Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και συνέχεια

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία κατηγορία πραγματικών συναρτήσεων οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και παρουσιάζουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, τις συνεχείς συναρτησεις. Εκτός απο τις συνεχείς συναρτήσεις, θα δούμε και ορισμένες άλλες κατηγορίες συναρτήσεων, τις συναρτήσεις που είναι συνεχείς κατά Hölder και τις κυρτές συναρτήσεις. Συναρτήσεις τέτοιου τύπου παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην θεωρία πιθανότητων και την στατιστική. Τα θέματα που καλύπτονται στην ενότητα αυτή είναι κλασσικά. Για την παρουσίαση των ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων βασιστήκαμε στους Johnsonbaugh and Pfaffenberger (1981), Labarre (2008).

4.2 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Μία απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση αν έχει την ιδιότητα να απεικονίζει κάθε στοιχείο του X σε ένα και μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{R}$.*

Ορισμός 4.2.2 (Πεδιο ορισμού-Πεδίο τιμών). *Το σύνολο X ονομαζεται το πεδίου ορισμού της f, ενω το σύνολο $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in X\}$, ονομάζεται πεδίο τιμων της f.*

Ορισμός 4.2.3 (Γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις. Ο γραμμικός συνδυασμός των f, g οριζεται ως η συνάρτηση $\lambda_1 f + \lambda_2 f : X \to \mathbb{R}$, με $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*

Ορισμός 4.2.4 (Γινόμενο συναρτήσεων). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις. Το γινόμενο των f, g οριζεται ως η συνάρτηση $fg : X \to \mathbb{R}$ με $(fg)(x) = f(x)g(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός 4.2.5 (Λόγος ή πηλίκο συναρτήσεων). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις. Ο λόγος ή το πηλίκο των f, g οριζεται ως η συνάρτηση $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in X$, για το οποίο ισχύει $g(x) \neq 0$.*

Ορισμός 4.2.6 (Σύνθεση συναρτήσεων). *Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g, ορίζεται ως η συνάρτηση $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός 4.2.7 (Αντίστροφη συνάρτηση). *Έστω $f : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Η αντίστροφη συνάρτηση της f, είναι η απεικόνιση $f^{-1} : Y \to X$, για την οποία ισχύει για κάθε $y \in Y$ ότι $f^{-1}(y) = x$ όπου το $x \in X$ είναι τέτοιο ώστε $f(x) = y$.*

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει οτι για να βρούμε την τιμή της αντίστροφης συναρτησης f^{-1} στο $y \in Y$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x. Η αντίστροφη απεικόνιση μιας συνάρτησης δεν είναι απαραίτητο να είναι συνάρτηση υπο την έννοια οτι δεν είναι απαραίτητο να είναι μονοσήμαντη.

Παράδειγμα 4.2.8. *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$, τότε $f^{-1}(y) = \ln(y)$.*

Ορισμός 4.2.9 (Μονότονες συναρτήσεις). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

1. *Η f ονομαζεται* **αύξουσα** *αν έχει την ιδιότητα $f(x_1) \geq f(x_2)$, για κάθε $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in X$. Αν η πρώτη ανισότητα ισχύει αυστηρά, τοτε η f ονομάζεται* **γνησίως αύξουσα**.
2. *Η f ονομαζεται* **φθίνουσα** *αν έχει την ιδιότητα $f(x_1) \leq f(x_2)$, για κάθε $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in X$. Αν η πρώτη ανισότητα ισχύει αυστηρά, τοτε η f ονομάζεται* **γνησίως φθίνουσα**.
3. *Μια συνάρτηση ονομάζεται* **μονότονη** *αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.*

Παράδειγμα 4.2.10. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι φθίνουσα αν οριστεί $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ και αύξουσα αν οριστεί $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Αν οριστεί $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα και συνεπώς δεν είναι μονότονη.*

Παράδειγμα 4.2.11. *Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι συνάρτηση και μάλιστα με τον ίδιο τύπο μονοτονίας.*

4.3 Όρια συναρτήσεων

Η έννοια του ορίου είναι μια θεμελιώδης έννοια για την ανάλυση. Στην ουσία η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης μας εκφράζει την συμπεριφορά της συνάρτησης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x πλησιάζει κάποια συγκεκριμένη τιμή x_0. Ας θυμίσουμε την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης.

Ορισμός 4.3.1 (Όριο συνάρτησης). *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $| f(x) - L | < \epsilon$ αν $| x - x_0 | < \delta$, $x_0, x \in X$.*

Φυσικά ο ορισμός αυτός προϋποθέτει ότι για το x_0 που μας ενδιαφέρει μπορούμε να βρούμε x τα οποία είναι αρκετά κοντά σε αυτό. Αν αυτό μπορεί να γίνει λέμε ότι το x_0 είναι **σημείο συσσώρευσης** του X.

Ορισμός 4.3.2 (Σημείο συσσώρευσης). *Ένας πραγματικός αριθμός x_0 ονομάζεται* **σημείο συσσώρευσης** *του $X \subset \mathbb{R}$, αν μπορεί να βρεθεί μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ (δηλαδή με την ιδιότητα $x_n \in X$ για κάθε n) τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.*

Τα σημεία συσσώρευσης ενός υποσυνολου X του $\mathbb{R}$ **δεν** είναι απαραίτητα στοιχεία του συνόλου αυτού.

Παράδειγμα 4.3.3. *Έστω $X = (0, 1]$. Κάθε σημείο $x_0 \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X. Για να το δείτε αυτό δεν έχετε παρά να κατασκευάσετε μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ η οποία να συγκλίνει στο x_0 (π.χ η $\{x_n\}$ με $x_n = x_0 - \frac{1}{2n}$). Όμως και το $x_0 = 0$ είναι επίσης σημείο συσσώρευσης του X (πάρετε ως παράδειγμα την ακολουθία $\{x_n\} \subset X$, με $x_n = \frac{1}{n}$) όμως $0 \notin X$. Προφανώς οι ακολουθίες που κατασκευάσαμε για να δείξουμε ότι τα x_0 είναι σημεία συσσώρευσης δεν είναι μοναδικες. Προσπαθείστε να βρείτε διαφορετικές επιλογές.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μπορεί να μας χαρακτηρίσει πολύ καλά την έννοια του ορίου συναρτήσεων κανοντας χρήση κατάλληλων ακολουθιών.

Πρόταση 4.3.4. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του X. Τότε, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ [1], έχουμε ότι $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Θα δείξουμε οτι $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει οπότε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$. Τότε, υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο x, $|x - x_0| < \delta$, έτσι ώστε να ισχύει $|f(x) - L| > \epsilon$. Αυτο ισχύει για κάθε $\delta > 0$, συνεπώς θα ισχύει και για δ της μορφής $\delta_n = \frac{1}{n}$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}^+$. Επιλέγουμε λοιπόν κάποιο $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, και σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει κάποιο x το οποίο εξαρτάται απο την επιλογή του $\delta = \delta_n$ και εντέλει απο την επιλογή του n, και το οποίο θα συμβολίσουμε x_n τέτοιο ώστε $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$, και $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Αυτό μπορούμε να το επαναλάβουμε για κάθε n και να μαζέψουμε σε ένα σύνολο όλα τα x_n τα οποία βρήκαμε, φτιάχνοντας με τον τρόπο αυτό μια ακολουθία $\{x_n\}$. Απο κατασκευής, η ακολουθία $\{x_n\}$ έχει την ιδιότητα $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, αλλά υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ωστε για κάθε n να ισχύει $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Το τελευταίο μας λέει ότι η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ **δεν** συγκλίνει στο L. Βρήκαμε λοιπόν μια ακολουθία $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ αλλά $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq L$, άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Κατά συνέπεια, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

[1] και $x_n \neq x_0$, για κάθε n

Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Θα δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, απο τον Ορισμό 4.3.1, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Επίσης, εφόσον η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x_0, υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε αν $n > N$ να έχουμε ότι $|x_n - x_0| < \delta$. Συνεπώς, για $n > N$ θα έχουμε $|f(x_n) - L| < \epsilon$ και απο αυτό βγαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. ■

Η Πρόταση 4.3.4 είναι πολύ χρήσιμη αν χρειαστεί να δείξουμε ότι μια συνάρτηση **δεν** έχει έχει όριο σε κάποιο σημείο.

Παράδειγμα 4.3.5. *Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Αν το όριο υπήρχε, τότε απο την Πρόταση 4.3.4, για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία συγκλίνει στο 0, η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ θα έχει το ίδιο όριο. Ας επιλέξουμε πρώτα την ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο 0. Η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ έχει γενικό όρο $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και είναι συνεπώς η σταθερή ακολουθία και $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Ας επιλέξουμε κατόπιν την ακολουθία $\{\bar{x}_n\}$ με γενικό όρο $\bar{x}_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$ η οποία έχει επίσης την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = 0$. Η ακολουθία $\{f(\bar{x}_n)\}$, έχει γενικό όρο $f(\bar{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και είναι συνεπώς η σταθερή ακολουθία, άρα $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = 0$. Βρήκαμε λοιπόν δύο ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 για τις οποίες η διαβεβάιωση της Πρότασης 4.3.4* **δεν** *ισχύει, κατά συνέπεια, το οριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.*

Επίσης, η Πρόταση 4.3.4 μπορεί να μας βοηθήσει να παράγουμε μια άλγεβρα των ορίων για τα όρια συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη άλγεβρα των ορίων για τις ακολουθίες.

Πρόταση 4.3.6 (Άλγεβρα των ορίων για συναρτήσεις). *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσωρευσης του X, και $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ο γραμμικός συνδυασμός των f, g έχει όριο στο σημείο x_0,*
$$\lim_{x\to x_0} (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 \lim_{x\to x_0} f(x) + \lambda_2 \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2, \ \ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Το γινόμενο των f, g έχει όριο στο σημειο x_0,*
$$\lim_{x\to x_0} (f\, g)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = L_1 L_2.$$

3. *Αν επιπλέον $L_2 \neq 0$, τότε ο λόγος των f, g έχει όριο στο σημείο x_0,*
$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.4 και την Πρόταση 2.3.7 για την άλγεβρα των ορίων ακολουθίων. Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Πρόταση 4.3.7 (Όριο σύνθετης συνάρτησης). *Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι x_0 σημείο συσσωρευσης του X και ότι υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το y_0 είναι σημείο συσσώρευσης του Y και υπάρχει το $lim_{y\to y_0} f(y) = L$. Τότε, το υπάρχει το όριο της $f \circ g$ στο x_0 και*
$$\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y) = L.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.4 και την Πρόταση 2.3.7 για την άλγεβρα των ορίων ακολουθίων. Αφήνεται σαν άσκηση. ■

4.4 Συνεχείς συναρτήσεις

Μία συνάρτηση λέμε ότι είναι συνεχής αν μικρές αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή δεν επιφέρουν μεγάλες αλλαγές στην τιμή της συνάρτησης. Η συνέχεια μπορεί να οριστεί σαν μία τοπική ιδιότητα, δηλαδή σαν μία ιδιότητα η οποία ισχύει κοντά σε ένα σημείο x_0.

