

Πρόβλημα 1. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2 + 2y^2 - x, \\g(x, y) &= x^3 + y^3 - 9xy + 27, \\h(x, y) &= 2x^3 + y^3 - 3x^2y - 6y,\end{aligned}$$

και να τα κατατάξετε σε σημεία τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, ή σαγματικά σημεία. Χρησιμοποιήστε την R για τον σχεδιασμό των ισοσταθμικών καμπυλών και σχολιάστε την ορθότητα της κατάταξης των κρίσιμων σημείων των παραπάνω συναρτήσεων.

Πρόβλημα 2. α) Να βρείτε τα δεσμευμένα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4yz$ υπό τους περιορισμούς $x + y + z = 0$ και $x + y = 1$ με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange.

β) Να βρείτε τα δεσμευμένα ακρότατα της συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$ υπό τον περιορισμό $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

γ) Να βρείτε τα δεσμευμένα ακρότατα της συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_3^2 - 3x_3x_4 + 2x_4^2$ υπό τους περιορισμούς $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ και $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.

Και στις τρεις περιπτώσεις να διερευνήσετε αν πρόκειται για σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικά.

Πρόβλημα 3. Έστω (X_1, X_2, X_3) τυχαίες μεταβλητές με πίνακα συνδιακύμανσης

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Αν (a_1, a_2, a_3) είναι ένα δεδομένο διάνυσμα και $Y := a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$ τότε

- 1.) Να προσδιορίσετε τα (a_1, a_2, a_3) έτσι ώστε η διασπορά $\text{Var}(Y)$ να είναι ελάχιστη υπό τον περιορισμό $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.
- 2.) Να προσδιορίσετε τα (a_1, a_2, a_3) έτσι ώστε η διασπορά $\text{Var}(Y)$ να είναι ελάχιστη υπό τον περιορισμό $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

Πρόβλημα 4. Ο ακόλουθος πίνακας περιγράφει την μεταβολή ενός μεγέθους y συναρτήσει του x . Θεωρούμε ότι υπάρχει μια σχέση του συνδέει τις δυο μεταβλητές της μορφής

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (1)$$

για κάποιες τιμές των συντελεστών a_0, a_1, a_2 , που προσδιορίζονται από τα εξής δεδομένα.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	2.39	3.12	4.66	5.36	5.92	4.00	5.38	6.22	6.87	7.61	7.96
x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	
y	7.11	7.86	5.31	6.74	5.70	6.52	5.05	4.69	1.84	1.94	

Η σχέση (1) δεν είναι ακριβής. Θέτουμε $y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + e_i$, $i = 0, 1, \dots, 20$, όπου $x_i = 0.2i$ και e_i είναι το αντίστοιχο σφάλμα.

- 1) Να βρείτε τα a_0, a_1, a_2 , τα οποία ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων $\sum_{i=0}^{20} e_i^2$.
- 2) Να βρείτε τα a_0, a_1, a_2 , τα οποία ελαχιστοποιούν το άθροισμα των απολύτων τιμών των σφαλμάτων $\sum_{i=0}^{20} |e_i|$.
- 3) Να βρείτε τα a_0, a_1, a_2 , τα οποία ελαχιστοποιούν το μέγιστο απόλυτο σφάλμα $\max_{0 \leq i \leq 20} |e_i|$.

Πρόβλημα 5. Μία επιχείρηση προσλαμβάνει εποχιακούς υπαλλήλους με διάρκεια σύμβασης 3 μήνες. Κατά την διάρκεια του πρώτου μήνα κάθε υπάλληλος θεωρείται εκπαιδευόμενος και συνεισφέρει 80 ώρες πραγματικής εργασίας ενώ κατά την διάρκεια του δεύτερου και τρίτου μήνα, συνεισφέρει 160 ώρες πραγματικής εργασίας ανά μήνα. Οι απαιτήσεις της εταιρείας για τους 12 μήνες δίνονται από τον εξής πίνακα.

Πίνακας 1: Ανάγκες σε ώρες για κάθε μήνα

Ιαν.	Φεβ.	Μαρ.	Απρ.	Μάιος	Ιούν.	Ιούλ.	Αύγ.	Σεπτ.	Οκτ.	Νοέμ.	Δεκ.
800	700	800	900	1000	1100	1400	1500	1200	1000	900	800

Οι υπάλληλοι προσλαμβάνονται στην αρχή κάθε μήνα. Επίσης την 1η Ιανουαρίου υπάρχουν 10 υπάλληλοι που ξεκινούν τον δεύτερο μήνα εργασίας και 20 υπάλληλοι που ξεκινούν τον τρίτο μήνα εργασίας. Να ευρεθεί ο ελάχιστος αριθμός υπαλλήλων που πρέπει να προσληφθούν κατά την διάρκεια του χρόνου έτσι ώστε:

- α) Να ικανοποιούνται οι ανάγκες σε ώρες ανά μήνα όπως περιγράφονται στον πίνακα.
- β) Σε κάθε μήνα ο αριθμός των υπαλλήλων που είναι στον πρώτο μήνα εργασίας τους (και επομένως είναι εκπαιδευόμενοι) δεν υπερβαίνει το 40% του συνολικού αριθμού υπαλλήλων που εργάζονται εκείνο τον μήνα.

- γ) ο αριθμός των υπαλλήλων που ξεκινούν τον δεύτερο μήνα εργασίας τους την 1η Ιανουαρίου του επομένου έτους να είναι περισσότεροι από 10.
- δ) ο αριθμός των υπαλλήλων που ξεκινούν τον τρίτο μήνα εργασίας τους την 1η Ιανουαρίου του επομένου έτους να είναι περισσότεροι από 15.