ΓΡΑΜΜΙΚΗ 1

TUTORIAL 4

1. Έστω $A=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&1&1&0\\0&3&-2&-2\end{bmatrix}$, και $B=\begin{bmatrix}1&0&1&3\\-2&1&0&1\\6&2&3&0\\8&0&1&1\end{bmatrix}$ και $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

a) Να υπολογιστούν τα $A\cdot B,\ A\cdot x,\ x^{T}\cdot B$.

b) Να βρεθεί πίνακας E_1 τέτοιος ώστε το $E_1\cdot x$ να προσθέτει το 3-πλάσιο της δεύτερης συντεταγμένης του x στην τρίτη. Πώς διαφέρει ο $E_1\cdot B$ από τον B;

c) Να βρεθεί πίνακας E_2 τέτοιος ώστε το $E_2\cdot x$ να προσθέτει το 4-πλάσιο της δεύτερης συντεταγμένης του x στην τέταρτη. Πώς διαφέρει ο $E_2\cdot B$ από τον B;

d) Υπολογίστε τον $E=E_2\cdot E_1$. Πώς διαφέρει το $E\cdot x$ από το x; Και πώς ο $E\cdot B$ από τον B.

2. (Άσκηση 1.4.11 από Strang) Αληθές ή ψευδές; Δώστε αντιπαράδειγμα όταν είναι ψευδές.

e) Εάν η πρώτη και τρίτη στήλη του B είναι ίδιες τότε το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και τρίτη στήλη του $A\cdot B$.

f) Εάν η πρώτη και τρίτη γραμμή του B είναι ίδιες τότε το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και τρίτη γραμμή του $A\cdot B$.

g) Εάν η πρώτη και τρίτη γραμμή του A είναι ίδιες τότε το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και τρίτη γραμμή του $A\cdot B$.

h) $(A\cdot B)^2=A^2\cdot B^2$.

3. (Άσκηση 1.4.12 από Strang) Η πρώτη γραμμή του $A\cdot B$ είναι γραμμικός συνδιασμός όλων των γραμμών του B. Ποιοί είναι οι συντελεστές αυτού του συνδιασμού και ποιά η πρώτη γραμμή του $A\cdot B$ αν

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&-1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix};$$

4. (Άσκηση 1.4.19 από Strang) Ποιοί από τους επόμενους πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με $(A+B)^2$;
$(B+A)^2,\ A^2+2\cdot A\cdot B+B^2,\ A\cdot(A+B)+B\cdot(A+B),\ (A+B)\cdot(B+A),\ \ A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2$.

5. Έστω $K=m\left\{\begin{bmatrix}\underbrace{A_{m\times n}}_{n} & \Big| & \underbrace{B_{m\times q}}_{q}\end{bmatrix}\right.$, $L=\begin{matrix}r\{\\ s\{\end{matrix}\begin{bmatrix}C_{r\times p}\\ \hline \underbrace{D_{s\times p}}_{p}\end{bmatrix}$, $x=\begin{matrix}n\{\\ q\{\end{matrix}\begin{bmatrix}z_{n\times 1}\\ \hline \underbrace{w_{q\times 1}}_{1}\end{bmatrix}$, και $y=p\left\{\begin{bmatrix}y_{p\times 1}\end{bmatrix}\right.$. Να υπολογισθούν τα $K\cdot x$ και $L\cdot y$ ώς συνάρτηση γινομένων των πινάκων A,B,C,D με τα z,w,y.

6. (Άσκηση 1.4.21 από Strang) Υπάρχει ένας τέταρτος τρόπος να δούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων σαν στήλες επί γραμμές. Εάν οι στήλες του A είναι $c_1,\dots,c_n$ και οι γραμμές του B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1,\dots,r_n$, τότε $c_1\cdot r_1$ είναι ένας πίνακας και $A\cdot B=c_1\cdot r_1+\dots+c_n\cdot r_n$.

i) Δώστε ένα παράδειγμα 2 επί 2 αυτού του κανόνα του πολλπλασιασμού.

j) Εξηγήστε γιατί η δεξιά πλευρά δίνει τη σωστή τιμή $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$ για το στοιχείο $(A\cdot B)_{ij}$.