Ορισμός 4.4.1. *Έστω μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$, και $x_0 \in X$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί κάποιο δ τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε ότι είναι συνεχής στο X.*

Στον παραπάνω ορισμό το ϵ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, αρκεί το δ να γίνει αντιστοίχως αρκετά μικρό. Εν γένει το δ δεν είναι ανεξάρτητο απο την επιλογή του x_0 και του ϵ, δηλαδή $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$.

Η έννοια της συνέχειας συνδέεται πολύ άμεσα με την έννοια του ορίου σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι f συνεχής. Ας πάρουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Εφόσον η f είναι συνεχής, απο τον Ορισμό 4.4.1, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ αν $|x - x_0| < \delta$. Αφού $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, θα υπάρχει N τέτοιο ώστε $| x_n - x_0 | < \delta$ για $n > N$. Τότε όμως, απο την συνέχεια της f, θα ισχύει και $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ για $n > N$ συνεπώς $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι για **κάθε** ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ αλλά η f **δεν** είναι συνεχής στο x_0. Τότε, θα υπάρχει $\epsilon^* > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $|x - x_0| < \delta$ να συνεπάγεται ότι $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon^*$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ ας επιλέξουμε ως $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$. Εν γένει το x της παραπάνω φράσης θα εξαρτάται απο το n γι αυτό και θα το συμβολίσουμε με x_n. Έτσι λοιπόν έχουμε ότι θα υπάρχει $\epsilon^* > 0$ τέτοιο ώστε για $\delta_n = \frac{1}{n}$ να υπάρχει $x_n \in X$ έτσι ώστε $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ να συνεπάγεται ότι $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon^*$. Μπορούμε να σκεφτούμε τα x_n σαν όρους μίας ακολουθία πραγματικών αριθμών στο X, της $\{x_n\} \subset X$, η οποία απο κατασκευής είναι τέτοια ώστε $| x_n - x_0 | < \frac{1}{n}$, γεγονός το οποίο μας εξασφαλίζει ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Σύμφωνα με την υπόθεση μας θα πρέπει να ισχύει και $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ (άρα και για $\epsilon = \epsilon^*$) θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}^+$, τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει ότι $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon^*$ το οποίο όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon^*$. ■

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν ορισμένες ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες τις οποίες κληρονομούν απο την άλγεβρα των ορίων.

Πρόταση 4.4.3 (Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων). *Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in X$ τότε*

1. *$\lambda_1 f + \lambda_2 g$ συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*
2. *fg συνεχής στο x_0*
3. *$\frac{f}{g}$ συνεχής στο x_0 αν $g(x_0) \neq 0$.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.4 και την Πρόταση 2.3.7 για την άλγεβρα των ορίων ακολουθίων. Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Τέλος και η σύνθεση μιας συνεχούς συνάρτησης με μία συνεχή συνάρτηση είναι και αυτή συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση 4.4.4 (Συνέχεια σύνθετης συναρτήσης). *Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X, $g(x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του Y, η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεση των συναρτήσεων αυτών, $f \circ g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.*

Απόδειξη: Εφόσον η g είναι συνεχής στο $x_0 \in X$, απο τον Ορισμό 4.4.1, για κάθε $\epsilon_1 > 0$ υπάρχει κάποιο δ_1 τέτοιο ώστε $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon_1$ για $|x - x_0| < \delta_1$. Επίσης εφόσον η f είναι συνεχής στο $g(x_0) \in Y$, απο τον Ορισμό 4.4.1, για κάθε $\epsilon_2 > 0$ υπάρχει κάποιο δ_2 τέτοιο ώστε $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon_2$ για $|x - g(x_0)| < \delta_2$. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε επιλέξει οποιαδήποτε $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ και έχουμε βρει τα αντίστοιχα $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παραπάνω, τα οποία και ξαναγράφουμε για ευκολία του αναγνώστη

$$\forall \epsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \text{τέτοιο ωστε} \ |g(x) - g(x_0| < \epsilon_1, \ \text{για} \ |x - x_0| < \delta_1, \tag{4.1}$$

$$\forall \epsilon_2 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \text{τέτοιο ωστε} \ |f(g(x)) - f(g(x_0)| < \epsilon_2, \ \text{για} \ |g(x) - g(x_0)| < \delta_2. \tag{4.2}$$

Έστω τώρα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $\epsilon_2^* = \epsilon$ στην (4.2) οπότε υπάρχει $\delta_2^* > 0$ τέτοιο ώστε αν επίλέξουμε $|g(x) - g(x_0)| < \delta_2^*$ τότε $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon_2^* = \epsilon$, δηλαδή η $f \circ g$ έχει μικρές μεταβολές για μικρές μεταβολές του $g(x)$ κοντά στην $g(x_0)$. Αυτό δεν είναι επαρκές για τον σκοπό μας, εφόσον εμάς μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν μικρές μεταβολές στο x οδηγούν σε μικρές μεταβολές στην τιμή της $f \circ g$. Στη σημείο αυτό θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την συνέχεια της g. Σύμφωνα με την (4.1), για οποιοδήποτε ϵ_1 άρα και για $\epsilon_1^* = \delta_2^*$, υπάρχει $\delta_1^* > 0$ τέτοιο ώστε $|g(x) - g(x_0| < \epsilon_1^* = \delta_2^*$ για $|x - x_0| < \delta_1^*$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta_1^* > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(g(x)) - f(g(x_0)| < \epsilon$ αν $|x - x_0| < \delta$. Άρα η σύνθεση είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0. ■

4.5 Το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

Το ακόλουθο θεώρημα το οποίο οφείλεται, στην μορφή που παρουσιάζεται εδώ, στον Bolzano δίνει μία πολύ σημαντικη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων. Η ιδιότητα αυτή λέει ότι μία συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ θα παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος $(f(a), f(b))$ ή $(f(b), f(a))$ ανάλογα με το αν ισχύει $f(a) < f(b)$ ή το αντιθετο.

Πρόταση 4.5.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) < c$ και $f(b) > c$ τότε υπάρχει κάποιο $x^* \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = c$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c = 0$. Θέλουμε λοιπόν να δειξουμε ότι αν $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$ τότε υπάρχει κάποιο $x^* \in [a, b]$ (τουλάχιστον ένα) τέτοιο ώστε $f(x^*) = 0$. Για την απόδειξη, ας θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\} \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό είναι μη κενό, εφόσον τουλάχιστον το a ανήκει σε αυτό. Επίσης είναι και φραγμένο (αφού κάθε στοιχείο του θα πρέπει να είναι μικροτερο απο το b). Συνεπώς, απο το βασικό μας αξίωμα, το σύνολο αυτό θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το οποίο ας συμβολίζουμε με x^*, δηλαδη έστω $x^* := \sup(X)$. Θα δείξουμε ότι για το x^* αυτό θα ισχύει $f(x^*) = 0$.

Το x^* είναι σημείο συσσώρευσης του X. Κατά συνέπεια, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Εφόσον $\{x_n\} \subset X$, ισχύει ότι $f(x_n) < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και συνεπώς, αν η ακολουθία $\{f(x_n\}$ συγκλίνει θα πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$. Όμως, η f ειναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα και στο $x^* \in [a, b]$. Απο την Πρόταση 4.4.2, θα έχουμε οτι η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$. Άρα, $f(x^*) \leq 0$.

Απο την άλλη πλευρά όμως μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{\bar{x}_n\} \subset [a, b] \setminus X$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x^*$. Μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία με γενικό όρο $\bar{x}_n = \min\left(x^* + \frac{1}{n}, b\right)$. Εφόσον κάθε όρος της ακολουθίας αυτής **δεν** ανήκει στο X, θα έχουμε απο τον ορισμό του X, ότι $f(\bar{x}_n) \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Αν λοιπόν η ακολουθία αυτή συγκλίνει θα πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) \geq 0$. Όμως απο την συνέχεια της f στο x^* και απο την Πρόταση 4.4.2, θα έχουμε οτι η ακολουθία $\{f(\bar{x}_n)\}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = f(x^*)$. Άρα, $f(x^*) \geq 0$.

Εφόσον ισχύει ταυτόχρονα $f(x^*) \leq 0$ και $f(x^*) \geq 0$ καταλήγουμε ότι $f(x^*) = 0$ ■

Σχόλιο 4.5.2. *Προσοχή σε ενα λεπτό σημείο στην παραπάνω απόδειξη. Το x^* είναι μοναδικό εφόσον είναι το $\sup$ του συνόλου X. Αυτό όμως* **δεν** *σημαίνει οτι είναι και το μοναδικό σημείο μηδενισμού της συνάρτησης f! Σκεφτείτε ενα παράδειγμα.*

Παράδειγμα 4.5.3. *Δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ έχει λύση x^* στο διάστημα $[0, 2]$. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = -2 < 0$ και $f(2) = 2 > 0$. Συνεπώς απο το παραπάνω θεώρημα θα ισχύει ότι υπάρχει $x^* \in [0, 2]$ έτσι ώστε $f(x^*) = 0$. Πράγματι, $x^* = \sqrt{2} = 1.414$.*

Η διαδικασια του Παραδείγματος 4.5.3 μπορεί να γενικευθεί και να οδηγήσει σε μια αριθμητική μέθοδο για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $f(x) = c$ όπου $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Η μέθοδος αυτή είναι η μέθοδος της διχοτόμου.

Παράδειγμα 4.5.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, και ότι θέλουμε να βρούμε την λύση της εξίσωσης $f(x) = c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Επειδή $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, με $F(x) = f(x) - c$, για κάθε $x \in [a, b]$, είναι επίσης συνεχής, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρησουμε το πρόβλημα της εύρεσης ενος $x^* \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = 0$. Θεωρούμε επίσης ότι $f(a)f(b) < 0$.*

Απο την υπόθεση $f(a)f(b) < 0$, βλέπουμε ότι η f αλλάζει πρόσημο σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[a, b]$. Απο την Πρόταση 4.5.1 θα υπάρχει ενα σημείο μηδενισμού x^* της f στο $[a, b]$. Πηγαίνουμε τώρα στο μέσο του διαστήματος αυτού, το σημείο $\frac{a+b}{2}$. Το x^* είτε θα ανήκει στο $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, είτε στο $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Ας υποθέσουμε ότι $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, οπότε υπάρχει ένα σημείο μηδενισμού στο $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Παίρνουμε το περιορισμό της f στο διάστημα αυτό, το οποίο συμβολίζουμε με $[a_1, b_1] := \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία χρησιμοποιώντας τώρα τα διαστήματα $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, είτε στο $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Επιλέγουμε αυτό το διάστημα στα άκρα του οποίου εχουμε αλλαγή προσήμου της συνάρτησης έστω π.χ. το $[a_2, b_2] := \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ και συνεχίζουμε. Σε κάθε βήμα, έχουμε εξασφαλίσει *ότι υπάρχει ενα σημείο μηδενισμού της f σε ενα διάστημα το μήκος του οποίου γίνεται ολο και πιο μικρό. Αυτό μας δίνει ολο και καλύτερες προσεγγίσεις της λύσης της εξίσωσης $f(x) = 0$. Σταματάμε οταν το μήκος του διαστήματος που περιέχει το σημείο μηδενισμού έχει γίνει μικρότερο απο την επιθυμητή ακρίβεια της προσέγγισης της λύσης. Προσπαθείστε να υλοποιήσετε την επαναληπτική αυτή διαδικασία στον υπολογιστή.*

4.6 Το θεώρημα του μεγίστου.

