

Πιθανότητες II

Tutorial 5: 2d Συνεχείς τ.μ.

1)

Η τιμή X (σε ευρώ) και οι ετήσιες πωλήσεις Y (σε δεκάδες χιλιάδες τεμάχια) ενός προϊόντος είναι συνεχείς τ.μ. με από κοινού σ.π. της διδιάστατης τ.μ. (X, Y) που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} 5xe^{-xy}, & 0.2 < x < 0.4 \wedge y > 0 \\ 0 & \text{άλλου} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος ετήσιος τζίρος της επιχείρησης που πωλεί το συγκεκριμένο προϊόν

2)

Η από κοινού σ.π. της διδιάστατης συνεχούς δ.τ.μ. (X, Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, & 0 < x, y < \infty \\ 0 & \text{άλλου} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(X | Y = y)$, όπου $y > 0$.

3)

Η από κοινού σ.π. της διδιάστατης συνεχούς δ.τ.μ. (X, Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{άλλου} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X|Y}(x|y)$ και $f_{Y|X}(y|x)$.

(β) Να υπολογιστούν οι ποσότητες $E\left[X | Y = \frac{1}{2}\right]$ και $E\left[Y | X = \frac{1}{3}\right]$.

4)

Η από κοινού σ.π. των τ.μ. (X, Y) που δηλώνουν το ποσοστό των σωστών διαγνώσεων ενός γιατρού για 2 διαφορετικές ασθένειες α, β αντίστοιχα δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x+2y), & x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί

(α) το αναμενόμενο ποσοστό σωστών διαγνώσεων του γιατρού για την ασθένεια α και το αναμενόμενο ποσοστό σωστών διαγνώσεων του γιατρού για την ασθένεια β .

(β) Η πιθανότητα να διαγνώσει σωστά ο γιατρός σε λιγότερες από 25% των περιπτώσεων την ασθένεια α , αν γνωρίζουμε ότι το ποσοστό των ορθών διαγνώσεων του ίδιου για την ασθένεια β είναι ακριβώς 25%.

(γ) το αναμενόμενο ποσοστό σωστών διαγνώσεων του γιατρού για την ασθένεια α , αν είναι γνωστό ότι το ποσοστό των ορθών διαγνώσεων του ίδιου για την ασθένεια β είναι ακριβώς 25%.

5)

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X, Y) δίνεται

από τον τύπο $f(x, y) = \frac{3x(x+y)}{5}, 0 < x < 1, 0 < y < 2$ και $f(x, y) = 0$, αλλού.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2\right)$.

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x), f_Y(y)$.

(γ) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$.

(δ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών $F_X(x), F_Y(y)$.

6)

Η από κοινού σ.π. της διδιάστατης τ.μ. (X, Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x < 1 \wedge x^2 \leq y < x \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right), P\left(\frac{1}{4} < Y < \frac{3}{4}\right), P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}, Y < \frac{1}{2}\right), P(X+Y \leq 1)$