Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινοπωρινό Εξάμηνο 14-15**
Σημειώσεις 12-1-15
Μ. Ζαζάνης

1 Γενικευμένα (ή καταχρηστικά) ολοκληρώματα Riemann

1.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους – Μη πεπερασμένο διάστημα ολοκλήρωσης

Ορισμός 1. *Έστω f μια συνάρτηση ολοκλρώσιμη κατά Riemann σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[a, b]$. Ονομάζουμε* γενικευμένο ολοκλήρωματα πρώτου είδους *ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, και $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$. Το νόημα που προσδίδουμε στα ολοκληρώματα αυτά είναι*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{y\to-\infty}\int_y^b f(x)dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{y\to-\infty}\int_y^a f(x)dx + \lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x)dx. \tag{3}$$

(Παρατηρείστε ότι, για κάθε τιμή του y τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος των παραπάνων εξισώσεων είναι συνηθησμένα ολοκληρώματα Riemann. Επίσης, παρατειρείστε ότι, στην (3) υπολογίζουμε δύο διαφορετικά όρια **και όχι το όριο** $\lim_{y\to\infty}\int_{-y}^y f(x)dx$.*) Αν τα όρια στις παραπάνω εξισώσεις υπάρχουν τότε τα γενικευμένα ολοκληρώματα Riemann υπάρχουν (ή συγκλίνουν).*

Παραδείγματα:

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty}(1-e^{-y}) = 1$. Το όριο υπάρχει και επομένως το γενικευμένο ολοκληρωμα πρώτου είδους υπάρχει και είναι ίσο με 1.

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{z\to\infty}\int_0^z \frac{dx}{1+x^2}\\ &= \lim_{y\to-\infty}(\arctan 0 - \arctan(y)) + \lim_{z\to\infty}(\arctan(z) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Τα όρια υπάρχουν (ως πραγματικοί αριθμοί) και επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει και είναι ίσο με π.

3. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty x dx$ δεν υπάρχει (ή δεν συγκλίνει) παρ' ότι $\int_{-y}^y x dx = 0$ για κάθε $y > 0$

και επομένως $\lim_{y\to\infty}\int_{-y}^{y} xdx = 0$. Αυτός είναι ο λόγος που στην (3) επιμένουμε να χρησιμοποιούμε δύο ξεχωριστά όρια.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ συγκλίνει αν $\alpha > 1$ ενώ δεν συγκλίνει αν $\alpha \leq 1$. Πράγματι, αν $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^y x^{-\alpha}dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^y = \frac{y^{-\alpha+1}-1}{1-\alpha} \to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{αν} \quad \alpha < 1 \end{cases} \qquad \text{όταν } y \to \infty.$$

ενώ, αν $\alpha = 1$, $\int_1^y x^{-1}dx = \log(y) \to \infty$ όταν $y \to \infty$.

Κριτήρια Σύγκλισης

Κριτήριο σύγκρισης. Έστω f, g, δύο μή αρνητικές συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο διάστημα $[a,\infty)$ και ολοκληρώσιμες κατά Riemann σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,x]$, $x \geq a$. Έστω επίσης ότι $\exists b \geq a$ τέτοιο ώστε $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq b$. Τότε,

1. Αν το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, και το $\int_a^\infty f(x)dx$ θα συγκλίνει.
2. Αν το $\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει, και το $\int_a^\infty g(x)dx$ θα αποκλίνει.

Κριτήριο οριακής σύγκρισης. Έστω f, g, δύο ορισμένες σε κάποιο διάστημα $[a,\infty)$ και ολοκληρώσιμες κατά Riemann σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,x]$, $x \geq a$. Έστω επίσης ότι $f(x) \geq 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq a$ και

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l > 0.$$

Τότε το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

(Αν $l = 0$ τότε η σύγκλιση του $\int_a^\infty g(x)dx$ συνεπάγεται την σύγκλιση του $\int_a^\infty f(x)dx$ αλλά όχι αντίστροφα.

