Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 21-11-11
Μ. Ζαζάνης

1 Ο αριθμός του Euler

Θεώρημα 1. *Η ακολουθία*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

είναι αύξουσα και φραγμένη και συνεπώς συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι $a_{n-1} \le a_n$ για κάθε n. Ξεκινάμε με την ανισότητα για τον γεωμετρικό και αριθμητικό μέσο

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{2}$$

Θέτοντας $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$ και $x_n = 1$ στην (2) έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \;\le\; \frac{(n-1)(1+\frac{1}{n-1})+1}{n} \;=\; 1 + \frac{1}{n}.$$

Υψώνοντας τα μέλη της παραπάνω ανισότητας στην n–οστή δύναμη έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

και συνεπώς αποδείξαμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.

Για να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένη θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό θεώρημα:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}. \tag{3}$$

Ο διωνυμικός συντελεστής γράφεται ως

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}. \end{aligned}$$

Συνεπώς ο γενικός όρος του αθροίσματος στην (3) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k\ \text{όροι}}}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{k\ \text{όροι}}}\,\frac{1}{k!} \\
&= 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \\
&\leq \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αυτή στην (3) έχουμε

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}.$$

Ισχύει όμως ότι $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n \geq 2^{n-1}$ για $n \geq 1$ και $\frac{1}{n!} \leq 2^{-(n-1)}$. Επομένως

$$a_n \ \leq\ 1+1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n+1} \ =\ 1+\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}} \ \leq\ 3.$$

Συνεπως η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αύξουσα και φραγμένη και κατά συνέπεια συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό (μικρότερο του 3). ∎

Το όριο της ακολουθίας ονομάζεται αριθμός του Euler και συμβολίζεται με $e = 2.718281828\ldots$. Είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων, ένας άρρητος αριθμός και μάλιστα υπερβατικός, δηλαδή δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. (Μια ενδιαφέρουσα αφήγηση της ιστορίας και της σημασίας του αριθμού υπάρχει π.χ. στο βιβλίο του Eli Maor, *e: Η ιστορία ενός αριθμού*, εκδόσεις *Κάτοπτρο*.)

2 Το θεώρημα του εγκιβωτισμού

Θεώρημα 2. *Έστω ακολουθίες $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ τέτοιες ώστε $y_n \to L$ και $z_n \to L$ όταν $n \to \infty$ και, για κάθε n, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Τότε ισχύει και ότι $x_n \to L$.*

Απόδειξη. Έστω ϵ δεδοένο. Τότε υπάρχουν n_1 και n_2 τέτοια ώστε

$$-\epsilon + L < y_n < L + \epsilon \qquad \forall n \geq n_1, \tag{4}$$

$$-\epsilon + L < z_n < L + \epsilon \qquad \forall n \geq n_2. \tag{5}$$

Χρησιμοποιώντας το αριστερό τμήμα της πρώτης διπλής ανισότητας και το δεξιό τμήμα της δεύτερης, καθώς και το γεγονός ότι $y_n \leq x_n \leq z_n$, έχουμε

$$-\epsilon + L < y_n \leq x_n \leq z_n < L + \epsilon \qquad \forall n \geq \max\{n_1, n_2\}.$$

Συνεπώς $|x_n - L| < \epsilon$ όταν $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. ∎

3 Ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα

Έστω A ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ο πραγματικός αριθμός b ονομάζεται *άνω φράγμα* του συνόλου A άν, για κάθε $x \in A$, $x \leq b$. Αντίστοιχα, ο $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται *κάτω φράγμα* του A αν $x \geq a$ για κάθε $x \in A$. Ένα σύνολο το οποίο έχει άνω και κάτω φράγμα ονομάζεται *φραγμένο.*

Ορισμός 1. *Ένας πραγματικός αριθμός s ονομάζεται* ελάχιστο άνω φράγμα *ή* supremum *ενός συνόλου πραγματικών αριθμών, A, αν το s είναι άνω φράγμα του A και για οποιοδήποτε άλλο άνω φράγμα του A, έστω b ισχύει ότι $s \leq b$. Ομοίως, ο $l \in \mathbb{R}$ ονομάζεται* μέγιστο κάτω φράγμα *ή* infimun *του συνόλου A αν, για κάθε ο l είναι κάτω φράγμα του A και για οποιοδήποτε άλλο κάτω φράγμα του A, έστω a, ισχύει ότι $a \leq l$.*

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί αξίωμα των πραγματικών αριθμών.