Πρόταση 4.6.1. *Μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι φραγμένη. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε, για κάθε $n \geq 1$ θα υπάρχει $x_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $\mid f(x_n) \mid > n$. Τα x_n αυτά για διαφορετικές επιλογές του $n \in \mathbb{N}^+$ απαρτίζουν μια ακολουθία $\{x_n\} \subset [a, b]$, η οποία προφανώς είναι φραγμένη, οπότε απο το θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία έστω την $\{x_{n_k}\}$. Ας ονομάσουμε x_0 το όριο της. Απο κατασκευής, για την υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ ισχύει ότι και για την πλήρη ακολουθία $\{x_n\}$, δηλαδή,

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N}^+, \ \ |f(x_{n_k}| > n_k, \tag{4.3}$$

Απο άλλη πλευρά, απο την συνέχεια της f θα πρέπει $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, όπου $f(x_0) \in \mathbb{R}$, οπότε για κάθε ϵ θα υπάρχει κάποιο $K \in\mathbb{N}^+$ τέτοιο ώστε για $k \geq K$ να ισχύει $\mid f(x_{n_k}) - f(\xi) \mid < \epsilon$ συνεπώς και $f(x_{n_k}) < \epsilon + f(x_0)$. Το δεξιό φράγμα είναι ανεξάρτητο του k και κατά επέκταση και του n_k για αρκετά μεγάλο k, συνεπώς

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0, \ \text{ υπάρχει } K \in \mathbb{N}^+, \ \text{ τέτοιο ώστε } f(x_{n_k}) < \epsilon + f(x_0), \ \ k > K. \tag{4.4}$$

Οι (4.3) και (4.4) αντικρούουν η μία την άλλη συνεπώς η υπόθεση μας δεν ισχύει. Άρα η f είναι φραγμένη. ■

Θεώρημα 4.6.2. *Έστω $f : [a, b] \to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Η f επιδέχεται μέγιστο και ελάχιστο, δηλαδή υπάρχουν x_* και $x^* \in [a, b]$ τέτοια ώστε*

$$f(x_*) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x),$$
$$f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε τώρα την ύπαρξη κάποιου $x^* \in [a, b]$ τέτοιου ώστε $f(x) \leq f(x^*)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δηλαδή $f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο $Y = \{y \mid y = f(x), \ a \leq x \leq b\}$ δηλαδή το πεδίο τιμών της συνάρτησης f. Το σύνολο Y είναι μη κενο και φραγμένο (απο την Πρόταση 4.6.1) οπότε θα έχει ελαχιστο άνω φράγμα, $M := \sup(Y)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{x_n\} \subset [a, b]$ η οποία να έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Αν υπολογίσουμε την συνάρτηση f στην ακολουθία αυτή, δηλαδή πάρουμε την ακολουθία $\{f(x_n)\} \subset Y$, η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο M, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Η ακολουθία $\{x_n\}$ ονομάζεται μεγιστοποιητική ακολουθία. Στο σημείο αυτό θέλει λίγο προσοχη: Η ακολουθία $\{x_n\}$ έχει κατασκευαστεί ετσι ωστε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n$. Στο σημείο αυτό μπορούμε να επικαλεστούμε όμως την βοήθεια του Θεωρηματος Bolzano-Weierstrass , σύμφωνα με το οποίο, ακόμα και αν η μεγιστοποιητικη ακολουθία $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει, θα υπάρχει τουλάχιστον μια υποακολουθία της $\{x_{n_k}\}$ η οποία θα συγκλίνει. Έστω $\bar{x}$ το όριο της υποακολουθίας αυτής, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Θα δείξουμε οτι το $\bar{x}$ είναι το x^* το οποίο ζητούμε. Εφόσον η ακολουθία $\{f(x_n\}$ συγκλίνει, και η υποακολουθία της $\{f(x_{n_k})\}$ θα συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο με την αρχική ακολουθία (βλ. Πρόταση 2.3.5). Η αρχική ακολουθία απο κατασκευής συγκλίνει στο M άρα

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M. \tag{4.5}$$

Θυμηθείτε όμως ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.4.2 στην ακολουθία $\{x_{n_k}\}$ (δηλαδή στην συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{x_n\}$) θα έχουμε οτι

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k} = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\bar{x}). \tag{4.6}$$

Συγκρίνοντας τις (4.5) και (4.6) και επικαλούμενοι την μοναδικότητα του ορίου, καταλήγουμε στο ότι $f(\bar{x}) = M$, οπότε το $\bar{x}$ έχει τις ιδιότητες του ζητούμενου x^* και ως εκ τούτου $x^* = \bar{x}$.

Το μόνο σημείο το οποίο μένει ακόμα να δικαιολογήσουμε, είναι ο ισχυρισμός μας ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μεγιστοποιητική ακολουθία[2]. Αυτό μπορει να γίνει με τον ακόλουθο συλλογισμό: Απο τον ορισμό του

[2]Η μεγιστοποιητική ακολουθία δεν είναι απαραίτητα μοναδική!

ελάχιστου άνω φράγματος γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ το $M - \epsilon$ δεν θα είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Y. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε κάποιο x το οποίο εξαρτάται απο το ϵ τέτοιο ώστε $M - \epsilon < f(x) \leq M$. Αν επιλέξουμε ως $\epsilon = \frac{1}{n}$, τότε τα αντίστοιχα x με την ιδιότητα αυτή θα τα συμβολίζουμε με x_n και για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ θα έχουμε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\} \subset [a, b]$ για την οποία θα ισχύει $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Η ακολουθία $\{f(x_n\}$ συγκλίνει στο M, άρα η $\{x_n\}$ ειναι μεγιστοποιητική ακολουθία.

Όμοια μπορούμε να εργαστούμε και για το ελάχιστο (αφήνεται σαν άσκηση). ■

Σχόλιο 4.6.3. *Το ότι η f είναι φραγμένη μπορεί να δειχθεί και με την παρακάτω εναλλακτική προσέγγιση. Μπορούμε πρώτα να δείξουμε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in [a, b]$ τότε είναι φραγμένη στο ανοιχτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τοτε για κάθε $x_0 \in [a, b]$ θα υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη σε αυτό. Αν το διάστημα $[a, b]$ είναι μία πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων της μορφής $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ για $x_0 \in [a, b]$ τότε απο το αποτέλεσμα αυτό θα είχαμε αμέσως το ότι η f θα είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Αν όμως αυτό δεν συμβαίνει και η ένωση είναι μία άπειρη ένωση το παραπάνω επιχείρημα μπορεί και να μη ευσταθεί. Απο την δύσκολη αυτή θέση μας βγάζει ένα πολυ σημαντικό αποτέλεσμα της ανάλυσης, το θεώρημα των Heine-Borel σύμφωνα με το οποίο το διάστημα $[a, b]$ μπορεί να καλυφθεί απο ένα πεπερασμένο πλήθος απο ανοιχτά διαστήματα της μορφής $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$ για $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \cdots, n$. Το θεώρημα αυτό θα το συναντήσουμε στην γενικότερη του μορφή στην συνέχεια, όταν μιλήσουμε για γενικότερους μετρικούς χώρους, και όταν συζητήσουμε την πολύ σημαντική ιδιότητα της* **συμπάγειας**.

Παράδειγμα 4.6.4. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = 1 + exp(-\frac{1}{x})$ στο διάστημα $X = (0, 1]$. Το $\inf_{x \in X}(f(x)) = 1$ αλλά στην περίπτωση αυτή δεν ταυτίζεται με το $\min_{x \in X} f(x)$. Για την ακρίβεια $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει εδώ γιατί το X δεν είναι κλειστό διαστημα. Εξαιτίας αυτού, για μια ακολουθία $\{x_n\} \in X$ για την οποία ισχύει $\lim_{n \to \infty} x_n = x$* ,**δεν** *ισχύει απαραίτητα ότι $x \in X$ και συνεπώς το θεώρημα μπορεί να μην ισχύει.*

Παράδειγμα 4.6.5. *Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x) = \mid x - 1 \mid$ ορισμένη στο $X = [0, 1)$. Για την συνάρτηση αυτή δεν ισχύει το θέωρημα γιατί $\inf_{x \in X} f(x) = 0$ αλλά η συνάρτηση αυτή είναι αυστηρά θετική για κάθε $x \in X$. Για να ισχύει το θεώρημα θα πρέπει να οριστεί η συνάρτηση αυτή στο $Y = [0, 1]$, το οποίο είναι κλειστό.*

Παράδειγμα 4.6.6. *Το θεώρημα επίσης μπορεί να μην ισχύει και όταν το διάστημα δεν είναι φραγμένο. Σαν παράδειγμα πάρετε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x$ η οποία δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.*

Το θεώρημα του μεγίστου είναι εξαιρετικά χρήσιμο σε πάρα πολλές εφαρμογές οι οποίες εχουν να κάνουν με την βελτιστοποίηση. Επίσης, γενικεύεται και σε περιπτώσεις που έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ή ακόμα και συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους όπως θα δούμε και στην συνέχεια των διαλέξεων αυτών. Όμως, χρησιμοποιείται και σε πολλές περιπτώσεις που θέλουμε να δείξουμε ποιοτικά χαρακτηριστικά συνεχών συναρτήσεων. Σαν ενα απο τα πολλά αυτά παραδείγματα, παραθέτουμε την ακόλουθη πρόταση η οποία κάνει χρήση του θεωρήματος του μεγίστου για να μας εξασφαλίσει την συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης κάτω απο ορισμένες συμπληρωματικές συνθήκες.

