Θεωρία μέτρου και πιθανότητων, Φυλλάδιο Ασκησεων 1
Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

1. Δίνεται το σύνολο $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι είναι μηδενοσυνολο ως προς το μέτρο Lebesgue.

2. Αν N_n μηδενοσύνολα για το μετρο μ τότε υπολογισετε το $\mu(\bigcup_n N_n)$.

3. Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ένας χώρος με μέτρο. Αν $A \subset X$ μηδενοσύνολο, τότε το A αποκλείεται να είναι πυκνό στο X. Σωστό ή λάθος και γιατί.

4. Αν μ^* και μ είναι το εξωτερικό και το μετρο Lebegue αντιστοίχως, δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και $A \subset \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό σύνολο O τέτοιο ώστε $O \subset A$ και $\mu(O) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. Με βάση αυτό δείξετε ότι για κάθε $E \in \mathcal{M}$ μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό σύνολο O που περιέχει το E τέτοιο ώστε $\mu(O \setminus E) < \epsilon$.

5. Στο ίδιο πλαίσιο όπως στο προηγούμενο δείξτε ότι για καθε $A \subset \mathbb{R}$ υπάρχει μια ακολουθία ανοιχτών συνολων O_n τέτοια ώστε $A \subset \bigcap_n O_n$ και $\mu(\bigcap_n O_n) = \mu^*(A)$.

6. Δείξτε ότι τα συνολα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ είναι συνολα Borel.

7. Δείξτε ότι την άλγεβρα Borel μπορούμε να την ορίσουμε ισοδύναμα σαν την σ-άλγεβρα που παράγεται απο τα διαστήματα την μορφής $[a, b)$.

8. Θεωρειστε μ το μετρο Lebesgue επάνω στο $\mathbb{R}$. Αν N μηδενοσυνολο δείξτε ότι το N^c είναι πυκνό στον $\mathbb{R}$.

9. Αν μ^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue , για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ κατασκευάστε ένα ανοιχτό συνολο O το οποίο να περιέχει το $\mathbb{Q}$ και να ικανοποιεί την συνθήκη $\mu^*(O) \leq \epsilon$.

10. Θεωρείστε το $\mathbb{R}$ και το εξωτερικό μετρο Lebesgue . Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε για οποιοαδήποτε μετρήσιμο συνολο $E \subset (a, b)$ έχουμε ότι $\mu^*(f(E)) \leq M \, \mu^*(E)$.

11. Αν E μετρήσιμο κατά Lebesgue με $\mu(E) < \infty$, μποορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $\phi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής: $\phi_E(x) = \mu(E \cap (-\infty, x])$ για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συναρτηση αυτή είναι αυξουσα και συνεχής κατά Lipschitz.

12. Γράψτε τις δεικτριες συναρτήσεις των συνόλων $A \cap B$, $A \cup B$, A^c,$A \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \Delta B$ συναρτήσει των δεικτριών των A, B, C.

13. Δείξτε επαγωγικά ότι $\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left(\sum_{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_i \leq n} \mathbf{1}_{A_{\ell_1} \cap \cdots \cap A_{\ell_i}} \right)$ και απο εκεί συνάγετε τις ανισότητες Bonferroni για το $\mu(\cup_{i=1}^n A_i)$.

14. Δίνεται η ακολουθία συνολων $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ με $A_{2m} = A$ και $A_{2m+1} = B$. Υπολογίστε τα $\limsup_n A_n$ και $\liminf_n A_n$. Πότε υπάρχει το όριο $\lim_n A_n$;

15. Για την ακολουθία συνόλων $A_{2m} = (0, 3 + \frac{1}{3m})$ και $A_{2m+1} = (-1 - \frac{1}{3m}, 2]$ βρείτε τα $\limsup_n A_n$ και $\liminf_n A_n$.

16. Δειξτε ότι μια μονότονη συναρτηση στους πραγματικούς αριθμούς είναι μετρήσιμη.

17. Δειξτε οτι αν μια συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ειναι παραγωγίσιμη τότε η συναρτηση f' είναι μετρήσιμη κατα Borel.

18. Έστω $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = \{\omega_j \ : \ j \in \mathbb{N}\}, \ \omega_j \in \{0, 1\}\}$ και θεωρειστε την σ-άλγεβρα επάνω στο Ω, της μορφής $\mathcal{F} = \sigma(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_j = \epsilon_j\}, \ j \in \mathbb{N}, \ \epsilon_j \in \{0, 1\}\}$ (η σ-άλγεβρα που παράγεται απο πεπερασμένα κυλινδρικα σύνολα). Για οποιαδήποτε $j, n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις τυχαιες μεταβλητές $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$, με $X_j(\omega) = \omega_j$, και $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ με $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n X_j(\omega)$. Δείξτε ότι το γεγονός $B := \{\omega \in \Omega \ : \ \lim_{n \to \infty} n^{-1} S_n(\omega), \ \text{υπάρχει}\}$ είναι μετρήσιμο ως προς την $\mathcal{F}$.