

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

9^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Έστω $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{για } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$ και $a = x^2$. Δώστε ένα παράδειγμα μιας διαμέρισης P του $[0,1]$

έτσι ώστε $U(f, a, P) - L(f, a, P) < \frac{1}{4}$ ή ΝΔΟ τέτοιο παράδειγμα δεν υπάρχει.

2.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $\int_0^3 \sqrt{x} dx^3$

(β) $\int_1^4 (x - [x]) dx^2$

(γ) $\int_0^2 x^2 dx^2$

(δ) $\int_0^2 [x] dx^2$

3. Έστω $f(x) = x$, και $g(x) = x + [x]$. Να υπολογίσετε το $\int_0^{10} f(x) dg(x)$
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes $\int_0^{\pi} x d \cos x$
5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes $\int_0^{\pi} (x+1) d(\sin x + \cos x)$
6. Δείξτε ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς την g (μονότονη) στο $[a, b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε υποδιάστημα του. (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του Riemann)
7. Είναι μια συναρτηση f η οποία είναι Hölder ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς μια μονοτονη συνάρτηση;
8. Δείξτε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς μια μονοτονη συνάρτηση
9. Έστω $F : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = |x|$ και $f(x) = F'(x)$. Είναι η συναρτηση f ολοκληρώσιμη ως προς την $g(x) = x$;