Πρόταση 4.6.7 (Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ αυστηρά μονότονη και συνεχής συνάρτηση και $X = [a, b]$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι και αυτή αυστηρά μονότονη (με την ίδια μορφή μονοτονίας) και συνεχής.*

Απόδειξη: Ας κάνουμε την αποδειξη για την περίπτωση όπου f ειναι αυστηρά αύξουσα, δηλαδή για την περίπτωση $f(x_2) > f(x_1)$ αν $x_1 > x_2$.
Η ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και η μονοτονία της είναι άμεσο επακόλουθο της μονοτονίας της ίδιας της f, και αφήνεται σαν άσκηση.
Ας δείξουμε την συνέχεια της f^{-1}. Σύμφωνα με το θεώρημα του μεγίστου (βλ. Πρόταση 4.6.2) εφόσον η f είναι συνεχής στο διάστημα $Q = [a, b]$ θα έχει μέγιστο και ελάχιστο, δηλαδή θα επιτυγχάνει το sup και το inf της. Λόγω της μονοτονίας το μέγιστο θα είναι το $f(b)$ και το ελάχιστο το $f(a)$. Όλες οι τιμές της f θα βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[f(a), f(b)]$.
Ας πάρουμε οποιοδήποτε $y \in [f(a), f(b)]$. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής (βλ. Πρόταση 4.5.1) θα υπάρχει κάποιο $c \in [a, b]$ το οποίο και λόγω της μονοτονίας της f θα είναι μοναδικό, τέτοιο ώστε $f(c) = y$.
Για κάθε $\epsilon > 0$ ας ορίσουμε το

$$\rho := \min\{f(c) - f(c - \epsilon),\ f(c + \epsilon) - f(c)\} = \min\{y - f(c - \epsilon),\ f(c + \epsilon) - y\}$$

Ας επιλεξουμε δ, τέτοιο ώστε $0 < \delta < \rho$. Αν $\mid f(x) - y \mid < \delta$ τότε απο τον ορισμό του δ μπορούμε να δούμε ότι $f(c - \epsilon) < f(x) < f(c + \epsilon)$ και απο την μονοτονία της f, $c - \epsilon < x < c + \epsilon$.
Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ ($\delta < \rho$) τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ για το οποίο $\mid f(x) - y \mid < \delta$ να ισχύει $\mid x - c \mid < \epsilon$. Αυτό όμως σημαίνει και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $[f(a), f(b)]$. ■

4.7 Ομοιόμορφη συνέχεια.

Στον Ορισμό 4.4.1 της συνέχειας, η επιλογή των ϵ και δ εξαρτάται απο την επιλογή του x_0, δηλαδή $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$. Εν γένει, για δεδομένο ϵ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό της συνέχειας με το ίδιο δ για κάθε $x_0 \in X$. Το αν αυτό είναι εφικτό ή οχι, εξαρτάται απο την μορφή της συνάρτησης f που εξετάζουμε αλλά και απο το πεδίο ορισμού X της συνάρτησης. Αν για κάποια συνάρτηση f, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Ορισμό 4.4.1 για κάθε $x_0 \in X$ και για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ κατά τρόπο ώστε το αντίστοιχο δ εξαρτάται μόνο απο την επιλογή του ϵ αλλά οχι απο την επιλογή του x_0, δηλαδη για οποιοδήποτε δεδομένο $\epsilon > 0$ μπορούμε να επαληθεύσουμε την συνθήκη του Ορισμού 4.4.1 σε κάθε $x_0 \in X$ για το ίδιο $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός 4.7.1 (Ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης). *Η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο X αν υπάρχει δ τέτοιο ώστε για κάθε $x_0, x \in X$ για τα οποία $\mid x - x_0 \mid < \delta$ ισχύει $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$.*

Πρόταση 4.7.2. *Αν μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X, τότε είναι και συνεχής.*

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα (δειτε την Πρόταση 4.7.9).

Σχόλιο 4.7.3. *Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για κάποιο επιλεγμένο ϵ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο δ για όλο το διάστημα X. Αυτό θα γίνει πιο ξεκάθαρο αν γράψουμε τους δύο ορισμούς χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό με 'ποσοδείκτες ' (δηλαδή τον συμβολισμό $\forall$ και $\exists$. Στην μορφή αυτή λοιπόν, ο Ορισμός 4.4.1 για την συνέχεια της f στο X γίνεται*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \forall\, x_0 \in X\ \exists\, \delta > 0\ :\ |f(x) - f(x_0| < \epsilon \ \text{για}\ |x - x_0| < \delta. \tag{4.7}$$

Ο Ορισμός 4.7.1 σχετικά με την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο X γίνεται

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x_0 \in X\ |f(x) - f(x_0| < \epsilon \ \text{για}\ |x - x_0| < \delta. \tag{4.8}$$

Οι δυο αυτοί ορισμοί είναι διαφορετικοί στο ότι στον (4.7) πρώτα επιλέγουμε τα ϵ, x_0 και βάσει αυτών μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ τέτοιο ώστε αυτό που ερχεται μετά το : να ισχύει, ενω στον (4.8)πρώτα επιλέγουμε μόνο το ϵ και βάσει αυτού μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\epsilon)$ τέτοιο ώστε αυτό που ερχεται μετα το : να ισχύει δηλαδή για οποιοδήποτε $x \in X$ αν $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Προσέξτε τι διαφορά μπορεί να κάνει η μεταφορά του $\forall$ μετά το :!

Έχει επίσης ενδιαφέρον να γράψουμε και την **άρνηση** *της συνθήκης (4.8), η οποία μας δίνει και ένα κριτήριο σχετικά με το πότε μία συνάρτηση* **δεν** *είναι ομοιόμορφα συνεχής: Υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ να ισχύει $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid > \epsilon$.*

Σχόλιο 4.7.4. *Ο ακόλουθος συλλογισμός μπορεί να σας βοηθήσει στο να κατανοήσετε πιο εύκολα την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας. Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $x_0 \in X$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0| < \epsilon$ αν $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$. Αν επιλέγαμε ως $\delta^* = \delta^*(\epsilon) = \inf_{x_0 \in X} \delta(\epsilon, x_0)$ το παραπάνω θα ίσχυε για κάθε $x_0 \in X$. Δηλαδη για κάθε $\epsilon > 0$, είχαμε $|f(x) - f(x_0| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta^*$ και αυτό θα ίσχυε για το ίδιο $\delta^*(\epsilon)$ για κάθε $x_0 \in X$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση f θα ήταν ομοιόμορφα συνεχής. Το δ^* εφόσον ορίστηκε σαν το $\inf$ του συνόλου τω δ για τα οποία ικανοποιείται ο Ορισμός 4.4.1 υπάρχει πάντοτε. Τι μπορεί λοιπόν να πάει λάθος στο παραπάνω; Το γεγονος ότι μπορεί $\delta^* = 0$, οπότε αυτή η επιλογή δεν ικανοποιεί και τον Ορισμό 4.7.1 και άρα η f μπορεί να είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.*

Παράδειγμα 4.7.5. *Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \epsilon$ και να δούμε ότι ο ορισμός 4.7.1 ισχύει: αν για κάθε $x, x_0 \in\mathbb{R}$ επιλέξουμε $\mid x - x_0 \mid \delta$ τότε $\mid f(x) - f(x_0) \mid = \mid x - x_0 \mid < \delta = \epsilon$.*

Παράδειγμα 4.7.6. *Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$.*

Για οποιοδήποτε $x_0 \in (0, 1)$ και $x_0 + \delta \in (0, 1)$ μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\mid f(x_0) - f(x_0 + \delta) \mid = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)}.$$

Αν πάρουμε x_0 κοντά στο 0 η ποσότητα αυτή μπορεί να γίνει όσο μεγάλη επιθυμούμε. Συνεπώς, η συνάρτηση αυτή δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισοδύναμα, ας επιλέξουμε κάποιο $\epsilon > 0$ και ας προσπαθήσουμε να βρούμε κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x_0, x_0 + \delta \in (0, 1)$. Απο την παραπάνω εκτίμηση και θέτωντας $\epsilon = \frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}$ λύνοντας ως προς δ βρίσκουμε ότι

$$\delta = \delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon x_0^2}{1 - \epsilon x_0}.$$

Το δ αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλο το $(0, 1)$. Βλέπουμε οτι έχουμε πρόβλημα αν μας επιτρέπεται να πλησιάζουμε όσο κοντά επιθυμούμε το $x_0 = 0$, γιατί $\inf_{x_0 \in (0,1)} \delta(\epsilon, x_0) = 0$.

Παράδειγμα 4.7.7. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$.*

Για οποιαδήποτε $x_0, x \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$| f(x) - f(x_0) |=| x^2 - x_0^2 |=| x + x_0 | | x - x_0 |\leq 2 | x - x_0 |$$

Αν λοιπόν $| x - x_0 |< \delta$ τότε $| f(x) - f(x_0) |< 2\delta$. Για κάθε $\epsilon > 0$ λοιπόν αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ έτσι ώστε να έχουμε $| f(x) - f(x_0) |< \epsilon$ αρκεί $| x - x_0 |< \delta$, και το δ αυτό εξαρτάται απο το ϵ και όχι απο το x_0.

Παράδειγμα 4.7.8. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο δ τέτοιο ώστε αν $| x - x_0 |< \delta$ για κάθε $x, x_0 \in\mathbb{R}$ να ισχύει $| f(x) - f(x_0) |< \epsilon$. Πραγματικα, αν πάρουμε $x_0 = n$ και $x = n + \delta$ για κάθε $n \in\mathbb{N}^+$, τότε, $| f(x) - f(x_0) |= \delta(2n + \delta)$ το οποίο μπορεί να γίνει μεγαλύτερο απο οποιοδήποτε ϵ. Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η ακόλουθη πρόταση, που οφείλεται στον Heine, **συνδέει** τις συνεχείς συναρτήσεις με τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 4.7.9. *Έστω $X = [a, b]$ (κλειστό και φραγμένο διάστημα) και $f : X \to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο X. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής αλλά **όχι** ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, (βλ. Σχόλιο 4.7.3) θα υπάρχει $\epsilon^* > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x_0, x \in X$ για τα οποία να ισχύει $| x - x_0 |< \delta$ αλλά $| f(x) - f(x_0) |\geq \epsilon^*$. Αυτά τα x_0, x θα εξαρτώνται απο την επιλογή του δ. Αν πάρουμε λοιπόν $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in\mathbb{N}^+$ θα συμβολίσουμε τα x_0, x με $x_{0,n}, x_n$, και γι αυτά θα ισχύει οτι

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ \exists x_{0,n}, x_n \in X\ :\ |x_n - x_{0,n}| < \delta = \frac{1}{n} \text{ αλλά } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon^*. \tag{4.9}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τα x_n σαν μία ακολουθία $\{x_n\} \subset X$, η οποία είναι φραγμένη οπότε απο το θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ και έστω x^* το όριο της. Εφαρμόζουμε την (4.9) περνώντας στις υποακολουθίες $\{x_{n_k}\}$ και $\{x_{0,n_k}\}$ (η $\{x_{0,n_k}\}$ δεν είναι απαραίτητα συγκλίνουσα), και αυτό δίνει

$$\forall k \in \mathbb{N}^+,\ |x_{n_k} - x_{0,n_k}| < \delta = \frac{1}{n_k} \text{ αλλά } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon^*. \tag{4.10}$$