1.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα δεύτερου είδους – Μη φραγμένη συνάρτηση σε ένα πεπερασμένο διάστημα

Αυτά είναι ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^b f(x)dx$ για τα οποία ισχύει ότι η f έχει μια ιδιομορφία στο αριστερό ή το δεξιό άκρο του διαστήματος $[a,b]$. Ας υποθέσουμε για να γίνουμε συγκεκριμένοι ότι η ιδιομορφία είναι στο δεξιό άκρο του διαστήματος. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,c]$, $a \leq c < b$ αλλά το όριο $\lim_{x\uparrow b} f(x)$ δεν υπάρχει. Σε κάθε περίπτωση που θα εξετάσουμε εδώ, $\lim_{x\uparrow b} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

Παραδείγματα:
1. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεύτερου είδους $\int_0^1 x^{-\alpha}dx$ συγκλίνει αν $\alpha < 1$ και αποκλείνει αν $a \geq 1$.

Πράγματι, αν $\alpha \neq 1$,

$$\int_y^1 x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_y^1 = \frac{1-y^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \to \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{αν} \quad \alpha < 1 \\ +\infty & \text{αν} \quad \alpha > 1 \end{cases} \qquad \text{όταν } y \to 0.$$

2. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεύτερου είδους $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{\pi}{2}$. Πράγματι, το δεξί άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης, 1, είναι σημείο ιδιομορφίας της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ και επομένως, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{y\to 1} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{y\to 1} (\arcsin y - \arcsin(0)) = \frac{\pi}{2}$.

3. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ δεν υπάρχει. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{x-1}$ έχει σημείο ομοιομορφίας σε ένα ενδιάμεσο σημείο, το σημείο 1, του διαστήματος ολοκλήρωσης $[0,3]$. Επομένως,

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} \;=\; \lim_{y\uparrow 1} \int_0^y \frac{dx}{x-1} + \lim_{z\downarrow 1} \int_z^3 \frac{dx}{x-1} \;=\; \lim_{y\uparrow 1} (\log|y-1| - \log|-1|) + \lim_{z\downarrow 1} (\log|3-1| - \log|z-1|)\,.$$

Όμως $\lim_{y\uparrow 1} \log|y-1| = -\infty$ και $\lim_{z\downarrow 1} (-\log|z-1|) = +\infty$ και συνεπώς το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Η συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται για κάθε $s > 0$ μέσω του γενικευμένου ολοκληρώματος

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Παρατηρείστε ότι, όταν $s \in (0,1)$ το ολοκλήρωμα αυτό είναι γενικευμένο και επειδή το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μη πεπερασμένο και επειδή στο σημείο 0 η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε έχει ιδιομορφία. (Αυτά τα γενικευμένα ολοκληρώματα ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα τρίτου είδους.) Θέτουμε

$$I_1 := \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx, \quad I_2 := \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

1η περίπτωση: $s \geq 1$. Εδώ το I_1 είναι ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα Riemann ενώ το I_2 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το I_2 συγκλίνει ως εξής: Επειδή $x^{s+1}e^{-x} \to 0$ όταν $x \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $b > 1$ τέτοιο ώστε $x^{s+1}e^{-x} \leq 1$ για κάθε $x \geq b$ ή, ισοδύναμα, $x^{s-1}e^{-x} \leq x^{-2}$ για $x \geq b$. Επομένως, θέτοντας $f(x) := x^{s-1}e^{-x}$ και $g(x) = x^{-2}$ συμπεραίνουμε ότι το I_2 συγκλίνει επειδή συγκλίνει το $\int_b^\infty x^{-2}dx$. (Κριτήριο σύγκρισης.)

2η περίπτωση: $s \in (0,1)$. Εδώ και το I_1 και το I_2 είναι γενικευμένα ολοκληρώματα, δευτέρου και πρώτου είδους αντίστοιχα. Εξετάζουμε πρώτα το I_2. Θέτουμε $f(x) = x^{s-1}e^{-x}$, $g(x) = e^{-x}$ και έχουμε $0 < f(x) \leq g(x)$ για $x \geq 1$. Εφόσον το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty e^{-x}dx$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και το I_2.

