Εισαγωγή στην πραγματική ανάλυση

12ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων f_n που ορίζεται απο τον τύπο $f_n(x) = \frac{n\,x+x^2}{n^2}$ συγκλίνει σημειακά και βρείτε το όριο.
2. Δείξτε οτι η ακολουθία συναρτήσεων f_n που ορίζεται απο τον τύπο $f_n(x) = \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$ συγκλίνει σημειακά και βρείτε το όριο.
3. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων f_n που ορίζεται απο τον τύπο
$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 & \text{αν} \quad 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1}$$
συγκλίνει σημειακά και βρείτε το όριο.
4. Δείξτε ότι η ακολουθία f_n, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ συγκλίνει σημειακά στην συνάρτηση $f = 0$ αλλά όχι ομοιόμορφα.
5. Δείξτε οτι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.
6. Δείξτε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση μας επιτρέπει να εναλλάξουμε την ολοκλήρωση με το όριο.
7. Αν $sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ βρειτε τα ολοκληρώματα και τις παραγώγους αυτών των συναρτήσεων δικαιολογώντας το γιατί επιτρέπεται να κάνετε ότι κάνετε.