8 το σύνολο $\mathbb{X}_n$ είναι ενα υποσύνολο του αρχικού διανυσματικού χωρου $\mathbb{X}$, που είναι και αυτό διανυσματικός χώρος, με διάσταση n. Ας ονομάσουμε $\bar{Y} = C_1 X_1 + \cdots + C_n X_n$. Η τυχαία μεταβλητή $\bar{Y}$ μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί σαν ενα στοιχείο $\mathsf{y} \in \mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}$. Πώς θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους $c_1, \cdots, c_n$; Απο όλα τα μοντέλα της μορφής $Z = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n$, για **οποιεσδήποτε** τιμές των πραγματικών αριθμών $c_1, \cdots, c_n$ θα πρέπει να επιλέξουμε αυτό το οποίο μας δίνει την καλύτερη προσέγγιση της τυχαιας μεταβλητής Y που μας ενδιαφέρει. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να επιλέξουμε τις σταθερές $c_1, \cdots, c_n$ έτσι ώστε η ποσότητα $\mathbb{E}[(\bar{Y} - U)^2]$ να δίνει το ελάχιστο της ποσότητας $\mathbb{E}[(Y - Z)^2]$ αν αυτή υπολογιστεί επάνω σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής $Z = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n$, για **οποιεσδήποτε** τιμές των πραγματικών αριθμών $c_1, \cdots, c_n$. Αυτό δεν είναι τίποτε άλλο απο την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Κατά συνέπεια το καλύτερο υπόδειγμα που προσεγγίσει την τυχαία μεταβλητή Y είναι το $\bar{Y}$ που λύνει το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{Z = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n} \mathbb{E}[(Y - Z)^2] = \min_{\mathsf{z} \in \mathbb{X}_n} ||\mathsf{y} - \mathsf{z}||.$$

Όμως αυτό είναι ένα πρόβλημα της μορφής που επιλύσαμε κάνοντας χρήση της προσέγγισης των Ritz και Galerkin στο πλαίσιο της Πρότασης 8.5.7. Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα της πρότασης αυτής, η καλύτερη προσέγγιση, είναι η

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= C_1 X_1 + \cdots + C_n X_n, \\ C_i &= (\mathsf{y}, \mathsf{x}_i) = \mathbb{E}[Y X_i], \ \ i = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Στην πράξη τις αναμενόμενες τιμές οι οποίες ορίζουν τους συντελεστές του γραμμικού υποδείγματος μπορούμε να τους υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας στατιστικές εκτιμήτριες της αναμενόμενης τιμής όπως π.χ. τον δειγματικό μέσο.

Στην περίπτωση όπου τα X_i $i = 1, \cdots, n$ δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή ισοδύναμα στη περίπτωση όπου τα αντίστοιχα στοιχεία $\mathsf{x}_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \cdots, n$ δεν είναι ορθογώνια μπορούμε να ακολουθήσουμε μια διαδικασία, την διαδικασια ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt η οποία μπορεί να μας οδηγήσει σε ένα ισοδύναμο σύστημα απο ορθογώνια στοιχεία $\mathsf{x}'_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \mathsf{x}_j$ για κατάλληλη επιλογή των συντελεστών β_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$. Δεν θα επεκταθούμε στην διαδικασία αυτή την οποία έχετε ήδη συναντήσει στην Γραμμική 'λγεβρα αλλά θα αρκεστούμε να αναφέρουμε ότι η διαδικασία αυτή έχει ενα καλά ορισμένο ανάλογο στις άπειρες διαστάσεις. Αφού έχουμε κάνει την διαδικασια ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt εργαζόμαστε όπως και παραπάνω αλλά με το νέο σύστημα $\{\mathsf{x}'_1, \cdots, \mathsf{x}'_n\}$.

Είναι επίσης δυνατή η γενίκευση των παραπάνω και στην περίπτωση όπου οι τυχαίες μεταβλητές Y, X_i, $i = 1, \cdots, n$ παίρνουν τιμές οχι στο $\mathbb{R}$ αλλά εν γένει είναι διανυσματικές τυχαίες μεταβλητές, με κατάλληλο ορισμό των χώρων Hilbert που θα χρησιμοποιήσουμε.