Εξετάζουμε τώρα το I_1. Ορίζουμε την συνάρτηση $\phi(y) := \int_{1/y}^1 x^{s-1}e^{-x}dx$, $y \in [1,\infty)$. Το I_2 θα υπάρχει αν υπάρχει το $\lim_{y\to\infty} \phi(y)$. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι αύξουσα συνάρτηση του y και επομένως το

$\lim_{y\to\infty} \phi(y)$ θα υπάρχει αν και μόνο αν η ϕ είναι φραγμένη στο $[1,\infty)$.

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int_{1/y}^{1} x^{s-1}e^{-x}dx \le \int_{1/y}^{1} x^{s-1}dx \qquad (\text{επειδή } e^{-x} \le 1 \text{ για κάθε } x \in [0,1]) \\ &= \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{y^s}\right) \ \le \ \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

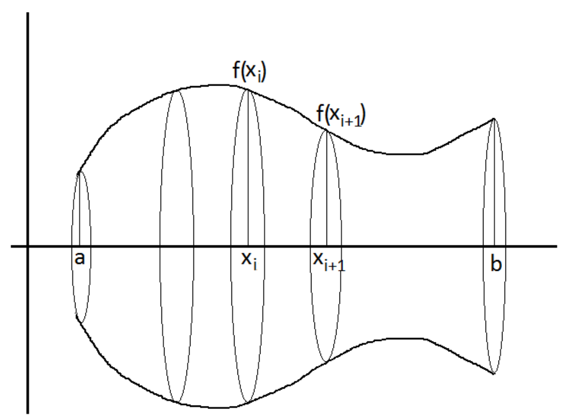
Συνεπώς $\phi(y) \le \frac{1}{s}$ για κάθε $y \ge 1$ και κατα συνέπεια το $I_2 = \lim_{y\to\infty} \int_{1/y}^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ υπάρχει.

Η συνάρτηση Γάμμα γενικεύει την έννοια του παραγοντικού. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

απ΄ όπου μπορούμε να δούμε επαγωγικά ότι $\Gamma(n+1) = n!$ για $n \in \mathbb{N}$.

2 Επιφάνειες και όγκοι εκ περιστροφής



Σχήμα 1: Επιφάνεια και όγκος στερεού εκ περιστροφής

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Ο όγκος του στερεού που προκύπτει αν την περιστρέψουμε γύρω από τον άξονα των x είναι

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Η πλευρική επιφάνεια του στερεού είναι

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

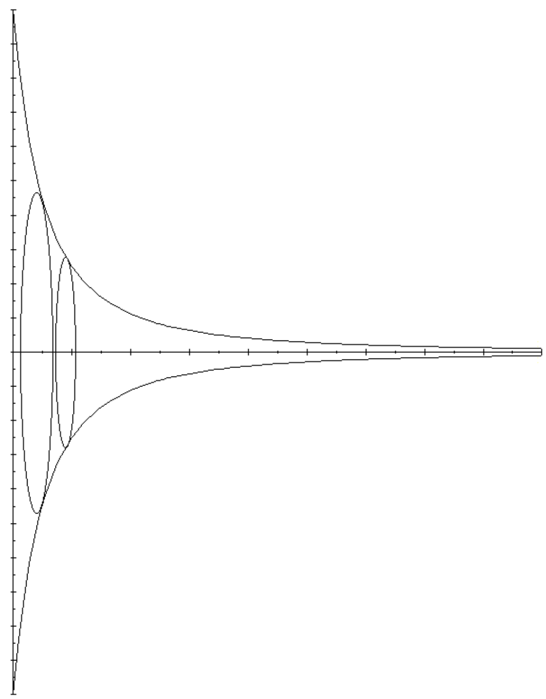
Παράδειγμα 1: Έστω ότι περιστρέφουμε την συνάρτηση $f(x) := \cosh x$, $x \in [-1,2]$ γύρω από τον άξονα των x. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{2} \pi(\cosh x)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_{-1}^{2}\cosh(2x)dx+3\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(3+\frac{1}{2}\left(\sinh(4)-\sinh(-2)\right)\right) = \frac{\pi}{4}\left(6+\sinh(4)+\sinh(2)\right). \end{aligned}$$