Πρόταση 1 (Αξίωμα της Πληρότητας). *Κάθε άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.*

Άμεση συνέπεια της πρότασης αυτής είναι ότι κάθε κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, έστω A, έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα. Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε το αξίωμα της πληρότητας στο σύνολο $-A := \{-x : x \in A\}$. Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου A συμβολίζεται ως $\sup A$ ενώ το μέγιστο κάτω φράγμα με $\inf A$.

Ορισμός 2. *Το στοιχείο m ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται* μέγιστο *αν $m \geq x$ για κάθε $x \in A$ (και βεβαίως $m \in A$). Το στοιχείο $h \in A$ ονομάζεται* ελάχιστο *στοιχείο του A αν $h \leq x$ για κάθε $x \in A$.*

Το ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου A συμβολίζεται με $\min A$ ενώ το μέγιστο με $\max A$. Για παράδειγμα, το σύνολο $A = (0, 1]$ έχει μέγιστο στοιχείο $\max A = 1$ *αλλά όχι ελάχιστο στοιχείο, αφού το 0 δεν ανήκει στο A.* Ακόμη $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$.

4 Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός 3. *Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται Cauchy αν, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$|a_n - a_m| < \epsilon, \qquad \text{για κάθε } n, m > n_0.$$

Θεώρημα 3. *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία Cauchy. Υπάρχει τότε N τέτοιο ώστε $|a_n - a_N| < 1$ για κάθε $n \geq N$ και επομένως $|a_n| < 1 + |a_N|$ για $n \geq N$. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Το επόμενο θεώρημα αποκαλύπτει την σημασία του ορισμού μιας ακολουθίας Cauchy.

Θεώρημα 4. *Μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι Cauchy αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός l τέτοιος ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι, αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει τότε είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν η ακολουθία συγκλίνει, έστω στο l, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - l| < \epsilon/2$ και $|a_m - l| < \epsilon/2$ για κάθε $m > n_0$ και $n > n_0$. Συνεπώς

$$|a_m - a_n| = |a_m - l - (a_n - l)| \leq |a_m - l| + |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \qquad \text{για κάθε } m, n > n_0.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε το δεύτερο σκέλος, δηλαδή ότι αν μια ακολουθία είναι Cauchy τότε αναγκαστικά συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Δεδομένου ότι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη, από το θεώρημα Bolzano–Weirstrass προκύπτει ότι η $\{a_n\}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω την $\{a_{n_k}\}$, η οποία τείνει στο $l \in \mathbb{R}$. Επομένως υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε να έχουμε $|a_{n_k} - l| < \epsilon/2$ για κάθε $k \geq k_0$. Ομοίως, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ όταν $m, n > n_0$. Συνεπώς έχοντας διαλέξει $k \geq \max\{k_0, n_0\}$, έχουμε ότι

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Συνεπώς η αρχική ακολουθία τείνει επίσης στο l. □

Παράδειγμα 1. Η ακολουθία της οποίας ο n–οστός όρος δίδεται από την $a_n = \rho^n$ όπου $|\rho| < 1$ είναι Cauchy. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $n > m$, $a_n - a_m = \rho^n - \rho^m = \rho^m(\rho^{n-m} - 1)$. Συνεπώς $|a_n - a_m| \leq |\rho|^m$ και επομένως, αν μου δοθεί $\epsilon > 0$ και διαλέξω $N > \frac{|\log \epsilon|}{|\log \rho|}$ τότε $|a_n - a_m| < \epsilon$ όταν $n > m > N$.

Παράδειγμα 2. Η ακολουθία $s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ είναι Cauchy. Πράγματι, αν $n > m$ τότε

$$\begin{aligned}
s_n - s_m &= \frac{1}{(m+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots n}\right) \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+2)^{n-m-1}}\right) \\
&= \frac{1}{(m+1)!}\frac{1 - \left(\frac{1}{m+2}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{m+2}} \;\leq\; \frac{2}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

Άρα το $|s_n - s_m|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό αν $n > m > N$ και το N είναι κατάλληλα μεγάλο.

