

# Πιθανότητες II

## Tutorial 6

1)

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μιας διδιάστατης διακριτής διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής  $(X, Y)$  δίνεται από τον τύπο  $p(x, y) = \frac{1}{15}(x + y)$ ,  $x = 0, 1, 2$  και  $y = 1, 2$ . Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές  $E[X | Y = 1]$ ,  $E[Y | X = 1]$  και να συγκριθούν μεταξύ τους.

2)

Έστω  $X, Y, Z$  τρεις ανεξάρτητες τ.μ. και κάθε μια ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή  $\lambda$ .

Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ.  $U = X + Y$  και  $W = Y + Z$ .

3)

Αν για τις τ.μ.  $X, Y$  είναι γνωστό ότι  $E(X) = 4$ ,  $Var(X) = 4$ ,  $E(Y) = 2$ ,  $Var(Y) = 9$ ,  $\rho_{x,y} = \frac{5}{6}$

Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$E(X^2)$ ,  $Cov(X, Y)$ ,  $E(XY)$ ,  $Cov(2X + 3, 1 - Y)$ ,  $Var(X + Y)$ ,  $Var(3X - Y)$ ,  $Cov(2X, X + Y)$

4)

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $(X, Y)$  δίνεται από τον τύπο  $f(x, y) = 1$ , αν  $0 < x, y < 1$  και  $f(x, y) = 0$ , διαφορετικά.

(α) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$  και  $XY$ .

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή  $E(X^2 + Y^2)$ .

(γ) Να υπολογιστούν αρχικά οι πιθανότητες  $P(X + Y < 0.5)$ ,  $P(0.5 \leq X + Y < 1)$  και  $P(X + Y \geq 1)$  και να βρεθεί στη συνέχεια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $Z$ , όπου  $Z = 0$ , αν  $X + Y < 0.5$ ,  $Z = 1$ , αν  $0.5 \leq X + Y < 1$  και  $Z = 2$ , αν  $X + Y \geq 1$ .

5)

Η από κοινού σ.π. της διδιάστατης τ.μ.  $(X, Y)$  δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x < 1 \wedge x^2 \leq y < x \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:  $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$ ,  $P\left(\frac{1}{4} < Y < \frac{3}{4}\right)$

6)

Οι διαστάσεις  $X$  και  $Y$  ενός ορθογωνίου αγρού είναι συνεχείς τ.μ. με από κοινού σ.π. της διδιάστατης τ.μ.  $(X, Y)$  που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Αφού υπολογιστούν αρχικά οι ποσότητες  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(X^2)$ ,  $E(Y^2)$ ,  $E(XY)$ ,  $E(X^2Y^2)$ , να βρεθεί στη συνέχεια η μέση τιμή και η διακύμανση της περιμέτρου και του εμβαδού του αγρού.