ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η ακολουθία { α_ν } λέγεται αθροίσιμη αν η ακολουθία {S_ν } συγκλίνει, όπου $S_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_\nu$. Σε αυτή την περίπτωση το $\lim S_\nu$ συμβολίζεται με $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ και λέγεται το άθροισμα της ακολουθίας { α_ν }.

Μια σειρά συγκλίνει προς τον πραγματικό αριθμό α όταν και μονο όταν η ακολουθία {S_ν } των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει προς τον πραγματικό αριθμό α.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a .$$

Αν { α_ν } και { β_ν }είναι δυο αθροίσιμες ακολουθίες, τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu + \beta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \text{ και } \sum_{\nu=1}^{\infty} \kappa a_\nu = \kappa \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ:</u>

- $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$: συγκλίνει στο $S = \dfrac{a}{1-x}$, όταν $|x| < 1$.

<u>ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ p-ΤΑΞΗΣ :</u>

- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$: συγκλίνει για $p > 1$.

Μια σειρά αποκλίνει όταν και μόνο όταν η η ακολουθία {S_ν }δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ούτε στο άπειρο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ τότε είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
2) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι φραγμένη και έχει όλους τους όρους της θετικούς, τότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

3) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν είναι φραγμένη και έχει όλους τους όρους της θετικούς, τότε απειρίζεται θετικά.

4) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ τότε η ακολουθία $\{ \alpha_\nu \}$είναι μηδενική.

Αν η ακολουθία δεν είναι μηδενική, η σειρά δεν συγκλίνει.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

1) **1ο Κριτήριο σύγκρισης:** Δίνονται οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu, \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ που ικανοποιούν τις ανισότητες: $0 \le a_\nu \le \beta_\nu,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε :

• Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

• Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ απειρίζεται.

2) **Κριτήριο του λόγου (D' Alembert)** Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει όλους τους όρους της θετικούς πραγματικούς αριθμούς και $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = p$. Τότε:

• Αν p < 1 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

• Αν p >1 η σειρά απειρίζεται θετικά.

• Αν p = 1 δεν μπορούμε με το κριτήριο αυτό να αποφανθούμε για την σύγκλισγ ή όχι της σειράς.

2ο Κριτήριο σύγκρισης: (οριακό κριτήριο)

Δίνονται οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu, \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ που έχουν όλους τους όρους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς., με $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \kappa$. Τότε :

• Αν $\kappa \ne 0, \kappa \ne \infty$ τότε οι σειρές έχουν ίδια συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση.

• Αν κ = 0 και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

• Αν $\kappa = +\infty$ και η $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ απειρίζεται θετικά τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ απειρίζεται θετικά.

<u>Κριτήριο του Cauchy (της ρίζας)</u>

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ που έχει όλους τους όρους της θετικούς πραγματικούς αριθμούς. Αν $\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = p, \quad 0 \le p \le \infty$ τότε:

• Η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ αν p < 1

• Η σειρά απειρίζεται θετικά αν p>1

• Αν p = 1, δεν μπορούμε με το κριτήριο αυτό να αποφανθούμε .

<u>Το κριτήριο του ολοκληρώματος:</u>

Έστω f μια συνάρτηση που είναι μη αρνητική, συνεχής και φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty), \mu\varepsilon\ \alpha_\nu = f(\nu)\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}$.

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)dx$ έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση.

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ της οποίας οι όροι έχουν εναλλάξ πρόσημο ($\alpha_\nu . \alpha_{\nu+1} \le 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$) λέγεται εναλλάσσουσα σειρά και έχει μια από τις επόμενες μορφές:

• $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1} a_\nu, \quad a_1 \ge 0$

• $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} a_\nu, \quad a_1 \le 0$

Κριτήριο του Leibniz :

Έστω $\{\alpha_\nu\}$ μια φθίνουσα και μηδενική ακολουθία.

Τότε η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}a_\nu$, συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ λέγεται ότι συγκλίνει απολύτως αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα: Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως στο $\mathbb{R}$, τότε η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα ισχύει $\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΣΕΙΡΑΣ

Έστω μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.Αν $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_{T(n)}$ ονομάζεται μια αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ που συγκλίνει απολύτως στον πραγματικό αριθμό Α και $\sum_{n=1}^{\infty}a_{T(n)}$ μια αναδιάταξη της.

Τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_{T(n)}$ συγκλίνει στο Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ RIEMANN : Έστω μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ που συγκλίνει υπο συνθήκη.

Τότε, για κάθε προκαθορισμένο αριθμό β, υπάρχει μια αναδιάταξη της που συγκλίνει στο β.

Δηλαδή, η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης (α+(β+γ)) = (α+β) +γ) δεν ισχύει σε άπειρα αθροίσματα.

Παράδειγμα: Η σειρά 1-1 +1 -1 +1 -1 +…δεν συγκλίνει (ταλαντούται ή κυμαίνεται) γιατί η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της είναι 1, 0, 1, 0, …
Βλέπουμε όμως ότι: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots \to 0$ *ενώ*
$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1) \to 1$

ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Με αυτό τον τρόπο ονομάζουμε σειρές των οποίων το άθροισμα μπορεί να βρεθεί αν μελετήσουμε την ιδιότητα τους, κάθε όρος να απλοποιείται με τον προηγούμενο η τον επόμενο. (Η μέθοδος της διαφοράς)

Πιο κλασσικό παράδειγμα : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Βλέπουμε ότι : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots = 1$