Σημειώσεις Μαθηματικών Μεθόδων

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

4 Ιουνίου 2024

Κεφάλαιο 1

Το Μιγαδικό Εκθετικό

Είναι γνωστό ότι η εκθετική συνάρτηση e^x έχει το ανάπτυγμα Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots . \tag{1.1}$$

Επίσης, οι τριγωνομετρικές συναρτήσης έχουν αναπτύγματα Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots , \tag{1.2}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots . \tag{1.3}$$

Οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν $\forall x \in \mathbb{R}$. Η άπειρη σειρά (1.1) μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς αριθμούς ως εξής: Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ *ορίζουμε*

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots . \tag{1.4}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Πράγματι

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{z_1}e^{z_2}. \end{aligned}$$

Η σειρά (1.4) μας επιτρέπει να δώσουμε νόημα και στην ποσότητα e^{ix} όπου $x \in \mathbb{R}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$i = i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots , \qquad -1 = i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots , \qquad -i = i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots ,$$
$$1 = i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots$$

έχουμε

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^8x^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε την θεμελιώδη σχέση

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x \tag{1.5}$$

που ονομάζεται τύπος του Euler. Θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Παρόμοια βλέπουμε για παράδειγμα ότι $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Παρατηρείστε από τον τύπο του Euler ότι ο e^{ix} είναι (για $x \in \mathbb{R}$) πάντα μιγαδικός αριθμός μοναδιαίου μέτρου εφ΄ όσον

$$|e^{ix}| = |\cos x + i\sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Επίσης, για $k \in \mathbb{Z}$, από τον τύπο του Euler βλέπουμε ότι $e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix}e^{2k\pi i} = e^{ix}(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = e^{ix}$.

Πολική Μορφή των Μιγαδικών Αριθμών. Εστω $z = a + ib$ ένας μιγαδικός αριθμός $(a, b \in \mathbb{R})$. Το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ και επομένως

$$z \;=\; |z|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \;=\; |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \;=\; |z|e^{i\theta}. \tag{1.6}$$

θ είναι η μοναδική γωνία στο διάστημα $[0, 2\pi)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Αν $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, $r_i \geq 0$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2$, τότε

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

n-οστές Ρίζες της Μονάδας. Η εξίσωση $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, έχει n ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$:

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Για παράδειγμα, όταν $n = 3$, οι ρίζες είναι

$$e^0 = 1, \qquad e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Για $n = 4$ οι ρίζες είναι

$$e^0 = 1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i.$$

Τύπος του de Moivre. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in \mathbb{R}$. Από τον τύπο του Euler έχουμε

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

Για παράδειγμα από τον τύπο του de Moivre παίρνουμε

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Πίνακες και Ορίζουσες

2.1 Πίνακες ως Αναπαραστάσεις Γραμμικών μετασχηματισμών ως προς Συγκεκριμένες Βάσεις

Έστω U, V δύο γραμμικοί χώροι με βαθμωτά μεγέθη στο $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f : U \to V$ ονομάζεται γραμμική αν για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{w}).$$

Έστω ότι η διάσταση του U είναι n και η διάσταση του V είναι m. Έστω επίσης ότι $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ είναι μια βάση του U και $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ μια βάση του V. Έστω $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j$ και $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Τότε, λόγω της γραμμικότητας της f,

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{e}_j). \tag{2.1}$$

Αφού $f(\mathbf{e}_j) \in V$, ισχύει ότι $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mathbf{f}_i$ για $j = 1, 2, \dots, n$. Συνεπώς αντικαθιστώντας στην (2.1) έχουμε

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j. \tag{2.2}$$

Αν η αναπαράσταση του $\mathbf{y}$ ως προς την βάση του V είναι

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i\mathbf{f}_i \tag{2.3}$$

τότε συγκρίνοντας τα δεξιά μέρη της (2.2) και της (2.3) έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j. \tag{2.4}$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των πινάκων μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Αν με $\mathbf{b}_j$ συμβολίσουμε την j–στήλη του ανωτέρω $m \times n$ πίνακα, δηλαδή

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix},$$

τότε η εξίσωση (2.5) γράφεται και ως

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{b}_j.$$

Ο πίνακας

$$B \;=\; \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

εκφράζει την αναπαράσταση του γραμμικού μετασχηματισμού $f : U \to V$ ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{e}_j; j = 1, \ldots, n\}$ του V και $\{\mathbf{f}_i; i = 1, \ldots, m\}$ του V.

2.2 Πίνακες Αλλαγής Βάσης

Έστω U ένας γραμμικός χώρος διάστασης n με βαθμωτά μεγέθη στους πραγματικούς αριθμούς και $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ μια βάση του χώρου αυτού. Κάθε $\mathbf{x} \in U$ εκφράζεται τότε με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης: $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$. Τα x_j, $j = 1, \ldots, n$, είναι οι συνιστώσες του $\mathbf{x}$ ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Έστω τώρα $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ μια άλλη βάση του U και έστω

$$\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathbf{e}_k, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

η αναπαράσταση του $\mathbf{a}_j$ ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Εφόσον τα $\{\mathbf{a}_j\}$ αποτελούν βάση του U μπορούμε αντίστροφα να εκφράσουμε με μοναδικό τρόπο τα στοιχεία της αρχικής βάσης, $\{\mathbf{e}_j\}$, ως προς την νέα βάση και συνεπώς υπάρχουν $\{c_{ji}\}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{e}_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{ji} \mathbf{a}_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην (2.7) παίρνουμε