Χρησιμοποιούμε την συγκλίνουσα υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ και την συνέχεια της f η οποία μας εξασφαλίζει ότι $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Όπως σχολιάσαμε παραπάνω δεν γνωρίζουμε αν η $\{x_{0,n_k}\}$ συγκλίνει. Όμως, απο την κατασκευή της (βλ. (4.10)) έχουμε ότι $|x_{n_k} - x_{0,n_k}| < \frac{1}{n_k}$, και επειδή η $\{x_{n_k}\}$ συγκλίνει θα πρέπει να συγκλίνει και η x_{0,n_k} και μάλιστα να έχει το ίδιο όριο x^*. Ξανά απο την συνέχεια της f, έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} f(x_{0,n_k}) = f(x^*)$, οπότε $\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(x_{0,n_k})) = 0$ και συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $K \in \mathbb{N}^+$, τέτοιο ώστε $|f(x_{n_k}) - f(x_{0,n_k})| < \epsilon$ για $k > K$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει και για $\epsilon = \epsilon^*$ δηλαδή

$$\forall\ k > K,\ |x_{n_k} - x_{0,n_k}| < \delta = \frac{1}{n_k} \text{ και } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon^*. \tag{4.11}$$

Οι (4.10) και (4.11) αντικρούουν η μία την άλλη άρα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. Κατά συνέπεια, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. ■

4.8 Άνω και κάτω όριο συναρτήσεων

Με τρόπο αναλογο όπως για τις ακολουθίες μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες του ανω και κάτω ορίου ($\limsup$ και $\liminf$) μιας συνάρτησης σε κάποιο x_0.

Ορισμός 4.8.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*

1. *Ορίζουμε σαν άνω όριο της f στο x_0 την ποσότητα*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \inf_{\delta>0} \sup\{f(x) \mid |x-x_0|<\delta,\ x\in X,\ x\neq x_0\}.$$

2. *Ορίζουμε σαν κάτω όριο της f στο x_0 την ποσότητα*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) := \sup_{\delta>0} \inf\{f(x) \mid |x-x_0|<\delta,\ x\in X,\ x\neq x_0\}.$$

Στον παραπάνω ορισμό, πχ. για το $\limsup$, αρχικά επιλέγουμε κάποιο $\delta>0$ και για το δ αυτό υπολογίζουμε το sup της συνάρτησης f για όλα τα x τα οποία είναι δ-κοντά στο x_0 (δηλαδη για όλα τα $x\in X$ που ικανοποιούν την ανισότητα $x_0-\delta<x<x_0+\delta$) αποκλείοντας όμως το ίδιο το κεντρο του ανοιχτού αυτού διαστήματος ($x\neq x_0$). Ας ονομάσουμε $S(\delta)$ την ποσότητα αυτή. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή για κάθε $\delta>0$, παιρνουμε το σύνολο όλων των πιθανών $S(\delta)$, δηλαδή το $\mathcal{S}:=\{S(\delta)\mid \delta>0\}$ και κατόπιν παίρνουμε το inf του συνόλου αυτού. Αν η συνάρτηση f είναι φραγμένη τότε και τα αντίστοιχα σύνολα $\{f(x)\mid |x-x_0|<\delta,\ x\in X,\ x\neq x_0\}$, $\mathcal{S}$ είναι φραγμένα (και προφανώς μη κενά) άρα εχουν sup και inf αντιστοίχως, οπότε το $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ ορίζεται καλώς. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να σκεφτούμε και για το κάτω όριο.

Η έννοια του άνω και κάτω ορίου συναρτήσεων έχει και εναλλακτικό (και ισοδύναμο) ορισμό κάνοντας χρήση των ακολουθιών. Ο ορισμός αυτός μπορεί να είναι πολύ χρήσιμος σε εφαρμογές.

Ορισμός 4.8.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*

1. $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) = L_s$ *αν και μονο αν*
   - (i) *Υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}\subset X\setminus\{x_0\}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L_s$.*
   - (ii) *Για κάθε ακολουθία $\{x_n\}\subset X\setminus\{x_0\}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ισχύει οτι $\limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le L_s$.*
2. $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) = L_i$ *αν και μονο αν*
   - (i) *Υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}\subset X\setminus\{x_0\}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L_i$.*
   - (ii) *Για κάθε ακολουθία $\{x_n\}\subset X\setminus\{x_0\}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ισχύει οτι $\liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)\ge L_i$.*

Πρόταση 4.8.3. *Οι Ορισμοί 4.8.1 και 4.8.2 είναι ισοδύναμοι.*

Πρόταση 4.8.4. *Εν γένει ισχύει ότι*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα και τότε

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Παράδειγμα 4.8.5. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 4.8.2 μπορούμε να δούμε ότι*

$$\liminf_{x\to 0} f(x) = -1,\ \ \limsup_{x\to 0} f(x) = 1$$

Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 4.8.6 (Ιδιότητες του άνω και κάτω ορίου).

1. $\liminf_{x\to x_0} f(x) = -\limsup_{x\to x_0}(-f(x))$.

2. *Για κάθε* $\lambda > 0$,

$$\liminf_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \liminf_{x\to x_0} f(x),$$
$$\limsup_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

3. $\liminf_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x) \leq \liminf_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$

4. $\limsup_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x) + \limsup_{x\to x_0} g(x)$.

Ορισμός 4.8.7 (Ημισυνέχεια). *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, *και* x_0 *σημείο συσσώρευσης του* X.

1. *Η* f *είναι* **κάτω ημισυνεχής** *στο σημείο* x_0 *αν*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

2. *Η* f *είναι* **άνω ημισυνεχής** *στο σημείο* x_0 *αν*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Η f *είναι ανω ημισυνεχής στο* X *αν είναι άνω ημισυνεχής σε κάθε* $x_0 \in X$. *Όμοια και για την κάτω ημισυνέχεια.*

Παράδειγμα 4.8.8. *Αν η συνάρτηση* f *είναι ανω ημισυνεχής, η* $-f$ *είναι κάτω ημισυνεχής.*

Παράδειγμα 4.8.9. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in [-1,1], x \neq 0 \\ a & x = 0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι άνω ημισυνεχής στο $x = 0$ *αν* $1 \leq a$ *και κάτω ημισυνεχής στο* $x = 0$ *αν* $a \leq -1$.

Πρόταση 4.8.10. *Μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in X$ *αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο σημείο x_0. Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.8.7

$$f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x),$$
$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Επίσης (βλ. Πρόταση 4.8.4) ισχύει γενικά οτι

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Συγκρίνοντας τις τρεις αυτές σχέσεις καταλήγουμε στην σχέση

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0),$$

οπότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ που είναι και ο συνήθης ορισμός της συνέχειας. Το αντίστροφο αφήνεται σαν άσκηση.■

Η ημισυνέχεια είναι πιο ασθενής ιδιότητα απο την συνέχεια αλλά είναι επαρκής για να μας επιτρέψει γενικεύσεις θεμελιωδών θεωρημάτων όπως π.χ. το Θεώρημα του Μεγίστου του Weierstrass.

Πρόταση 4.8.11. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, *όπου* $X = [a,b]$ *(κλειστό και φραγμένο διάστημα).*

1. *Αν η* f *είναι κάτω ημισυνεχής στο* X *τότε επιτυγχάνει το ελάχιστο.*

2. *Αν η* f *είναι άνω ημισυνεχής στο* X *τότε επιτυγχάνει το μέγιστο.*

Απόδειξη: Έστω $M := \sup_{x\in X} f(x)$. Με την ίδια λογικη με την οποία εργαστήκαμε στο Θεώρημα 4.6.2 μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια μεγιστοποιητική ακολουθία, δηλαδή μια ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{x_n\}$, έστω $\{x_{n_k}\}$ και έστω x^* το όριο της συγκλίνουσας υποακολουθίας, δηλαδή $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Μένει να δείξουμε ότι $f(x^*) = M$. Στο Θεώρημα 4.6.2 για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε την συνέχεια της f. Θα δούμε οτι μας είναι αρκετή η ημισυνέχεια.

Εφόσον η $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει στο M κάθε υποακολουθία της, συνεπώς και η $\{f(x_{n_k})\}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο, άρα

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}),$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το ότι όταν το οριο μιας ακολουθίας υπάρχει τότε αυτό είναι η κοινή τιμή του άνω και του κάτω ορίου της ακολουθίας αυτής. Εφόσον η f είναι άνω ημισυνεχής στο X θα είναι άνω ημισυνεχής στο $x^* \in X$, οπότε

$$f(x^*) \geq \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Άρα $f(x^*) = M$. Όμοια για το ελάχιστο, χρησιμοποιώντας την κάτω ημισυνέχεια. ■

4.9 Δεξιά και αριστερά όρια, και συνέχεια.

Πολλές φορές, μπορεί να χρειαστεί να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ και να μελετήσουμε την συμπεριφορά κάποιας συνάρτησης στο σημείο αυτό, μόνο απο μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, δηλαδή μόνο απο τα δεξιά ή μόνο απο τα αριστερά. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να μιλάμε για το δεξιό και για το αριστερό όριο της συνάρτησης. Φυσικά, για να μπορούμε να κάνουμε αυτή την ερώτηση θα πρέπει αντίστοιχα το σημείο αυτό να είναι δεξιό ή αριστερό σημείο συσσώρευσης.

Ορισμός 4.9.1 (Όριο απο τα αριστερά και απο τα δεξιά).

1. *Λέμε ότι το όριο της f στο x_0* **απο τα αριστερά** *είναι L_1 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε $\mid f(x) - L_1 \mid < \epsilon$, το συμβολίζουμε δε ως $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$.*

2. *Λέμε ότι το όριο της f στο x_0* **απο τα δεξιά** *είναι L_2 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $\mid f(x) - L_2 \mid < \epsilon$, το συμβολίζουμε δε ως $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$.*

Στην περίπτωση όπου $L_1 = L_2 = L$ ανακτούμε τον συνήθη ορισμό του ορίου.

Πρόταση 4.9.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*
Ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. ■

Μπορούμε τώρα να μιλήσουμε για την έννοια της δεξιάς και της αριστερής συνέχειας.

Ορισμός 4.9.3 (Συνέχεια απο τα αριστερά και απο τα δεξιά).

