Π Ι Θ Α Ν Ο Τ Η Τ Ε Σ

Αξιώματα του Kolmogorov

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και έστω $\boldsymbol{B}$ το σύνολο όλων των ενδεχομένων του S.
Ορίζουμε ως **συνάρτηση πιθανότητας** μια συνάρτηση P:

P: $\boldsymbol{B} \to R$

η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

i. $P(A) \geq 0$

ii. $P(S) = 1$

iii. $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$

Βασικά Θεωρήματα Πιθανοτήτων

Θεώρημα 1 Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$.

Θεώρημα 2 Ισχύει ότι: $P(\varnothing) = 0$

Θεώρημα 3 Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A) \leq 1$.

Θεώρημα 4 Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A_1 και A_2 ισχύει ότι:

$$P\ (A_1 \cup A_2) = P\ (A_1) + P\ (A_2) - P\ (A_1 \cap A_2)$$

- Το θεώρημα 4 γενικεύεται για την περίπτωση n ενδεχομένων.
  Στην περίπτωση που $n=3$ γίνεται:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

- Για δύο ενδεχόμενα τα οποία είναι ασυμβίβαστα το θεώρημα 4 οδηγεί στο συμπέρασμα

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2),\ \ A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

  το οποίο είναι ειδική περίπτωση του 3ου αξιώματος.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

$$P\left(A_1 \middle| A_2\right) = \frac{P\left(A_1 \cap A_2\right)}{P\left(A_2\right)}, P\left(A_2\right) > 0$$

$$P\left(A_2 \middle| A_1\right) = \frac{P\left(A_1 \cap A_2\right)}{P\left(A_1\right)}, P\left(A_1\right) > 0$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

- *2 ενδεχόμενα A_1, A_2 είναι ανεξάρτητα αν ισχύει:* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$
- *3 ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα αν ισχύει:*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{aligned}$$

- *n ενδεχόμενα A_1, A_2, ..., A_n είναι ανεξάρτητα αν για κάθε συνδυασμό 2 ή περισσοτέρων από αυτά ισχύει:*

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n.$$

Ενδεχόμενα Ανεξάρτητα κατά Ζεύγη

Τα ενδεχόμενα A_1, A_2, ..., A_n λέγονται ανεξάρτητα κατά ζεύγη αν ισχύει:

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P\left(A_i\right)P\left(A_j\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Προφανώς, n ενδεχόμενα μπορεί να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη χωρίς να είναι ανεξάρτητα.

Κανόνας Πολλαπλασιασμού Πιθανοτήτων

- *Για 2 ενδεχόμενα:*

$$P(A_1 \cap A_2) = P\left(A_1\right) P(A_2 | A_1) = P(A_2) P(A_1 | A_2)$$

- *Για 3 ενδεχόμενα:*

$$P\left[A_1 \cap A_2 \cap A_3\right] = P\left[A_1\right] P\left[A_2 \middle| A_1\right] P\left[A_3 \middle| A_1 \cap A_2\right].$$

- *Για n ενδεχόμενα:*

$$P\left[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right] = P\left[A_1\right] P\left[A_2 \middle| A_1\right] P\left[A_3 \middle| A_1 \cap A_2\right] \ldots P\left[A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right]$$

Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας

Έστω ότι $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι μία διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E έχουμε ότι,

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(E|A_i).$$

Θεώρημα του Bayes

Έστω $A_1, A_2, ..., A_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E με $P(E) > 0$ έχουμε ότι,

$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E|A_i)}$$

$$= \frac{P(A_k)P(E|A_k)}{P(E)}$$

ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Μεταθέσεις

$P_n = n!$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Διατάξεις

$${}_{n}P_{x} = P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Επαναληπτικές Διατάξεις

n^x

Συνδυασμοί

$${}_{n}C_{x} = C(n,x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$