

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

7^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

- 1) Δείξτε ότι μια Hölder συνεχής συνάρτηση είναι και ομοιόμορφα συνεχής.
- 2) ΝΔΟ αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, είναι ομοιόμορφα συνεχής
- 3) Δείξτε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- 4) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. ΝΔΟ η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής
- 5) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Υποθέτουμε ότι $\exists c > 0 : f(x) > c \ \forall x$. ΝΔΟ η $\frac{1}{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
- 6) Είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ συνεχής; Τι έχετε να πείτε για την παράγωγο της;
- 7) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση : $x \leq f(x) \leq x + x^2 \ \forall x$. ΝΔΟ η f παραγωγίσιμη στο 0 και να υπολογίσετε την $f'(0)$
- 8) Έστω f ορισμένη και παραγωγίσιμη $\forall x > 0$ και $f'(x) \geq 0$ καθώς το $x \rightarrow \infty$. Θέτω $g(x) = f(x+1) - f(x)$. ΝΔΟ η $g(x) \geq 0$ καθώς το $x \rightarrow \infty$.
- 9) Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι αύξουσα. ΝΔΟ η $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$, είναι αύξουσα.
- 10) Δείξτε την συνέχεια της συνάρτησης $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό.
- 11) ΝΔΟ αν για μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$ για $x_1 < x_2$ και η f είναι συνεχής, τότε θα είναι και αυστηρά μονότονη.