ΣΕΙΡΕΣ

Με βάση μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων:

$$S_1 = \alpha_1$$
$$S_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$S_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$\vdots$$
$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$$
$$S_{\nu+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}$$
$$\vdots$$

Το όριο της S_ν ονομάζεται σειρά της α_ν:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} S_\nu$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία S_ν συγκλίνει.

- Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει τότε $\lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = 0$

Προσοχή: ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο.

Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών

1. Κριτήριο Σύγκρισης.

Αν για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n$ είναι γνωστό ότι

$$0 \le \alpha_n \le \beta_n \quad , \forall n \in \mathbb{N},$$

τότε :

- Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$
- Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ δεν συγκλίνει, τότε δεν συγκλίνει ούτε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n$

2. Κριτήριο Λόγου.

Θεωρούμε την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ και έστω

$$r = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| .$$

Τότε :

- Αν $r < 1$, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει
- Αν $r > 1$, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ δεν συγκλίνει
- Αν $r = 1$, δεν μπορούμε να έχουμε ασφαλή συμπεράσματα.

3. Κριτήριο Ρίζας

Για την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ θεωρούμε το

$$r = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- Αν $r < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει
- Αν $r > 1$, η σειρά δεν συγκλίνει
- Αν $r = 1$, δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Απόλυτη και Σχετική σύγκλιση σειράς.

Θεωρούμε την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ καθώς και την αντίστοιχη σειρά των απόλυτων τιμών της a_n: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

- Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ (οπότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$)

- Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει σχετικά αν συγκλίνει η ίδια ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ δεν συγκλίνει.

- Η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη της σχετικής.

Ορισμένες Βασικές Σειρές

• Η Γεωμετρική Σειρά.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$$

Συγκλίνει όταν $|r|<1$. Το άθροισμά της είναι ίσο με $\dfrac{1}{1-r}$.

• p-Σειρές (Ζήτα συνάρτηση του Riemann).

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Η $\zeta(p)$ συγκλίνει για $p>1$.

Για $p=1$ έχουμε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία δεν συγκλίνει παρά το γεγονός ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

• Τηλεσκοπικές Σειρές

Ονομάζονται οι σειρές που γράφονται στη μορφή:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \alpha_1 - \lim_{n\to+\infty} \alpha_{n+1}.$$

Γιατί ισχύει ότι:

$$s_n = (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\dots+(a_n-a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Επομένως:

η σειρά συγκλίνει $\Leftrightarrow$ Υπάρχει το $\lim \alpha_{n+1}$

Επιπλέον Κριτήρια

• Θεωρούμε δύο σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ($x_n \geq 0$, $y_n > 0$). Αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \in \mathbb{R}$, τότε

$$\text{η } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ συγκλίνει} \iff \text{η } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{ συγκλίνει}$$

• (Κριτήριο Leibnitz)

Θεωρούμε μια <u>εναλλάσσουσα</u> σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n$$

για την οποία: $|\alpha_n| \geq |\alpha_{n+1}|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Τότε η σειρά συγκλίνει