Παράδειγμα 3. Η ακολουθία $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι Cauchy. Πράγματι, αν $n > m$, τότε

$$H_n - H_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{n-m}{n}.$$

Επομένως, όσο μεγάλο N κι αν πάρουμε, με $n > m > N$, αν π.χ. $n = 2m$ τότε $H_n - H_m > \frac{1}{2}$. Αν $\epsilon < 1/2$ τότε η ανισότητα $|H_n - H_m| < \epsilon$ δεν ικανοποιείται.

Θεώρημα 5. *Έστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ακολουθίες, και n_0 φυσικός αριθμός, έτσι ώστε, $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Αν οι ακολουθίες συγκλίνουν στα όρια $a_n \to l$, $b_n \to l'$ τότε ισχύει ότι $l \leq l'$.*

Απόδειξη. Αφού οι ακολουθίες συγκλίνουν, για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $a_n > l - \epsilon/2$ για $n \geq n_1$, και n_2 τέτοιο ώστε $b_n < l' + \epsilon/2$ όταν $n \geq n_2$. Συνεπώς, αν $N = \max\{n_0, n_1, n_2\}$, τότε για κάθε $n \geq N$ θα ισχύει ότι $l - \epsilon/2 < a_n \leq b_n < l' + \epsilon/2$. Συνεπώς $l < l' + \epsilon$, και αυτό ισχύει *για κάθε* $\epsilon > 0$. Συνεπώς $l \leq l'$. □

5 Περισσότερα για τον αριθμό e

Είδαμε ότι η ακολουθία $\{t_n\}$ με γενικό όρο $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και φραγμένη και άρα συγκλίνει σε ένα όριο το οποίο ονομάσαμε e. (Πρόκειται βεβαίως, όπως θα δούμε, για την βάση των φυσικών λογαρίθμων.) Είδαμε επίσης ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ με γενικό όρο $s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει. Θα δούμε τώρα ότι τα δύο αυτά όρια είναι ο ίδιος αριθμός. Όπως είδαμε, από το διωνυμικό θεώρημα, η t_n γράφεται ως

$$t_n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\left[1\cdot\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{k!} \;\le\; \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \;=\; s_n. \tag{6}$$

Συνεπώς, με βάση το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n \le \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{7}$$

Θα δείξουμε τώρα την αντίστροφη ανισότητα. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε $m<n$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} t_n &= 1+1+(1-\tfrac{1}{n})\frac{1}{2!}+\cdots+\left[\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{m-1}{n}\right)\right]\frac{1}{m!}+\cdots+\left[\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right)\right]\frac{1}{n!} \\ &\ge 1+1+(1-\tfrac{1}{n})\frac{1}{2!}+\cdots+\left[\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{m-1}{n}\right)\right]\frac{1}{m!} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε επειδή παραλείψαμε θετικούς όρους. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο στην ανισότητα

$$t_n \le 1+1+(1-\tfrac{1}{n})\frac{1}{2!}+\cdots+\left[\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{m-1}{n}\right)\right]\frac{1}{m!}$$

παίρνουμε

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!} = s_m.$$

Αφήνοντας τώρα το m να πάει στο άπειρο παίρνουμε

$$\lim_{m\to\infty} s_m \ge e. \tag{8}$$

Από τις (7) και (8) προκύπτει ότι το όριο της $\{s_n\}$ είναι επίσης ο αριθμός e, δηλαδή έχουμε

$$e \;=\le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots. \tag{9}$$

Θεώρημα 6. *Ο αριθμός e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Έστω ότι είναι ρητός. Τότε υπάρχουν φυσικοί p και q έτσι ώστε $e=\frac{p}{q}$. Ισχύει όμως λόγω της (9) ότι, για κάθε n,

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots.$$

Επομένως, αν $n=q$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \;<\; q!(e-s_q) &= \frac{1}{q+1}\left(1+\frac{1}{q+2}+\frac{1}{(q+2)(q+3)}+\frac{1}{(q+2)(q+3)(q+4)}+\cdots\right) \\ &< \frac{1}{q+1}\left(1+\frac{1}{q+2}+\frac{1}{(q+2)^2}+\frac{1}{(q+2)^3}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{q+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{(q+1)^2} \;<1. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι $0 < q!(e - s_q) < 1$. Όμως ο $q!e$ είναι φυσικός αριθμός και το ίδιο είναι και ό $q!s_q = q!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!})$. Συνεπώς ο $q!(e - s_q)$ είναι ακέραιος αριθμός, μεγαλύτερος από το μηδέν και μικρότερος από το ένα, που είναι άτοπο. $\square$