1. *Η συνάρτηση f είναι* **συνεχής απο τα αριστερά** *στο σημείο x_0, αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*

2. *Η συνάρτηση f είναι* **συνεχής απο τα δεξιά** *στο σημείο x_0, αν $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

Παράδειγμα 4.9.4. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = sign(x)$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} sign(x) &= -1 \\ \lim_{x\to 0^+} sign(x) &= 1 = sign(0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.9.5. *Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x)$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad x > 0 \\ -1 & \alpha\nu \quad \le 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} g(x) &= -1 = g(0) \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) &= 1 \end{aligned}$$

Ορισμός 4.9.6. *Ένα σημείο $x_0 \in X$ για το οποίο ισχύει $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ονομάζεται* **σημείο άλματος** *της f.*

Στα σημεία άλματος έχουμε ασυνέχεια της συνάρτησης, και μάλιστα ασυνέχεια που δεν μπορεί να διορθωθεί με το να ξαναορίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Αν στο σημείο x_0 έχουμε ασυνέχεια αλλά όχι ασυνέχεια άλματος τότε θα μπορούσαμε να την αφαιρέσουμε ξαναορίζοντας την τιμή της συναρτησης στο x_0 ως $f(x_0) := \lim_{x\to x_0} f(x)$.

4.10 Μονότονες συναρτήσεις

Ορισμός 4.10.1 (Μονότονες συναρτήσεις). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

1. *Η συνάρτηση f ονομάζεται* **αύξουσα** *αν $f(x_1) \le f(x_2)$ για κάθε $x_1 < x_2$. Αν η ανισότητα ισχύει αυστηρά, τότε η f ονομάζεται* **γνησίως αύξουσα**.
2. *Η συνάρτηση f ονομάζεται* **φθίνουσα** *αν $f(x_1) \ge f(x_2)$ για κάθε $x_1 < x_2$. Αν η ανισότητα ισχύει αυστηρά, τότε η f ονομάζεται* **γνησίως φθίνουσα**.
3. *Η συνάρτηση f ονομάζεται* **μονότονη** *αν είναι είτε αυξουσα ειτε φθίνουσα.*

Κατά παρόμοιο τρόπο με τις μονότονες ακολουθίες, οι μονότονες συναρτήσεις έχουν πάντοτε δεξιό ή αριστερό όριο.

Πρόταση 4.10.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια μονότονη συνάρτηση. Αν η f ειναι φραγμένη τότε σε κάθε $x_0 \in (a,b)$ υπάρχουν τα $f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και $f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.*

1. *Αν η f είναι αύξουσα και φραγμένη απο τα άνω τότε*
$$f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+)$$
2. *Αν η f είναι φθίνουσα και φραγμένη απο τα κάτω τότε*
$$f(x_0^+) \le f(x_0) \le f(x_0^-)$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι f είναι αύξουσα. Ας πάρουμε οποιοδήποτε $x_0 \in (a,b)$ και ας θεωρήσουμε ενα $\delta^* > 0$ τέτοιο ωστε $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset (a,b)$. Ας ορίσουμε επίσης τις ποσότητες, $L^- := \sup_{x\in(x_0-\delta^*,x_0)} f(x)$ και $L^+ := \inf_{x\in(x_0,x_0+\delta^*)} f(x)$ οι οποίες είναι καλά ορισμένες (πεπερασμένες) αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη απο τα άνω. Θα δείξουμε οτι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L^-$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L^+$.

Για κάθε $\epsilon > 0$, το $L^- - \epsilon$ **δεν** είναι άνω φράγμα της f περιορισμένης στο $(x_0 - \delta^*, x_0)$ κατα συνέπεια υπάρχει κάποιο $x^* \in (x_0 - \delta^*, x_0)$, για το οποίο ισχύει $L^- - \epsilon < f(x^*) \le L^-$. Λόγω της μονοτονίας της f, για κάθε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0)$ τέτοιο ώστε $x^* < x$ θα ισχύει

$$L^- - \epsilon < f(x^*) \le f(x) \le L^- < L^- + \epsilon,$$

(όπου η τελευταία ανισότητα είναι τετριμμενη). Άρα για κάθε x για το οποίο ισχύει $x_0 - \delta^* < x^* < x < x_0$ έχουμε ότι $|f(x) - L^-| < \epsilon$, και γράφοντας $x^* = x_0 - (x_0 - x^*)$ βλέπουμε ότι αν επιλέξουμε ως $\delta = x_0 - x^*$ θα ισχύει οτι $|f(x) - L^-| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta$. Άρα, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L^-$.

Με την ίδια λογική για κάθε $\epsilon > 0$, το $L^+ - \epsilon$ **δεν** είναι κάτω φράγμα της f περιορισμένης στο $(x_0, x_0 + \delta^*)$ κατα συνέπεια υπάρχει κάποιο $x^* \in (x_0, x_0 + \delta^*)$, για το οποίο ισχύει $L^+ \le f(x^*) \le L^+ + \epsilon$, και η απόδειξη συνεχίζεται σε πλήρη αναλογία με τα προηγούμενα. Αφηνεται σαν ασκηση να ολοκληρώσετε την απόδειξη, οπως επίσης και η περίπτωση όπου f φθίνουσα. ■

Η Πρόταση 4.10.2 μας δίνει μια σημαντική πληροφορία σχετικά με το πως μπορεί να προκύψει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο x_0 για μια μονότονη συνάρτηση.

Πρόταση 4.10.3. *Κάθε πιθανό σημείο ασυνέχειας μιας μονότονης συναρτησης είναι ασυνέχεια τύπου άλματος και το σύνολο των (πιθανών) σημείων ασυνέχειας μιας μονότονης συνάρτησης είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η f είναι αύξουσα και έστω A το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0 αλλά η ασυνέχεια δεν είναι τύπου άλματος υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αλλά $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{4.12}$$

Απο την άλλη, λόγω της μονοτονίας της f,

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \tag{4.13}$$

Συνδυάζοντας τις (4.12) και (4.13) βλέπουμε ότι $f(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$. Όμοια και αν η f είναι φθίνουσα. Άρα οποιοδηποτε σημείο ασυνέχειας μιας μονότονης συνάρτησης είναι αναγκαστικά ασυνέχεια τύπου άλματος.

Ας πάρουμε τώρα οποιοδήποτε $y \in A$. Εφόσον όπως δείξαμε παραπάνω το y είναι ασυνέχεια τύπου άλματος, θα ισχύει οτι $f(y^-) := \lim_{x\to y^-} f(x) < \lim_{x\to y^+} f(x) =: f(y^+)$ οπότε στο σημείο y μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ανοιχτό διάστημα $I_y := (f(y^-), f(y^+))$. Ας πάρουμε και ένα αλλο στοιχείο $\bar{y} \in A$, τέτοιο ώστε $\bar{y} \neq y$ και με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν ορίζουμε το ανοιχτό διάστημα $I_{\bar{y}} := (f(\bar{y}^-), f(\bar{y}^+))$. Ισχυριζόμαστε οτι τα διαστήματα I_y και $I_{\bar{y}}$ ειναι ξένα μεταξύ τους. Πράγματι, εφόσον $y \neq \bar{y}$ είτε $y < \bar{y}$ είτε $\bar{y} < y$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $y < \bar{y}$. Τότε απο την μονοτονία της f θα έχουμε ότι $f(y^+) := \lim_{x\to y^+} f(x) \leq \lim_{x\to \bar{y}^-} f(x) =: f(\bar{y}^-)$ οπότε πράγματι δεν μπορεί τα I_y και $I_{\bar{y}}$ να έχουν κανένα σημείο κοινό. Το ανοιχτό διάστημα I_y περιέχει σίγουρα κάποιο ρητό αριθμό (άπειρους για την ακρίβεια αλλά ας επιλέξουμε έναν απο αυτούς και ας τον συμβολίσουμε με $r(y)$. Όμοια το $I_{\bar{y}}$ περιέχει σιγουρα κάποιο ρητό αριθμό ας τον συμβολίσουμε με $r(\bar{y})$. Εφόσον $I_y \cap I_{\bar{y}} = \emptyset$ έχουμε ότι $r(y) \neq r(\bar{y})$. Ο παραπάνω συλλογισμός ισχύει για όλα τα στοιχεία του A. Με τον τρόπο αυτό λοιπόν κατασκευάσαμε μια απεικόνιση $r : A \to \mathbb{Q}$ με $r(y)$ ο επιλεγμένος ρητός στο διάστημα I_y, η οποία εφόσον $r(y) \neq r(\bar{y})$ για $y \neq \bar{y}$ είναι 1-1. Το σύνολο των ρητων είναι αριθμήσιμο σύνολο και εφόσον έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε μια 1-1 απεικόνιση μεταξύ του A και ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι και το A αριθμήσιμο. ■

4.11 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 4.11.1 (Αριστερή και δεξιά παράγωγος). *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Οι ποσότητες*

$$D^- f(x_0) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
$$D^+ f(x_0) := \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

(αν υπάρχουν) ονομάζονται **αριστερή** *και* **δεξιά** *παράγωγος της f αντιστοίχως στο σημειο $x_0 \in X$.*

Αν σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$ ισχύει ότι $D^- f(x_0) = D^+ f(x_0)$, τότε έχουμε ότι υπάρχει το όριο της $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ καθώς $x \to x_0$. Το όριο αυτό είναι η παράγωγος της f στο σημείο x_0.

Ορισμός 4.11.2. *Η $f : X \to \mathbb{R}$ είνα παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in X$ αν*

$$D^- f(x_0) = D^+ f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: Df(x_0).$$

Η ποσότητα $Df(x_0)$ ονομάζεται η παράγωγος[3] της f στο x_0. Αν το όριο αυτό υπάρχει για κάθε $x_0 \in X$ λέμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο X.

[3] Χρησιμοποιείται πολλές φορές και ο συμβολισμός $f'(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Η παραγωγισιμότητα συνδέεται με την συνέχεια.

Πρόταση 4.11.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in X$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη: Προκύπτει απο τους αντίστοιχους ορισμούς και αφήνεται σαν άσκηση. ∎

Παράδειγμα 4.11.4. *Το αντίστροφο της Πρότασης 4.11.3 προφανώς δεν ισχύει. Μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι παραγωγίσιμες. Σαν παράδειγμα πάρετε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ η οποία είναι συνεχής παντού αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει ούτε και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, π.χ. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$.*

Παράδειγμα 4.11.5. *Αν μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in X$,* **δεν** *είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχης. Σκεφτείτε το παράδειγμα $X = (0, 1)$ και $f(x) = \frac{1}{x}$, η οποία είναι μεν παράγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (0, 1)$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$ (βλ. Παράδειγμα 4.7.6).*

4.12 Άλλες έννοιες συνέχειας

Ορισμός 4.12.1 (Συνέχεια Hölder και Lipschitz). *Έστω συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$, και x_0 σημείο συσσώρευσης του X. Η f ονομάζεται συνεχής κατά Hölder τάξης α, $\alpha \in (0, 1]$ στο σημείο x_0 αν υπάρχουν $C > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ωστε να ισχύει*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C\,|x - x_0|^{\alpha}, \ \ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Αν $\alpha = 1$ η f ονομάζεται συνεχής κατά Lipschitz στο $x_0 \in X$. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής κατά Hölder τάξης α σε κάθε $x_0 \in X$ τότε λέμε οτι είναι συνεχής κατά Hölder τάξης α στο X (αντιστοιχα Lipschitz για $\alpha = 1$).