Η πλευρική επιφάνεια είναι

$$S = \int_{-1}^{2} 2\pi \cosh x \sqrt{1+\sinh^2 x} dx = 2\pi \int_{-1}^{2} \cosh^2 x dx = 2V.$$

Παράδειγμα 2: Ένα στερεό με άπειρη επιφάνεια και πεπερασμένο όγκο. Περιστρέφουμε την $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, \infty)$ γύρω από τον άξονα των x.



Σχήμα 2: Χωάνη. $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$.

Ο όγκος του στερεού είναι

$$V = \int_{1}^{\infty} \pi x^{-2} dx = \pi \lim_{y \to \infty} \int_{1}^{y} x^{-2} dx = \pi \lim_{y \to \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 1.$$

Η πλευρική επιφάνεια του στερεού όμως είναι

$$S = \int_{1}^{\infty} 2\pi x^{-1} \sqrt{1+x^{-2}} dx = +\infty.$$

Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{1}^{\infty} x^{-1} dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}\sqrt{1+x-2}}{x^{-1}} = 1$. (Κριτήριο σύγκλισης για γενικευμένα ολοκληρώματα.)

3 Κανόνας του Leibniz

Έστω g, h παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα (a, b) και f μια συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \;=\; g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x)).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\int_{h(x+\delta)}^{g(x+\delta)} f(x)dx - \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\int_{h(x+\delta)}^{h(x)} f(t)dt + \int_{g(x)}^{g(x+\delta)} f(t)dt\right).\end{aligned}$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει $u_{x,\delta}$ μεταξύ των $h(x)$ και $h(x+\delta)$, και $v_{x,\delta}$ μεταξύ των $g(x)$ και $g(x+\delta)$ τέτοια ώστε $\int_{h(x+\delta)}^{h(x)} f(t)dt = -f(u_{x,\delta})\,(h(x+\delta)-h(x))$ και $\int_{g(x)}^{g(x+\delta)} f(t)dt = f(v_{x,\delta})\,(g(x+\delta)-g(x))$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt &= -\lim_{\delta\to 0} -f(u_{x,\delta})\frac{h(x+\delta)-h(x)}{\delta} + \lim_{\delta\to 0} f(v_{x,\delta})\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\\ &= g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x)).\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω του ότι οι g, h, είναι παραγωγίσιμες (και επομένως συνεχείς) και η f είναι συνεχής.

Παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2x^{3/2}}e^{-\frac{1}{2x}}.$$

4 Παραγώγιση Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

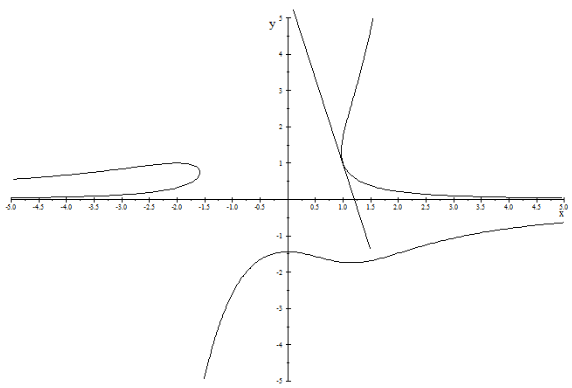
Δίδεται η πεπλεγμένη συνάρτηση $x^3y^2 + 3x^2y - y^3 - 3 = 0$ που ορίζει την καμπύλη του Σχήματος 1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $(1, 1)$.

