

Φυλλάδιο 5

1. (Άσκηση 2.1.2 από Strang)

Ποια από τα επόμενα υποσύνολα του \mathbb{R}^3 είναι πράγματι υπόχωροι;

- Το επίπεδο των διανυσμάτων με πρώτη συνιστώσα $b_1 = 0$.
- Το επίπεδο των διανυσμάτων b με $b_1 = 1$.
- Τα διανύσματα b με $b_1 \cdot b_2 = 0$ (αυτή είναι η ένωση δύο υποχώρων του επιπέδου $b_1 = 0$ με $b_2 = 0$).
- Το μεμονωμένο διάνυσμα $b = (0,0,0)$.
- Όλοι οι συνδυασμοί των δυο διανυσμάτων $x = (1,1,0)$ και $y = (2,0,1)$.
- Τα διανύσματα (b_1, b_2, b_3) που ικανοποιούν την $b_3 - b_2 + 3 \cdot b_1 = 0$.

2. (Άσκηση 2.2.4 από Strang)

Προσδιορίστε την κλιμακωτή μορφή U , τις βασικές μεταβλητές, τις ελεύθερες μεταβλητές καθώς και τη

γενική λύση του $A \cdot x = 0$ για τον $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, Κατόπιν εφαρμόστε απαλοιφή στην $A \cdot x = b$,

με συνιστώσες b_1 και b_2 στη δεξιά πλευρά και βρείτε τις συνθήκες έτσι ώστε το $A \cdot x = b$ να είναι συμβιβαστό (δηλαδή να έχει λύση) καθώς και τη γενική λύση στην ίδια μορφή μ'αυτή της εξίσωσης (3). Ποια είναι η τάξη του A ;

3. (Άσκηση 2.2.6 από Strang)

Γράψτε τη γενική λύση του

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

σαν άθροισμα μιας ειδικής λύσης του $A \cdot x = b$ και της γενικής λύσης του $A \cdot x = 0$, όπως στην (3).

4. (Άσκηση 2.2.9 από Strang)

Υπό ποιες συνθήκες για τα b_1 και b_2 (εφόσον χρειάζονται) έχει το $A \cdot x = b$ λύση, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};$$

Βρείτε δυο διανύσματα x στον μηδενόχωρο του A καθώς και τη γενική λύση του $A \cdot x = b$.

5. (Άσκηση 2.1.3 από Strang)

Περιγράψτε τον χώρο στηλών και τον μηδενόχωρο των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. (Άσκηση 2.2.3 από Strang)

Υπολογίστε την παραγοντοποίηση LU για τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προσδιορίστε ένα σύνολο βασικών μεταβλητών και ένα σύνολο ελεύθερων μεταβλητών και βρείτε τη γενική λύση του $Ax = 0$. Γράψτε την σε μια μορφή παρόμοια της (1). Ποια είναι η τάξη του A;