Η συνέχεια κατά Hölder και Lipschitz μας δίνει πληροφορία σχετικά με την μεταβολη της συνάρτησης αν μεταβάλλουμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής κοντά στο x_0.

Παράδειγμα 4.12.2. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in X$, τότε ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz στο x_0. Βέβαια το αντίστροφο δεν είναι αληθινό, όπως εύκολα θα σας πείσει το παράδειγμα της $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = |x|$ η οποία είναι Lipschitz αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x = 0$*

Ορισμός 4.12.3 (Ομοιόμορφη συνέχεια Hölder και Lipschitz). *Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X \subset \mathbb{R}$, ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής κατά Hölder τάξης α, $\alpha \in (0, 1]$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ υπάρχει C έτσι ώστε να ισχύει*

$$|\ f(x_1) - f(x_2)\ | \leq C\ \ |\ x_1 - x_2\ |^{\alpha}$$

Αν $\alpha = 1$ η f ονομάζεται συνεχής κατά Lipschitz.

Παράδειγμα 4.12.4. *Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής κατά Hölder για $\alpha = 1/2$ και $C = 1$, αλλά δεν είναι συνεχης κατά Lipschitz.*

Παράδειγμα 4.12.5. *Η συναρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής κατά Lipschitz.*

Παράδειγμα 4.12.6. *Μια συναρτηση που είναι ομοιόμορφα συνεχής κατά Lipschitz είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Σαν παράδειγμα μπορείτε να πάρετε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση με κλίση που η παράγωγος της απειρίζεται σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της π.χ. η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.*

Παράδειγμα 4.12.7. *Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που η παράγωγος της είναι ομοιόμορφα φραγμένη, είναι και ομοιόμορφα Lipschitz.*

Παράδειγμα 4.12.8. *Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (δηλαδή ορισμένη σε κλειστό και φραγμένο διάστημα) είναι Lipschitz τότε είναι και ομοιόμορφα Lipschitz.*

4.13 Η έννοια της κυρτότητας και η σχέση της με την συνέχεια

Μία πολύ σημαντική κατηγορία συναρτήσεων είναι οι κυρτές συναρτήσεις.

Ορισμός 4.13.1. *Μιά συναρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **κυρτή** *συνάρτηση αν ισχύει η ιδιότητα*

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in X \text{ και } \forall \lambda \in (0,1). \tag{4.14}$$

Αν η ανισότητα (4.14) ισχύει **αυστηρά** *τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι* **αυστηρά κυρτή**.
Μία συνάρτηση f ονομάζεται **κοίλη** *αν η $-f$ είναι κυρτή.*

Η γεωμετρική ερμηνεία της κυρτότητας είναι η ακόλουθη: Μία συνάρτηση είναι κυρτή αν το γράφημα της έχει την ιδιότητα, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία A και B του γραφήματος να βρίσκεται επάνω απο την καμπύλη $y = f(x)$. Ένας εναλλακτικός τρόπος να το γράψουμε αυτό ειναι και ο ακόλουθος: Ας πάρουμε το σύνολο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ τότε αν $z_1, z_2 \in A$ θα ισχύει και $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in A$ για κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Παράδειγμα 4.13.2. *Παραδείγματα κυρτών συναρτήσεων είναι οι $f(x) = x^2$, $f(x) =\mid x \mid$, $f(x) = e^x$, $f(x) = -ln(x)$.*

Η κυρτότητα εξασφαλίζει και την συνέχεια.

Πρόταση 4.13.3. *Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και στο σημειο $x_0 \subset X$ υπάρχει κάποιο $C \in \mathbb{R}$ και $\delta^* > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x)| \le C$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset X$. Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη: Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ και $\epsilon^* > 0$ και παρατηρούμε ότι[4] $x = (1-\epsilon^*)x_0 + \epsilon^* \left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)$, δηλαδη το x εκφράστηκε σαν ο κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*} \in X$ και λόγω της κυρτότητας της f η (4.14) δίνει

$$f(x) = f\left((1-\epsilon^*)x_0 + \epsilon^* \left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)\right) \le (1-\epsilon^*)f(x_0) + \epsilon^* f\left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right),$$

και αναδιατάσσουμε την ανισότητα αυτη με την μορφή

$$f(x) - f(x_0) < -\epsilon^* f(x_0) + \epsilon^* f\left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) \le \epsilon^* |f(x_0| + \epsilon^* \left|f\left(x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)\right| \le 2C\epsilon^* \tag{4.15}$$

αν υποθέσουμε οτι $x_0, x_0 + \frac{x-x_0}{\epsilon^*} \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ εφόσον η f είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα αυτό απο την εκφώνηση. Εύκολα βλέπουμε ότι η υπόθεση αυτή ισχύει αρκεί $|x - x_0| < \epsilon^* \delta^*$.

Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε το x_0 σαν τον κυρτό συνδυασμό[5] $x_0 = \frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*}\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) + \frac{1}{1+\epsilon^*}x$, και λόγω της κυρτότητας της f η (4.14) δίνει

$$f(x_0) = f\left(\frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*}\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) + \frac{1}{1+\epsilon^*}x\right) \le \frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*} f\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) + \frac{1}{1+\epsilon^*} f(x),$$

η οποία μετά απο αναδιάταξη παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$f(x) - f(x_0) \ge \epsilon^* f(x_0) - \epsilon^* f\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right) \ge -\epsilon^* |f(x_0| - \epsilon^* \left|f\left(x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*}\right)\right| \ge -2C\epsilon^*, \tag{4.16}$$

αν υποθέσουμε ότι $x_0, x_0 - \frac{x-x_0}{\epsilon^*} \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ εφόσον η f είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα αυτό απο την εκφώνηση. Εύκολα βλέπουμε ότι η υπόθεση αυτή ισχύει αρκεί $|x - x_0| < \epsilon^* \delta^*$.

Συνδυάζοντας τις (4.15) και (4.16) παίρνουμε ότι

$$-2C\epsilon^* \le f(x) - f(x_0) \le 2C\epsilon^*$$

άρα

$$|f(x) - f(x_0| \le 2C\epsilon^*, \text{ για } |x - x_0| < \epsilon^* \delta^*. \tag{4.17}$$

Αυτό μας εξασφαλίζει και την συνέχεια της f στο x_0. Για να ολοκληρώσετε την απόδειξη, θυμηθείτε οτι το ϵ^* είναι αυθαίρετο και οσοδήποτε μικρό. Αν ονομάσουμε λοιπόν $\epsilon := 2C\epsilon^*$ το ϵ είναι αυθαιρετα μικρό εφόσον και το ϵ^* μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό. Για κάθε $\epsilon > 0$ λοιπόν η (4.17) μας εξασφαλίζει την ύπαρξη $\delta > 0$ (το $\delta = \epsilon^* \delta^* = \frac{2C\delta^*}{\epsilon}$) τέτοιο ωστε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta$. ■

[4] Για να το δούμε αυτο γράφουμε $x = (1-\epsilon^*)x_0 + \epsilon^* y$ και λύνουμε ως προς y.

[5] Για να το δούμε αυτό γράφουμε $x_0 = \frac{1}{1+\epsilon^*}x + \frac{\epsilon^*}{1+\epsilon^*}y$ και λύνουμε ως προς y.

Πρόταση 4.13.4. *Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και στο σημειο $x_0 \subset X$ υπάρχει κάποιο $C \in \mathbb{R}$ και $\delta^* > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq C$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \subset X$. Τότε, για κάθε $\epsilon \in (0, \delta^*)$ η f είναι Lipschitz στο $(x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* + \epsilon))$.*

Απόδειξη: Θα προχωρήσουμε τροποποιώντας κατάλληλα τα βήματα της απόδειξης για την συνέχεια. Ας πάρουμε οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (x_0-(\delta^*-\epsilon), x_0+(\delta^*-\epsilon))$. Το $z = x_2+\frac{\epsilon}{|x_2-x_1|}(x_2-x_1)$ έχει την ιδιότητα $z \in (x_0-\delta^*, x_0+\delta^*)$. Επίσης, $x_2 \in (x_1, z)$. Παρατηρούμε ότι το x_2 μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός των x_1, z με την μορφή $x_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon+|x_2-x_1|}x_1 + \frac{|x_2-x_1|}{\epsilon+|x_2-x_1|}z$, οπότε χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f

$$f(x_2) = f\left(\frac{\epsilon}{\epsilon+|x_2-x_1|}x_1 + \frac{|x_2-x_1|}{\epsilon+|x_2-x_1|}z\right) \leq \frac{\epsilon}{\epsilon+|x_2-x_1|}f(x_1) + \frac{|x_2-x_1|}{\epsilon+|x_2-x_1|}f(z),$$

η οποία μετά απο αναδιάταξη γίνεται

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{|x_2-x_1|}{\epsilon}(f(z) - f(x_2)) \leq \frac{|x_2-x_1|}{\epsilon}(|f(z)| + |f(x_2)|) \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2-x_1|$$

Άρα, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* - \epsilon))$ ισχύει ότι

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|. \tag{4.18}$$

Εναλλάσοντας τον ρόλο των x_1 και x_2, παίρνουμε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|. \tag{4.19}$$

Συνδυάζοντας τις (4.18) και (4.19) καταλήγουμε στην

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2M}{\epsilon}|x_2 - x_1|,$$

που είναι η συνθήκη Lipschitz για την f στο $(x_0 - (\delta^* - \epsilon), x_0 + (\delta^* + \epsilon))$. ■

Η ιδιότητα της συνέχειας των κυρτών συναρτήσεων μας εξασφαλίζει την καλή συμπεριφορά τους σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

Οι κυρτές συναρτήσεις **δεν** είναι απαραίτητα παραγωγίσιμες αλλά έχουν αριστερή και δεξιά παράγωγο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των.

