

Θεωρία Μετρου, Φυλλάδιο Ασκήσεων

Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Παραδώστε 4 ασκήσεις της επιλογής σας την Τρίτη 8 Ιανουαρίου 2019 (παράδοση μέχρι τις 15.00 στο εργαστήριο Στατιστικής στην Αντωνιάδου)

1. Δείξτε το λήμμα Borel-Cantelli σύμφωνα με το οποίο αν $\sum_n \mu(A_n) < \infty$ ισχύει ότι $\mu(\limsup_n A) = 0$.
2. Δείξτε ότι αν $\mu_2 \ll \mu_1$ τότε $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall A \in \mathcal{F}, \mu_1(A) < \delta$, συνεπάγεται $\mu_2(A) < \epsilon$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την εις άτοπον απαγωγή έτσι ώστε μπορείτε να βρείτε $\epsilon > 0$ και συνολα A_n με $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ αλλά $\mu_2(A_n) > \epsilon$. Μετά κατασκευάσετε το σύνολο $A = \limsup_n A_n$ κ.ο.κ. ...)
3. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα Radon-Nikodym για την κατασκευή της δεσμευμένης μέσης τιμής $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ για μια $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ τυχαία μεταβλητή X , όπου $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ και αποδειξτε τις ιδιότητες της απο αυτή την κατασκευή.
4. Δείξτε ότι αν $\mu_2 \ll \mu_1$ τότε $\int_A f d\mu_2 = \int_A f \frac{d\mu_2}{d\mu_1} d\mu_1$, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f .
5. Δείξτε ότι για την παράγωγο Radon-Nikodym ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας $\frac{d\mu_3}{d\mu_1} = \frac{d\mu_3}{d\mu_2} \frac{d\mu_2}{d\mu_1}$, εφόσον οι αντίστοιχες ποσότητες είναι καλά ορισμένες.
6. Αν έχουμε δυο κατανομές πιθανοτήτων μ_1 και μ_2 με πυκνότητες $f_1 > 0$ και $f_2 > 0$ αντιστοίχως βρείτε την παράγωγο Radon-Nikodym $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$.
7. Χρησιμοποιώντας την παράγωγο Radon-Nikodym περιγράψτε ένα σχημα προσομοίωσης για τον υπολογισμό της ποσότητας $P(X > a)$ για $a > 5$ αν $X \sim N(0, 1)$.
8. Δείξτε ότι ο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση.
9. Αν $X_i \sim Exp(1)$ ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες υπολογίστε την ποσότητα $\mathbb{E}[X_{10} | \sigma(\sum_{i=1}^{100} X_i)]$.
- 10.