

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1

TUTORIAL 3

1) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$ όπου $x \in \mathbb{R}, x > 0$

(Υπόδειξη: Από το κεφάλαιο των ακολουθιών γνωρίζουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, όπου $n \in \mathbb{N}$)

2) Να προσδιοριστεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ όπου:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1} + ax^2 - 1, & \text{αν } x < 1 \\ 2x^2 - \frac{a}{2}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

3) Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x+4}{x-3} + 5$. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης. Να εξεταστεί αν είναι 1-1 και επί και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση, αν αυτή υπάρχει.

4) Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. ΝΔΟ $\forall x, y \in [0,1]$: να

$$\text{ισχύει } |f(x) + g(y) - xy| \leq \frac{1}{4}$$

5) Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ στο \mathbb{R}

6) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία αληθεύει $(f \circ f)(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
ΝΔΟ η f είναι α) περιττή και β) αμφιμονοσήμαντη