ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών έτσι και για τις συναρτήσεις η έννοια του ορίου αναζητά την ύπαρξη ή μη μιας τάσης να πλησιάζουν οι τιμές της συνάρτησης κάπου καθώς τα πρότυπα συγκεντρώνονται γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \text{Για κάθε } \varepsilon>0 \text{ υπάρχει } \delta>0 \text{ έτσι ώστε αν } |x-x_0|<\delta, \text{ τότε } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Απαιτούμε δηλαδή όταν το x είναι πολύ κοντά στο x_0 ($|x-x_0|<\delta \iff x_0-\delta < x < x_0+\delta$), τότε η $f(x)$ να είναι πολύ κοντά στο A ($|f(x)-A|<\varepsilon \iff A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$) και αυτή η "κατάσταση" να επιτυγχάνεται όσο κοντά στο A ($\forall\, \varepsilon>0$) κι αν θέλουμε να βρεθούμε.

Ο υπολογισμός ορίων συναρτήσεων βάσει του ορισμού αυτού είναι εξαιρετικά επίπονος γι' αυτό και χρησιμοποιούμε τις επόμενες βασικές ιδιότητες των ορίων:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

  $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

  $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda\cdot f(x)) = \lambda\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

  $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, αν $g(x)\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Παραδείγματα

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+1) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2\cdot\lim\limits_{x\to 2} x + 1 = 2^2-2\cdot 2+1 = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$

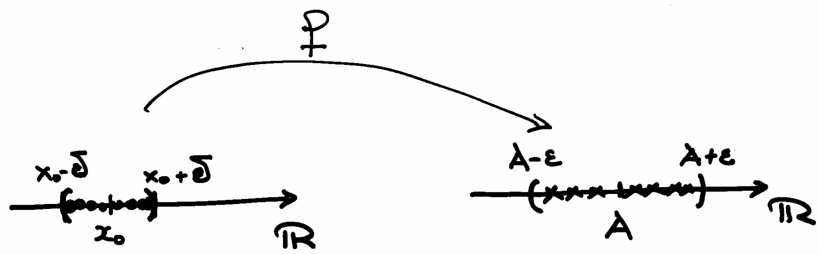
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} =$

$= 1.$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x+1} = \frac{\sin 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0.$

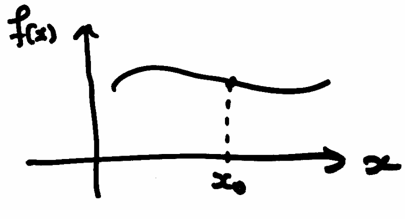
Η "γραφική αναπαράσταση" του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ θα μπορούσε να είναι η εξής



Όταν οι τιμές του πρωτότυπου x συγκεντρώνονται γύρω από το x_0, τότε οι εικόνες τους συγκεντρώνονται γύρω από το A.

Η συνάρτηση $f(x)$ θα ονομάζεται συνεχής στο σημείο x_0 αν ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της $f(x)$ δεν διακόπτεται στο x_0 αλλά είναι μία συνεχής καμπύλη:



Συνεχής συνάρτηση στο x_0

Μη συνεχής (ασυνεχής).

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, όπως και κάθε πολυώνυμο είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της αφού:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma) = \alpha \cdot x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = f(x_0)$$

2. Συνεχείς συναρτήσεις είναι επίσης:
   - Οι ρητές $\left(\dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} \right)$ στο πεδίο ορισμού τους.
   - Η εκθετική $y = e^x$ και η λογαριθμική $y = \ln x$, $x > 0$.
   - Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: ημx, συνx, εφx, σφx, $x \in \mathbb{R}$.
   - Κάθε συνδυασμός συνεχών συναρτήσεων (άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο, σύνθεση).

3. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 2x) = 0 \neq 1 = f(0).$$

Κάποιες μέθοδοι υπολογισμού ορίων

I. Ισοδύναμος ορισμός για το όριο μιας συνάρτησης είναι και ο εξής:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \text{Για κάθε ακολουθία } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ με } \lim_{n\to+\infty} a_n = x_0, \text{ ισχύει ότι } \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = A$$

Με τη βοήθεια αυτού του συμπεράσματος μπορούμε να έχουμε κυρίως "αρνητικά" αποτελέσματα για τα όρια: Να αποδεικνύουμε δηλαδή ότι κάποιο όριο <u>δεν</u> υπάρχει ή ότι υπάρχει αλλά <u>δεν</u> είναι ίσο με κάποιον συγκεκριμένο αριθμό.

<u>π.χ.</u>:

1. Το $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει γιατί:

Αν $x_n = 1-\frac{1}{n} \to 1$, $y_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$, τότε

αν υπήρχε το προηγούμενο όριο θα έπρεπε

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$$

Όμως

$$f(x_n) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}-1} = -n \to -\infty$$

$$\neq$$

$$f(y_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}-1} = n \to +\infty$$

2. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x=0$, αφού κάτι τέτοιο θα απαιτούσε: $\lim\limits_{x \to 0} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Όμως επιλέγοντας: $x_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0$, παρατηρούμε ότι

$$f(x_n) = \eta\mu\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \pi/2}}\right) = \eta\mu\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu(\pi/2) = 1 \neq 0$$

II. ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ.

Αν στο όριο της συνάρτησης $f(x)$ περιορίσουμε την σύγκλιση $x \to x_0$ μόνο για τιμές μικρότερες του x_0:

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

τότε έχουμε το <u>αριστερό πλευρικό όριο</u> της $f(x)$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Αντίστοιχα, αν θεωρούμε ότι το x συγκλίνει στο x_0 από μεγαλύτερες τιμές: $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε έχουμε το <u>δεξιό πλευρικό όριο</u> της $f(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

Παραδείγματα

1. Για την $f(x) = \begin{cases} x\cdot e^x + 1 & , x>0 \\ e^x & , x\le 0 \end{cases}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x\cdot e^x + 1) = 0\cdot e^0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (e^x) = e^0 = 1.$$

Άρα και $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

2. Για την $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2x-|x|}$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \underset{|x|=x,\ \text{αφού } x>0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{x+x}{2x-x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{x} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \underset{|x|=-x,\ \text{αφού } x<0}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{x-x}{2x+x} = 0.$$

Άρα $(2\neq 0)$, το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.