8.6.4 Τυχαίες σειρές *Fourier* και προσομοίωση συναρτησιακών δεδομένων

Σε πολλές περιπτώσεις τα δεδομένα απο ενα στατιστικό πείραμα μπορεί να περιγραφούν απο μια συνάρτηση. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε π.χ. μετρήσεις της θερμοκρασίας στην επιφάνεια της γης. Αυτό θα περιγράφεται απο μετρήσεις της θερμοκρασίας σε σημεια της επιφάνειας της γης όπου κάθε σημείο χρειάζεται για να περιγραφει 3 συνταταγμένες $x = (x_1, x_2, x_3)$. Η μέτρηση της θερμοκρασίας σε κάθε σημείο μπορούμε να φανταστούμε ότι προέρχεται απο μετρησεις μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία είναι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Αν γνωρίζαμε την μορφη της, θα μπορούσαμε να παράγουμε τυχαία δεδομένα τα οποία θα μοιάζαν με αυτά που θα παίρνουμε απο τις μετρήσεις με προσομοίωση. Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα θα μπορούσαμε να φέρουμε τις καμπύλες αποδόσεων των ομολόγων. Σε μια καθορισμένη χρονική στιγμή t στις αγορές ομολόγων διατίθενται ομόλογα με διαφορετικες ωριμάνσεις $x \in [0, T]$. Οι αποδόσεις την χρονική αυτή στιγμή είναι διαφορετικές για τα διάφορετικά ομόλογα, και εξαρτώνται απο την ωρίμανση τους. Αν πάρουμε λοιπόν δεδομένα για τις αποδόσεις των ομολόγων, την συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, οι αποδόσεις αυτές μπορούμε να θεωρήσουμε οτι προέρχονται απο μια συνάρτηση $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ και $y(x)$ είναι η απόδοση του ομολόγου με ωρίμανση x την δεδομένη χρονική στιγμή t. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν κάποια συνέχεια ως προς το x άρα να περιοριστούμε σε συναρτήσεις y οι οποίες είναι συνεχείς. Η συνάρτηση αυτή λέμε ότι περιγράφει την **καμπύλη των αποδόσεων** των ομολόγων την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Οι αποδόσεις των ομολόγων μπορεί να θεωρηθούν τυχαίες, και είναι δυνατόν να κατανοήσουμε ολόκληρη την καμπύλη αποδόσεων σαν μια τυχαία μεταβλητή η οποία δεν παίρνει τιμές στους πραγματικούς αριθμούς αλλά στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων. Στο πλαίσιο αυτό, κάθε πραγματοποίηση του πειράματος μας δίνει οχι πλέον έναν αριθμό αλλά μια συνεχή συνάρτηση. Πως θα μπορούσαμε να κάνουμε προσομοίωση για τυχαίες μεταβλητές αυτού του τύπου;

Την απάντηση στο ερώτημα αυτό μας το δίνει πολλές φορές η θεωρία προσεγγίσεων συναρτήσεων. Μια ειδική περίπτωση είναι η προσέγγιση κατά Fourier. Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,T]$ μπορεί να αναπαρασταθεί με την χρήση μιας τριγωνομετρικής σειράς Fourier της μορφής