Πρόταση 4.13.5. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $X = (a, b)$ τότε για κάθε $x \in (a, b)$ υπάρχουν οι αριστερές και δεξιές παράγωγοι $D^+f(x)$ και $D^-f(x)$.*

Απόδειξη: Αν πάρουμε οποιαδήποτε x_0, x_1, x_2 τέτοια ώστε $a < x_0 < x_1 < x_2 < b$ χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f, και με παρόμοιο τρόπο όπως και στις άλλες μας αποδείξεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Οι ανισότητες αυτές μας εξασφαλίζουν για κάθε $x \in (a, b)$, ο λόγος $\varphi(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε $h > 0$ τόσο μικρό ώστε $x + h \in (a, b)$ και ο λόγος $\psi(h) := \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για $h > 0$ αρκετά μικρό ώστε $x - h \in (a, b)$. Παίρνοντας το όριο $h \to 0^+$ στην συνάρτηση $\phi(h)$, το οποίο είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει λόγω της μονοτονίας της φ, εξασφαλίζουμε την υπαρξη της $D^+f(x)$. Όμοια παίρνοντας το όριο $h \to 0^+$ στην συναρτηση ψ εξασφαλίζουμε την ύπαρξη της $D^-f(x)$ (βλ. Πρόταση 4.10.2). ■

4.14 Τα όρια συναρτήσεων για $x \to \infty$ ή για $x \to -\infty$ και γενικευμένα όρια

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει σε μια συνάρτηση όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής μπορεί να γίνουν πάρα πολύ μεγάλες ($x \to \infty$) ή πάρα πολύ μικρές ($x \to -\infty$).

Ορισμός 4.14.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *Λέμε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε αν $x > M$ να ισχύει $| f(x) - L | < \epsilon$.*
2. *Λέμε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε αν $x < -M$ να ισχύει $| f(x) - L | < \epsilon$.*

Παράδειγμα 4.14.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να δείξουμε με βάση τον παραπάνω ορισμό οτι*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τα γενικευμένα όρια μιας συνάρτησης f για $x \to x_0$.

Ορισμός 4.14.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του X.*

1. *Λέμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 - \delta < x < x_0$ να ισχύει $f(x) > M$.*
2. *Λέμε ότι $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.*
3. *Λέμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 - \delta < x < x_0$ να ισχύει $f(x) < -M$.*
4. *Λέμε ότι $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ να ισχύει $f(x) < -M$.*

Παράδειγμα 4.14.4. *Δίνεται η συνάρτηση $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Ισχύει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.*

4.15 Εφαρμογές στις πιθανότητες και την στατιστική

Υπάρχουν πάρα πολλές εφαρμογές των συνεχών και των κυρτών συναρτήσεων στις πιθανότητες και την στατιστική. Οι ιδιότητες που περιγράψαμε εδώ, χρησιμοποιούνται ουσιαστικά για την επίλυση σημαντικών προβλημάτων που προκύπτουν στην θεωρία πιθανοτήτων και την στατιστική, όπως θα φανεί και απο τα παρακάτω παραδειγματα.

4.15.1 Η συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων είναι μία δεξιά συνεχής συνάρτηση

Ας πάρουμε μία πραγματική τυχαία μεταβλητή X και ας ορίσουμε την συνάρτηση κατανομής $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σύμφωνα με την σχέση

$$F(x) := P(X \leq x), \ \ x \in \mathbb{R}$$

Από τον ορισμό της η συνάρτηση αυτή βλέπουμε ότι είναι μία συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.
Η συνάρτηση αυτή απο τον ορισμό της είναι αύξουσα (μη φθίνουσα) και δεξιά συνεχής.
Αν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.

Παράδειγμα 4.15.1. *Ας πάρουμε την τυχαία μεταβλητή X, η οποία μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητα p και $1 - p$ αντίστοιχα.*
Για την συνάρτηση κατανομής έχουμε ότι

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x < 0 \\ p & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{αν} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεξιά συνεχής και φυσικά μη φθίνουσα.

Παράδειγμα 4.15.2. *Ας υποθέσουμε ότι X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο β. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση κατανομής είναι η $F(x) = 1 -^{-\beta x}$ η οποία είναι μία συνεχής συνάρτηση του x.*

Οι ιδιότητες της F εξασφαλίζουν την αντιστρεψιμότητα της και ενδεχομένως και την συνέχεια της αντιστρόφου. Η αντίστροφη συνάρτηση της F σχετίζεται με τα **ποσοστημόρια (quantiles** της κατανομής.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποια συνεχή τυχαία μεταβλητή X η συνάρτηση κατανομής F είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x. Τότε υπάρχει η F^{-1} και είναι επίσης γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επειδή $F(x) \in [0, 1]$ λόγω των ιδιοτήτων της F, η εξίσωση $F(x) = \alpha$ θα εχει λύση για κάθε $\alpha \in (0, 1)$. Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι πολύ σημαντική για τον καθορισμό των επιπέδων εμπιστοσύνης σε διάφορα στατιστικά πειράματα.

Παράδειγμα 4.15.3. *Ας υποθέσουμε ότι οι πιθανές ζημιές μιάς επιχείρησης μπορεί να περιγραφούν απο μία τυχαία μεταβλητή X, η οποία είναι συνεχής. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η συνάρτηση κατανομής είναι γνησίως αύξουσα.*
Μπορεί κανείς να ενδιαφερθεί να βρεί πια θα είναι η μεγαλύτερη δυνατή απώλεια που μπορεί να έχει η επιχείρηση αυτή με κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης α. Αυτό σημαίνει ότι ζητάμε να βρούμε ένα αριθμό x τέτοιο ώστε

$$P(X \leq x) = \alpha$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την αλγεβρική εξίσωση $F(x) = a$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντοτε λύση, λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της F. Μάλιστα η λύση αυτή μπορεί να εκφραστεί και ως $x = F^{-1}(a)$.
Η ποσότητα x, σχετίζεται με μία ποσότητα που ονομάζεται **αξία στον κίνδυνο** *(value at risk) και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην διαχείριση κινδύνου.*

4.15.2 Η ροπογεννήτρια είναι μία συνεχής συνάρτηση

Ας θεωρήσουμε μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X η οποία μπορεί να πάρει πεπερασμένες το πλήθος τιμές x_i με πιθανότητα $P(X = x_i) = p_i$.
Για κάθε $t \in [0, 1]$ μπορούμε να ορίσουμε την ροπογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τον τύπο

$$\psi(t) = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} t^k X^k]$$

αρκεί να ορίζονται οι ροπές $\mathbb{E}[X^k]$.
Η συνάρτηση $\psi(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t.
Για να το δούμε αυτό ας πάρουμε μία ακολουθία $t_n \to t$, και να δούμε την ακολουθία $\psi(t_n) = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} t_n^k X^k] = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} x_i^k \, p_i t_n^k$. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Lebesgue για τις σειρές μπορούμε να δούμε ότι $\lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = \psi(t)$ οπότε εξασφαλίζεται η συνέχεια.

4.15.3 Συνεχείς συναρτήσεις και εκτιμητική

Πολλές φορές στην στατιστική, έχουμε δεδομένα $X_1, \cdots, X_n$ τα οποία θεωρούμε είναι δείγματα απο μια οικογένεια κατανομών με πυκνότητα $f(x, ; \theta)$ που χαρακτηρίζεται απο μία μονοδίαστατη παράμετρο $\theta \in A$ όπου A κάποιο διάστημα.
Με την χρήση της $f(x; \theta)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την απο κοινού πυκνότητα πιθανοτητας των παρατηρούμενων δεδομένων,

$$L(\theta) := f(X_1, \cdots, X_n; \theta)$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας** και θεωρείται ως μία συνάρτηση της παραμέτρου θ.
Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, συνίσταται στο να επιλέξουμε την τιμή αυτή της παραμέτρου θ που μεγιστοποιεί την συνάρτηση αυτή, δηλαδή

$$\theta^* = arg \max_{\theta} L(\theta)$$

Αν η συνάρτηση $L(\theta)$ είναι συνεχής στο διάστημα A, τότε το θεώρημα του μεγίστου εξασφαλίζει ότι υπάρχει θ^* τέτοιο ώστε $L(\theta^*) = \max_{\theta} L(\theta)$ συνεπώς μπορεί να γίνει η εκτίμηση του μοντέλου.

Παράδειγμα 4.15.4. *Ας θεωρήσουμε δεδομένα X_i, $i = 1, \cdots, n$, τα οποία θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητα δείγματα απο την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Η παράμετρος σ είναι μία άγνωστη παράμετρος που θέλουμε να εκτιμήσουμε απο τα δεδομένα. Θεωρούμε ότι η $\sigma \in [a, b]$.*
Λόγω της ανεξαρτησίας, η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο με την μορφή

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

ή μετά απο κάποιες πράξεις ως

$$L(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 + n\,\bar{x}^2}{2\sigma^2}\right)$$

όπου $\bar{x}$ είναι ο δειγματικός μέσος.

Η συνάρτηση αυτή είναι μία συνεχής συνάρτηση του σ, για $\sigma \in [a, b]$, $a > 0$. Συνεπώς επιτυγχάνει το sup *της για κάποιο σ^*. Αυτή είναι και η τιμή του σ που θα επιλέξουμε στο μοντέλο μας.*

Παράδειγμα 4.15.5. *Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα N φορές και παρατηρούμε ότι έχουμε φέρει συνολικά M φορές κορώνα όπου $M < N$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα p το νόμισμα σε μία ρίψη να φέρει κορώνα.*
Τα δεδομένα μας αντιστοιχούν στο γεγονός ότι σε N ανεξάρτητες ρίψεις ήρθαν M φορές κορώνα (με οποιαδήποτε σειρά). Η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός, είναι η

$$L(p) = \binom{N}{M} p^M (1-p)^{N-M}$$

Αυτή είναι μία συνεχής συνάρτηση του p, η οποία έχει μέγιστο στο διάστημα $[0, 1]$. Η τιμή του p στην οποία επιτύγχάνεται το μέγιστο είναι και η τιμή που ζητάμε.

4.15.4 Κυρτές συναρτήσεις στις πιθανότητες και την στατιστική

Αν η f είναι μία κυρτή συνάρτηση τότε μπορούμε να δούμε ότι

$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \le p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n)$$

για $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, \cdots, n$ και $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
Αν υποθέσουμε ότι η X είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $P(X = x_i) = p_i$ η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφει ως

$$\mathbb{E}[f(X)] \ge f(\mathbb{E}[X])$$

Η ανισότητα αυτή ονομάζεται ανισότητα του Jensen και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις πιθανοτητες και την στατιστική, αλλά και στα οικονομικά.

Παράδειγμα 4.15.6. *Μία απλή εφαρμογή της ανισότητας Jensen μας δίνει ότι*

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \ge \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$$

για τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές αυστηρά μεγαλύτερες του 0.

4.16 Σημαντικοτερα σημεία του κεφαλαίου

- Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης.
- Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας και η σχέση της με την συνέχεια (το Θεώρημα του Heine).
- Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων: Το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα του μεγίστου του Weierstrass.
- Κυρτές συναρτήσεις και σχέση τους με τις συνεχείς συναρτήσεις.
- Συνεχείς κατά Lipschitz συναρτήσεις.