

Φροντιστήριο 5^ο

1) Να δείξετε με τη χρήση του ορισμού του ορίου ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x+2y) = 7, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x, y) = \left(\frac{x-y}{x+y}, \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^4} \right)$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

3) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^5 + y^3}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ (πολικές+ε-δ)

4) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^4) \ln(x^2 + y^4)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{(x+y) + \sin(x+y)}{(x+y) - \sin(x+y)}$

5) Να βρεθεί το όριο $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ (σφαιρικές)

6) Να βρεθούν τα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2 + x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$ (επάλληλα όρια)

7) Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπο

$$f(x, y) = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right), \text{ αν } (x, y) \neq (0, 0), \quad h(x, y) = \frac{4xy^2}{(x + y^2)^2}, \text{ αν } x + y^2 \neq 0,$$

$$g(x, y) = (x^2 + y^4) \ln(x^2 + y^4)$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

8) Είναι δυνατόν να οριστεί η παράμετρος λ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin^4 x - \sin^3 y)}{x^2 - y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lambda & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ να είναι συνεχής σε όλο το } \mathbb{R}^2$$

9) ΝΔΟ η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{αν } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0, 0)$

10) ΝΔΟ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$

11) Κανόνας Αλυσίδας, Δενδροδιάγραμμα

$$f(x, y) = x^2 + xy, \quad x = 2t, \quad y = \sqrt{t}$$

$$f(x, y) = x + y^2, \quad y = \ln x$$

$$f(x, y) = xy, \quad x = s + t, \quad y = s - t$$

$$f(x, y) = xy, \quad y = x - xt$$

$$f(x) = x^2, \quad x = s + 4t$$