

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

10^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Δείξτε ότι αν $f_1, f_2 \in BV([a, b])$ τότε $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in BV([a, b])$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. Έστω $C([a, b])$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$, $C^1([a, b])$ το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$ και $BV([a, b])$ το σύνολο των συναρτήσεων πεπερασμένης μεταβολής στο $[a, b]$.
Σωστό ή λάθος και γιατί;
 - (α') $(C([a, b]) \cap C^1([a, b])) \subset BV([a, b])$
 - (β') $C([a, b]) \subset BV([a, b])$
 - (γ') $(C([a, b]) \cup C^1([a, b])) \subset BV([a, b])$
3. Είναι η συνάρτηση $g(x) = |x|$ πεπερασμένης μεταβολής σε ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a, b]$ και γιατί;
4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_{-1}^1 x^3 d|x|$
5. Μία συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να ικανοποιεί την ιδιότητα Lipschitz σε ένα σημείο αλλά να μην είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Δείξτε το αυτό παίρνοντας σαν παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο σημείο $x = 0$.
6. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $x = x_0$ τότε ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz.
7. Αν $g(x) = x^2$, $x \in [-2, 1]$ υπολογίστε την $V_{[-2,1]}(g)$. Υπολογίστε επίσης την συνάρτηση $V(x) = V_{[-2,x]}(g)$.
8. Αν η $g(x)$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz δείξτε ότι είναι πεπερασμένης μεταβολής.
9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

a) $\int_1^5 x^2 d(x^2)$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x)$

c) $\int_0^3 [x] d(x^2)$

10. Έστω $f(x) = e^x$ και $G(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1+2x & 1 \leq x < 2 \\ 5+x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Να υπολογίσετε το $\int_0^3 f dG$

11. Έστω $f(x) = x^2 + 3$ και $G(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1+x^3 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f dG$

12. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_{-1}^1 \sin x d|x|^3$

13. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_0^4 \left(e^{\sqrt{x}} + x^2 \right) d\sqrt{x}$