

5^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Δείξτε ότι αν $\sum_n a_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά θετικών αριθμών και b_n φραγμένη ακολουθία η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει.
2. * Δείξτε ότι αν μια σειρά πραγματικών αριθμών συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει.
3. * Δίνεται η σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$, όπου a_k ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 9. Δείξτε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει και το άθροισμα είναι μικρότερο του $1/10^{m-1}$.
4. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών (α) $\sum n x^n$, (β) $\sum n^2 x^n$, (γ) $\sum \frac{x^n}{n^n}$. Δίνεται ότι $n^{1/n} \rightarrow 1$.
5. * Δείξτε ότι αν $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ μια οποιαδήποτε 1-1 απεικόνιση, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ αποκλίνει.
6. Υπολογίστε, αν υπάρχουν τα όρια των παρακάτω σειρών:
 - (1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$
 - (2) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$
7. * Έστω $\{a_n\}, \{b_n\}$ θετικές ακολουθίες τέτοιες ώστε $b_n = \frac{1}{1+n^2 a_n}$ για κάθε n . Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε θα αποκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
8. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:
 - (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$
 - (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
 - (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
 - (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$
9. ΝΔΟ αν η διπλή σειρά $\sum_{n,m} a_{n,m}$ συγκλίνει τότε $\lim_{n,m \rightarrow \infty} a_{n,m} = 0$
10. ΝΔΟ η διπλή σειρά $\sum_{n,m} a^n b^m$, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ είναι συγκλίνουσα.