ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

11^{ο} ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Έστω ο μ.χ. (M,d) και έστω οι συγκλίνουσες $\{x_n\}, \{y_n\}$ με $x_n \to x,\ y_n \to y$. ΝΔΟ $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$

2. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. ΝΔΟ α) η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση και β) ικανοποιεί την ανισότητα

   $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$

3. Έστω ο μ.χ. (X, ρ). ΝΔΟ:

   α) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y)\quad \forall\, x,y,z \in X.$

   b) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \le \rho(x,z) + \rho(y,w)\quad \forall\, x,y,z,w \in X.$

4. ΝΔΟ στον $\mathbb{R}^n$ $\forall\, p \ge 1$ η $d_p\left((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ είναι μετρική.

5. ΝΔΟ ο $M = \mathbb{R}^d$ εφοδιασμένος με την Ευκλείδια απόσταση είναι μ.χ.

6. Έστω $C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$ όπου f συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε για $f, g \in C([0,1])$ την

   $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ως $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx.$ ΝΔΟ η d είναι μια μετρική στο $C([0,1])$.

7. ΝΔΟ μια συγκλίνουσα ακολουθία σ'ένα μ.χ. είναι Cauchy.

8. Έστω ο μ.χ. (M,d) και έστω η συγκλίνουσα $\{x_n\}$ ακολουθία στον M. Αν η $\{x_n\}$ είναι Cauchy και έχει

   συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.

9. Έστω ο μ.χ. (X,d) και έστω η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον μ.χ. ώστε οι υπακολουθίες

   $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{x_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν. ΝΔΟ η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.