Παραγωγίζουμε την πεπλεγμένη έκφραση ως προς x και παίρνουμε $3x^2y^2+2x^3yy'+6xy+3x^2y'-3y^2y' = 0$ ή

$$y' \;=\; \frac{3x^2y^2 + 6xy}{3y^2 - 2x^3 - 3x^2}.$$

Επομένως η παράγωγος στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, 1)$ της καμπύλης είναι ίση με $(y')_{(1,1)} = \frac{3+6}{3-2-3} = -\frac{9}{2}$ και η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (x_0, y_0) και εφάπτεται στην καμπύλη είναι

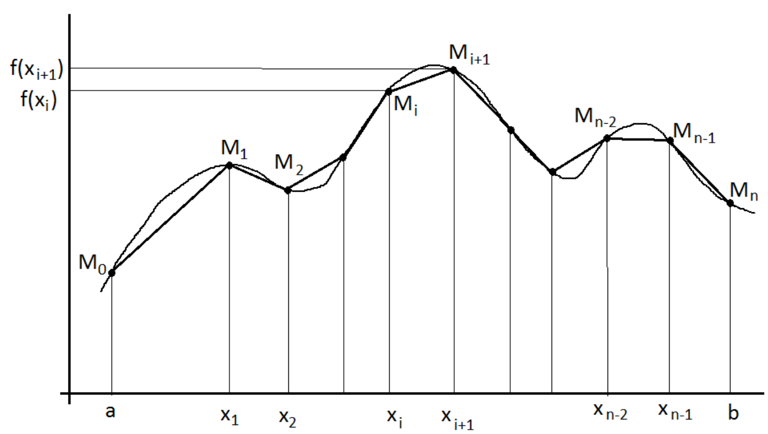
$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = (y')_{(x_0,y_0)} \quad \text{ή} \quad y = 1 - \frac{9}{2}(x-1) = \frac{11}{2} - x\frac{9}{2}.$$



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της $x^3y^2+3x^2y-y^3-3=0$ και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(1,1)$.

5 Μήκος τόξου καμπύλης

Θεώρημα 1. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχώς παραγωγίσιμη. (Αυτό σημαίνει ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η παράγωγός της, f', είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα αυτό.*



Σχήμα 4: Προσέγγιση μήκους καμπύλης μέσω μιας τεθλασμένης.

Παράδειγμα 1. Έστω $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$. Στην περίπτωση αυτή το μήκος της καμπύλης είναι

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx &= \int_2^{1+e^2} \frac{\sqrt{y}}{2(y-1)}\,dy \qquad (\text{αντικατάσταση } y=1+e^{2x})\\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2-1}du \;=\; \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} du \;+\; \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{du}{u^2-1}\\
&= \sqrt{1+e^2}-\sqrt{2} \;+\; \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{du}{u-1} \;-\; \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{du}{u+1}\\
&= \sqrt{1+e^2}-\sqrt{2} \;+\; \frac{1}{2}\Big(\log(\sqrt{1+e^2}-1)-\log(\sqrt{2}-1)-\log(\sqrt{1+e^2}+1)+\log(\sqrt{2}+1)\Big).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2. Έστω $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $a=0$, $b=1$. Στην περίπτωση αυτή το μήκος της καμπύλης είναι

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \quad = \quad \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(1)} \sqrt{1+\sinh^2 u}\cosh u du \quad (\text{αντικατάσταση: } \sinh u = x)$$

Επίσης, αφού $\frac{e^z-e^{-z}}{2}=1 \;\Rightarrow z=\log(1+\sqrt{2})$, έχουμε ότι $\sinh^{-1}(1)=\log(1+\sqrt{2})$. Συνεπώς, το παραπάνω ολοκήρωμα είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \cosh^2 u du &= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du \;=\; \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{e^{2u}+e^{-2u}+2}{4} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} (1+\cosh 2u)\, du \;=\; \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{1}{4}\sinh(2\log(1+\sqrt{2}) \\
&= \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{1}{8}\left(e^{\log(1+\sqrt{2})^2} - e^{-\log(1+\sqrt{2})^2}\right) \\
&= \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right)
\end{aligned}$$