Λύσεις των Ασκήσεων 1-3 της σελ. 53 των σημειώσεων

1. $X_i \sim$ Διωνυμική $(1,\theta)$, $i=1,\dots,n$, ανεξ. $T = X_1+\dots+X_n$

$P(X_1 = x_1,\dots, X_n = x_n \mid T=t)$

1η περίπτωση: Αν $t \neq \sum_{i=1}^{n} x_i$ η παραπάνω πιθανότητα είναι ίση με μηδέν.

2η περίπτωση: Αν $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$ η παραπάνω πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n,\ T=t)}{P(T=t)} = \frac{P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)}{P(T=t)} \qquad T\sim \text{Διων}(n,\theta)$$

$$= \frac{P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n)}{P(T=t)} = \frac{\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}\cdots\theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^{x_1+\dots+x_n}(1-\theta)^{n-(x_1+\dots+x_n)}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^t(1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

Συνεπώς η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X_1=x_1,\dots X_n=x_n \mid T=t)$ δεν εξαρτάται από το θ. Άρα η στατιστική συνάρτηση $T=X_1+\dots+X_n$ είναι επαρκής γιά την παράμετρο θ.

2. $X_1,\dots,X_n \sim$ Ομοιόμορφη (a,β)

$\mu_r = m_r$, $r=1,2$.

$$\mu_1 = m_1 \Leftrightarrow \frac{a+\beta}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

$$\mu_2 = m_2 \Leftrightarrow \frac{(\beta-a)^2}{12} + \left(\frac{a+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) ως προς a,β βρίσκουμε τις ροποεκτιμήτριες των παραμέτρων a,β.

3. $X_1, \ldots, X_n \sim$ Εκθετική (θ) ανεξάρτητη

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι :

$$L(\theta) = \theta^n \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Ο φυσικός λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = n \ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = n \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

<u>εκτιμήτρια μέγιστης</u>
<u>πιθανοφάνειας της θ</u>