Φροντιστήριο 6ο

1. Έστω η συναρτηση $f(x,y,z)=xyz^2$ με $x=r+s+t, \quad y=s^2, \quad z=t.$
   Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι
$$\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

2. Εαν $f(x,y)=e^{xy^2}$ και $x=x(t)=tcos(t), \quad y=y(t)=tsin(t)$ υπολογίστε την ολική παράγωγο $\frac{df}{dt}$ στο σημείο $t=\frac{\pi}{2}$

3. ΝΔΟ η $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ικανοποιεί την Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

4. Εαν είναι $z=xf(x+y)+g(x+y)$, όπου $f,g\in\mathbb{C}^2$ τάξης, να δειχτεί οτι:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

5. Εαν $x=rcos\varphi, y=rsin\varphi$ και $V=V(x,y)$ να αποδείξετε οτι:
$$(\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2=(\frac{\partial V}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial V}{\partial \varphi})^2$$

6. Να υπολογίσετε την παράγωγο 1ης τάξης της $f(x,y)=e^x\cos\frac{y}{2}, \quad x=\frac{t}{\pi}, \ y=3t$ για $t=\pi$

7. Έστω η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^2+xy$, όπου $x=r\cos\theta, \ y=r\sin\theta$. Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial r}$ και $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ με τη χρήση του κανόνα αλυσίδας

8. Αν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $z=f(x,y)$, όπου $x=u+v, \ y=u-v$, ΝΔΟ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$

9. Αν $z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $z=f(u)+g(v)$, όπου $u=kx+ly, \ v=kx-ly, \ k,l\in\mathbb{R}$,
   ΝΔΟ $k^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-l^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$