Μαθηματικές Μέθοδοι **Απρίλιος 2023**
Μ. Ζαζάνης **Παράδοση 8 Μαΐου 2023**

Πρόβλημα 1. Δίδεται η αναδρομική σχέση $x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
α) Να βρείτε την λύση αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x_0 = 1$, και $x_1 = x_2 = 0$.
β) Αν γνωρίζετε ότι $x_0 = 1$ ποιες πρέπει να είναι οι τιμές των x_1, x_2, έτσι ώστε η ακολουθία (x_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ να είναι φραγμένη;

Πρόβλημα 2. Έστω Δ_n η ορίζουσα $n \times n$ που ορίζεται ως

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad n = 3, 4, \ldots, \qquad \Delta_1 = | \, 3 \, |, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Να δείξετε ότι η ακολουθία $\{\Delta_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ικανοποιεί μια αναδρομική εξίσωση της μορφής

$$\Delta_n \; = \; a\,\Delta_{n-1} \; + \; b\,\Delta_{n-2} \qquad n = 3, 4, 5, \ldots.$$

και να προσδιορίσετε τα a, b. Να επιλύσετε την αναδρομική σχέση και να υπολογίσετε την Δ_n για γενικό n.

Πρόβλημα 3. Δίδεται η ρητογραμμική αναδρομική σχέση $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, με αρχικη συνθήκη $x_0 = 2$. Να βρείτε μια έκφραση για τον γενικό όρο της ακολουθίας x_n συναρτήσει του n.

Πρόβλημα 4. Έστω

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(α) Να προσδιορίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του P και να τα χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό του P^n για $n \in \mathbb{N}$.
(β) Να επαναλάβετε τον υπολογισμό του P^n χρησιμοποιώντας τον τύπο του Sylvester.

Πρόβλημα 5. **(α)** Να βρείτε την λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + \frac{x}{x+1}\, y \; = \; x + 1, \qquad y(0) = 2.$$

(β) Παρομοίως, να λυσετε την

$$y'' + xy' \; = \; \ln x, \quad x \geq 1, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(1) = 1.$$

(γ) Να λυσετε την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$y'' - 4y' - 4y \; = \; 0$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Πρόβλημα 6. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης αυτής. Επίσης να βρεθεί η μη ομογενής διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = x$$

και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Πρόβλημα 7. Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές των ακολούθων οικογενειών καμπυλών
(α) $y = Ce^x$,
(β) $y^2 - x^2 = C$,
(γ) $y^2 = Cx$.

Πρόβλημα 8. Να επιλύσετε τις ακόλουθες ακριβείς ΔΕ
(α) $ydx + \left(x + \frac{2}{y}\right) dy = 0$,
(β) $(e^y + \cos x \cos y)\, dx + (xe^y - \sin x \sin y)\, dy = 0$.
Να επιλύσετε επίσης τις ακόλουθες μη ακριβείς ΔΕ βρίσκοντας έναν κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα.
(γ) $2xydx + \left(y^2 - 3x^2\right) dy = 0$,
(δ) $(xy - 1)dx + \left(x^2 - xy\right) dy = 0$.

Πρόβλημα 9. Να επιλύσετε τις ΔΕ
(α) $y' \; = \; \frac{x+y}{x-y}$,
(β) $y' \; = \; \frac{1}{3x}y + \frac{1}{3}xy^{-1}$.

Πρόβλημα 10. Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Ποιό είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A; Ποιά είναι τα ιδιοδιανύσματα του A; Πότε έχει ο A τέσσερα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα;