2ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Δίνεται το σύνολο

$$A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}\}$$

   Ποιό είναι το sup, inf, max, min ;
2. Όμοια για το σύνολο

$$A = \{\frac{2n+1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

3. Δείξτε ότι το supremum του συνόλου $A = (a, b]$ είναι το b.
4. $\star$ Έστω A και B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ας ορίσουμε το σύνολο

$$A + B = \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

   Ποιο το $\sup(A + B)$;
5. Δείξτε ότι $\sup(-A) = -\inf(A)$
6. Έστω $X, Y \subset \mathbb{R}$ με $X \subset Y$ Συγκρίνετε τα α) $\sup X$ και $\sup Y$ καθώς και τα β) $\inf X$ και $\inf Y$
7. Να βρεθούν το sup και το inf του συνόλου $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |x+1| < 2\}$
8. Το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός
9. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε υπάρχει άρρητος γ τέτοιο ώστε α<γ<b
10. Αν $X, Y \subset \mathbb{R}$ μη κενά φραγμένα, ΝΔΟ $\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$
11. Έστω Α,Β φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\sup A = \inf B$. ΝΔΟ $\exists a \in A$ και $b \in B : b - a < \frac{1}{10}$
12. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $0 \notin A$ και $\inf A = 0$ και ότι το σύνολο Α δεν είναι φραγμένο. Ορίζουμε το σύνολο Β $B = \left\{ \frac{3x}{3x+1} : x \in A \right\}$ ΝΔΟ α) $\inf B = 0$ και $\sup B = 1$, β) Έχει το Β max, min;

14. $\star$ Δείξτε ότι σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ 0 < x \ < \sqrt{2}\}$ δεν έχει supremum

15. $\star$ Δείξτε οτι αν $\epsilon >$ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $N > \epsilon$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την εις άτοπον απαγωγή και το βασικό αξίωμα σχετικα με την ύπαρξη supremum)).

16. $\star$ Χρησιμοποιώντας την παραπάνω δειξτε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $a < r < b$. (Υποδειξη: Ξωρις βλάβη της γενικότητας υποθέστε ότι $0 < a < b$. Εφαρμόστε μια φορά την παραπάνω για την επιλογή $\epsilon = \frac{1}{b-a}$ και βρείτε τον αντίστοιχο φυσικό αριθμό M, και μια δευτερη φορά για την επιλογή $\epsilon = bM$ και βρειτε τον φυσικό αριθμό K. Μετά μελετήστε το σύνολο $S = \{k \in \mathbb{N} \ : \ k > bM, \ k \in \mathbb{N}\}$.)