Θεωρείστε την γραμμική μη ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης

$$\boxed{y'' + 3y' = 4x + 1 \qquad (*)}$$

Χ.Ε. $\lambda^2 + 3\lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -3.$

Δοκιμάζουμε ειδική λύση της μορφής $Ax^2 + Bx$

$$2A + 3(2Ax + B) = 4x + 1 \Rightarrow A = \frac{4}{6} \Rightarrow A = 2/3$$

$$3B + 2A = 1 \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

$$y_s(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{9}$$

Επομένως η γενική λύση της (*) είναι

$$c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{9} \qquad (A)$$

Με την μέθοδο Lagrange παίρνουμε την ειδική λύση.

$$\int_0^x (4u+1)\,\frac{1-e^{-3(x-u)}}{3}\,du = \int_0^x [4(x-u)+1]\,\frac{1-e^{-3u}}{3}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left\{4\frac{x^2}{2} + x\right\} - \frac{1}{3}(4x+1)\int_0^x e^{-3u}du + \frac{4}{3}\int_0^x u e^{-3u}du$$

$$= \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}(4x+1)\left(1-e^{-3x}\right) + \frac{4}{27}\left(1-(1+3x)e^{-3x}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{9} + \underbrace{\frac{1}{27}}_{} - \frac{1}{27}e^{-3x}.$$

αυτό προκύπτει και από την γενική λύση.

Γενική λύση

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27}e^{-3x} + c_1 + c_2 e^{-3x}$$

$$= \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{9} + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 e^{-3x}. \quad (\text{ίδιο με την } (A))$$