ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

8ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με f αύξουσα. Αν P_1, P_2 είναι 2 διαμερίσεις του $[a, b]$ με $P_1 \subset P_2$ ποία ειναι η σχέση μεταξύ των $L(f, g, P_1)$ και $L(f, g, P_2)$ και μεταξύ των $U(f, g, P_1)$ και $U(f, g, P_2)$.

2. Δίνονται οι διαμερίσεις του $[0, 1]$, $P_n = \{x_j = \frac{j-1}{n} \ \ j = 1, \cdots, n-1\}$ και $P_m = \{x_j = \frac{j-1}{m} \ \ j = 1, \cdots, m-1\}$. Ποιά συνθήκη θα πρέπει να ικανοποιούν τα n, n για να ισχύει $P_n \subset P_m$.

3. Αν g είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαιας μεταβλητής τύπου Bernoulli υπολογίστε τα ολοκληρώματα Stieltjes $\int_{-10}^{10} f dg$ για τις περιπτώσεις οπου (α) $f(x) = x$ και (β) $f(x) = x^2$.

4. Ψπάρχει το ολοκληρώμα $\int_0^{10} [x] dx$ ναι ή όχι και γιατί; Αν υπάρχει υπολογίστε το.

5. Δείξτε ότι $U(f_1 + f_2, g, P) = U(f_1, g, P) + U(f_2, g, P)$ και όμοια για το L.

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Τότε, αν $P_v = \{x_0, x_1, ..., x_v\}$ είναι μια τυχούσα διαμέριση του $[a,b]$, ισχύει $M_i = m_i = c$, ΝΔΟ $\int_a^b f dx = c(b-a)$

7. Έστω η συνάρτηση $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = \begin{cases} 7, & \text{αν } 1 \le x < 2 \\ 10, & \text{αν } x=2 \\ -4, & \text{αν } 2 < x \le 3 \end{cases}$

   ΝΔΟ η f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[1,3]$

8. Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } a \le x < b \\ 3, & \text{αν } x=b \end{cases}$

   ΝΔΟ η f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$

9. ΝΔΟ η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = x^2$

   είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$

10. Να υπολογιστούν τα α) $\int_1^4 x^2 dx$, β) $\int_0^1 a^x dx$ και γ) $\int_0^1 e^x dx$ με την χρήση του ορισμού:

    $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P) \to \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ όπου $\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, ..., n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, P είναι

διαμέριση του $[a,b]$. $\qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$

11. Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες ΝΔΟ αν f συνεχής και αύξουσα στο $[a,b]$

    τότε $\int_a^b f\, df = \dfrac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}$