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right), \tag{8.9}$$

για κατάλληλη επιλογή των σταθερών a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}^+$. Για να προσομοιώσουμε λοιπόν συναρτησιακά δεδομένα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα (8.9), αλλά αντικαθιστώντας τις σταθερές a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}^+$ με τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ με κάποια κατανομή της επιλογής μας. Αυτό θα μας έδινε τυχαίες συναρτήσεις, ο υπολογισμός των οποίων σε συγκεκριμένα x θα μπορούσε να αναπαράγει τα συναρτησιακά δεδομένα τα οποία παρατηρούμε. Για παράδειγμα αν η αναπαράσταση (8.9) θεωρούμε οτι είναι ένα υπόδειγμα για την καμπύλη αποδόσεων των ομολόγων (για συγκεκριμένη επιλογή της κατανομής των πραγματικων τυχαίων μεταβλητών a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}^+$) τότε για να προσομοιώσουμε τα δεδομένα που έχουμε για τις αποδόσεις των ομολόγων με ωριμάνσεις x_j, $j = 1, \cdots, M$ αρκεί να προομοιώσουμε δεδομένα απο την κατανομή των a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}^+$, και μετά να υπολογίσουμε την σειρά (8.9) στα σημεία x_j, $j = 1, \cdots, M$. Η μέθοδος αυτή θα αναπαραστήσει σωστά οποιεσδήποτε συσχετίσεις υπάρχουν μεταξύ των αποδόσεων ομολόγων με διαφορετικές ωριμάνσεις.

Επίσης, αν τον ρόλο του x παίζει ο χρόνος, το ανάπτυγμα (8.9) μας δίνει ενα βολικό υπόδειγμα για μετρήσεις οι οποίες δινονται διατεταγμένα στον χρόνο (χρονολογικές σειρές).

Παράδειγμα 8.6.5 (Διαδικασία Wiener ή κινηση Brown). *Ας πάρουμε την σειρά Fourier*

$$\phi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{2}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi t\right)$$

όπου a_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $a_n \sim N(0,1)$. Η σειρά αυτή ορίζει μια τυχαία συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και που ονομάζεται διαδικασία Wiener. Παράγει τυχαίες μεταβλητές $\phi(t)$, $t \in [0,1]$ τέτοιες ώστε για οποιαδήποτε $t, s \in [0,1]$ να ισχύει $Cov(\phi(t), \phi(s)) = \min(t,s)$. Η διαδικασία Wiener είναι ένα θεμελιώδες υπόδειγμα στα χρηματοοικονομικά, την φυσική, την βιολογία, την ανάλυση σήματος κλπ.

Παράδειγμα 8.6.6 (Η γέφυρα Brown). *Ας πάρουμε την σειρά Fourier*

$$\phi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin(n\pi t)$$

όπου a_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $a_i \sim N(0,1)$. Η σειρά αυτή ορίζει μια τυχαία συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και που ονομάζεται γέφυρα Brown. Παράγει τυχαίες μεταβλητές $\phi(t)$, $t \in [0,1]$ τέτοιες ώστε να ισχύει πάντοτε ότι $\phi(1) = 0$ και για οποιαδήποτε $t, s \in [0,1]$ να ισχύει $Cov(\phi(t), \phi(s)) = \min(t,s) - t\,s$. Η γέφυρα Brown βρίσκει ενδιαφέρουσες εφαρμογές σε υποδείγματα των χρηματοοικονομικών.

8.7 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Η έννοια του διανυσματικού χώρου.
- Η έννοια της νόρμας και η σχέση της με την μετρική.

- Η έννοια του εσωτερικού γινομένου.
- Γραμμικοί χώροι με νόρμα που παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο – χώροι εσωτερικού γινομένου – χώροι Hilbert
- Προσέγγιση σε χώρους εσωτερικού γινομένου – Σειρές Fourier.

Bibliography

Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis.* Addison Wesley Publishing Company.

Bobrowski, A. (2005). *Functional analysis for probability and stochastic processes: an introduction.* Cambridge University Press.

Bremaud, P. (1999). *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*, Volume 31. springer.

Jacod, J. and P. E. Protter (2003). *Probability essentials.* Springer.

Johnsonbaugh, R. and W. Pfaffenberger (1981). *Foundations of mathematical analysis.* M. Dekker (New York, NY).

Labarre, A. E. (2008). *Intermediate mathematical analysis.* DoverPublications.

Lebedev, L. P., I. I. Vorovich, and G. M. L. Gladwell (2002). *Functional analysis: applications in mechanics and inverse problems*, Volume 100. Springer.

Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis*, Volume 3. McGraw-Hill New York.

Severini, T. A. (2005). *Elements of distribution theory*, Volume 17. Cambridge University Press.

Ευρετήριο