

Πρόβλημα 1. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy^2 + x$ για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ποια από αυτά είναι τοπικά μέγιστα, ποια τοπικά ελάχιστα και για ποια δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βάση τον Εσσιανό πίνακα; Να παρουσιάσετε το διάγραμμα των ισοσταθμικών καμπυλών με χρήση της R σημειώνοντας τα κρίσιμα σημεία.

Να επαναλάβετε για την συνάρτηση $g(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε τα δεσμευμένα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = xy^2$ υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Να διερευνήσετε αν πρόκειται για σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικά σημεία χρησιμοποιώντας ισοσταθμικές καμπύλες και να επιβεβαιώσετε τα συμπεράσματά σας με την βοήθεια του πλαισιωμένου Εσσιανού πίνακα.

Πρόβλημα 3. Να βρείτε τα δεσμευμένα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$ υπό τους περιορισμούς $2x + y + z = 0$ και $x + 2y = 1$ με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Να διερευνήσετε αν πρόκειται για σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικά με την βοήθεια του πλαισιωμένου Εσσιανού πίνακα.

Πρόβλημα 4. Ένας καταστηματάρχης σκοπεύει να εισάγει ηλεκτρικές συσκευές 6 διαφορετικών τύπων. Θα διαθέσει συνολικά έως €30.000 για την αγορά των συσκευών. Το κόστος αγοράς κάθε τύπου συσκευής ανά μονάδα δίδεται στον ακόλουθο πίνακα όπως και το καθαρό κέρδος ανά μονάδα συσκευής. Ο καταστηματάρχης σκοπεύει να πωλήσει όλο το εμπόρευμα που θα εισάγει και για τον σκοπό αυτό έχει (συντηρητικές) εκτιμήσεις για την ζήτηση κάθε τύπου συσκευής. Ο καταστηματάρχης θέλει να αποφασίσει τον αριθμό συσκευών κάθε τύπου που θα εισάγει έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το καθαρό κέρδος από την πώλησή τους χωρίς να υπερβεί το ποσό των €30.000 και χωρίς να υπερβεί την εκτιμώμενη ζήτηση για κάθε είδος συσκευής.

Συσκευές	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6
Κόστος Αγοράς (€)	72	113	176	258	271	304
Καθαρό Κέρδος ανά Συσκευή (€)	16	27	30	40	45	55
Εκτιμώμενη Ζήτηση	100	80	40	50	50	40

Να διατυπώσετε ένα πρότυπο Γραμμικού Προγραμματισμού με ακέραιες μεταβλητές το οποίο να περιγράφει το πρόβλημα και να το επιλύσετε (με την βοήθεια του lpSolve).

Πρόβλημα 5. Ένας δήμος έχει να επιλέξει μερικές από τις ακόλουθες τοποθεσίες για υγειονομική επεξεργασία/απόθεση απορριμάτων. Ο πίνακας αναφέρει το κόστος επιλογής κάθε τοποθεσίας και τον όγκο απορριμάτων ανά εβδομάδα που μπορεί να διαχειριστεί κάθε τοποθεσία.

Ο δήμος θα διαθέσει συνολικά έως €250.000 και θέλει να μεγιστοποιήσει τον συνολικό όγκο απορριμάτων ανά εβδομάδα που μπορούν να αποθεθούν στις τοποθεσίες που θα επιλεγούν.

Τοποθεσία	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
Χωρητικότητα (m^3 /εβδομάδα)	20	17	15	15	10	8	5
Κόστος (σε 1000δες €)	145	92	70	70	84	14	47

Να διατυπώσετε ένα πρότυπο Γραμμικού Προγραμματισμού με ακέραιες μεταβλητές (στην περίπτωση αυτή πρόβλημα «σακκιδίου») το οποίο να περιγράφει το πρόβλημα και να το επιλύσετε (με την βοήθεια του IpSolve).

Πρόβλημα 6. Έστω ότι διαθέτουμε €320.000 τα οποία σκοπεύουμε να τοποθετήσουμε σε κάποιες από τις επενδύσεις οι οποίες περιγράφονται στον ακόλουθο πίνακα, που δίνει και τις χρηματοροές που προκύπτουν από τις επενδύσεις αυτές.

	Έτος 1	Έτος 2	Έτος 3	Έτος 4
Επένδυση 1	-1,00		1,18	
Επένδυση 2		-1,00		1,22
Επένδυση 3			-1,00	1,10
Επένδυση 4	-1,00	0,14	0,14	1,00
Επένδυση 5		-1,00	0,20	1,00

Πίνακας 1: Χρηματοροές

Για παράδειγμα, αν επενδύσουμε €1 στην Επένδυση 1 στην αρχή του πρώτου έτους, θα πάρουμε €1,18 στην αρχή του τρίτου έτους. Η Επένδυση 2 είναι διαθέσιμη στην αρχή του δεύτερου έτους και αποδίδει 1,22 το τέταρτο έτος. Διαθέσιμα κεφάλαια που δεν έχουν τοποθετηθεί σε μια από τις επενδύσεις στην αρχή κάποιου έτους μπορούν να τοποθετηθούν σε προθεσμιακό τραπεζικό λογαριασμό με απόδοση 3% ετησίως. Οποιαδήποτε από 5 επενδυτικά σχήματα προϋποθέτει ύψος επένδυσης τουλάχιστον €100.000.

Διατυπώστε το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης του χρηματικού ποσού για τον ορίζοντα 4ετίας ως ένα πρόβλημα Γραμμικού-Ακέραιου προγραμματισμού και επιλύστε το υπολογιστικά (R, IpSolve).