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

απ΄ όπου προκύπτει, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\{\mathbf{e}_j\}$, ότι

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = i \\ 0 & \text{αν } k \neq i \end{cases} .$$

Επομένως, αν $A = [a_{ij}]$ και $C = [c_{ij}]$, τότε $AB = I$ ή ισοδύναμα

$$C = A^{-1}. \tag{2.8}$$

Έστω $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k$ και $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\mathbf{a}_j$ η αναπαράσταση του $\mathbf{x} \in V$ ως προς τις δύο βάσεις. Χρησιμοποιώντας την (2.6) έχουμε

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ή

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Ισοδύναμα, αφού $A^{-1} = C$,

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

2.3 Αλλαγή Βάσης σε Γραμμικούς Μετασχηματισμούς

Ας υποθέσουμε τώρα ότι U είναι ένας γραμμικός χώρος διάστασης n με βαθμωτά μεγέθη στον $\mathbb{R}$ και $f : U \to U$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός στον U. Έστω $\{\mathbf{e}_j; j = 1, \ldots, n\}$

μια βάση του U και B ο πίνακας $n \times n$ ο οποίος εκφράζει τον μετασχηματισμό f ως προς αυτή την βάση. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία του πίνακα B είναι οι συντεταγμένες των $f(\mathbf{e}_j)$ ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_j\}$, δηλαδή

$$f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Λέμε ότι ο πίνακας B είναι η αναπαράσταση του γραμμικού μετασχηματισμού f ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_j\}$. Με παρόμοιο τρόπο, ο πίνακας B' είναι η αναπαράσταση του ίδιου γραμμικού μετασχηματισμού ως προς την βάση $\{\mathbf{a}_j\}$ και

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} b'_{ij}\mathbf{a}_i, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Χρησιμοποιώντας την $\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}_k$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} b'_{ij}\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} b'_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b'_{ij} \tag{2.12}$$

και

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ki}. \tag{2.13}$$

Από τις (2.11), (2.12) και (2.13) προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b'_{ij} \qquad \text{για κάθε } k, j$$

ή ισοδύναμα $BA = AB'$. Επομένως οι πίνακες B και B' που αναπαριστούν τον γραμμικό μετασχηματισμό f ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{e}_j\}$ και $\{\mathbf{a}_j\}$ συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση

$$B' = A^{-1}BA \tag{2.14}$$

όπου ο πίνακας A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης (δείτε τις σχέσεις (2.9), (2.10)). Δύο πίνακες B και B' οι οποίοι συνδέονται με μια σχέση της μορφής (2.14) ονομάζονται *όμοιοι.*

Κεφάλαιο 3

Μεταθέσεις και Ορίζουσες

3.1 Μεταθέσεις

Μια μετάθεση σ n διατεταγμένων στοιχείων είναι μια 'αναδιάταξη' των στοιχείων αυτών. Ένας πιο αυστηρός ορισμός είναι ο εξής. Μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου αυτού στον εαυτό του, δηλαδή μια συνάρτηση σ με πεδίο ορισμού το $\{1, 2, \ldots, n\}$ και πεδίο τιμών το ίδιο σύνολο τέτοια ώστε $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ όταν $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Την μετάθεση σ αναπαριστάνουμε σχηματικά ως

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Το σύνολο των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ στον εαυτό του συμβολίζεται με S_n και είναι εύκολο να δούμε ότι έχει $n!$ στοιχεία. Αν ϕ, ψ, είναι δύο στοιχεία του S_n τότε συμβολίζουμε την σύνθεσή τους ως $\psi\phi = \psi \circ \phi$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύνθεση των δύο συναρτήσεων είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δηλαδή στοιχείο του S_n. Επίσης, επειδή η σύνθεση συναρτήσεων έχει την προσεταιριστική ιδιότητα, $\phi(\psi\sigma) = (\phi\psi)\sigma$. (Αυτό απλά σημαίνει ότι, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(\psi\sigma(i)) = \phi(\psi(\sigma(i))) = \phi\psi(\sigma(i))$) Η ταυτοτική συνάρτηση e για την οποία ισχύει ότι $e(i) = i$ για κάθε i είναι το ουδέτερο στοιχείο. Επίσης, για κάθε ϕ στο S_n υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση ϕ^{-1} για την οποία ισχύει $\phi\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi = e$. Για παράδειγμα αν

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad \phi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Παρατηρείστε ότι $\phi\psi(1) = \phi(\psi(1)) = \phi(3) = 1$, $\phi\psi(2) = \phi(\psi(2)) = \phi(2) = 4$.) Επίσης,

$$\text{αν} \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$\phi\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ονομάζεται *αντιμετάθεση* μια μετάθεση η οποία εναλλάσσει μόνο δύο στοιχεία και κρατά όλα τα άλλα σταθερά δηλαδή η $\tau \in S_n$ είναι αντιμετάθεση αν, για κάποια $i, j \in I_n := \{1, \ldots, n\}$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, και $\tau(l) = l$ για κάθε $l \in I_n \setminus \{i, j\}$.

Κάθε μετάθεση μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο ανεξάρτητων κύκλων. Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Το σταθερό σημείο 4 το οποίο αντιστοιχεί σε κύκλο μήκους 1 μπορεί να παραληφθεί.

Κάθε κύκλος μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων. Για παράδειγμα $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$. Γενικά, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε,

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_{k-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, αν ψ είναι μια μετάθεση στο S_n, ισχύει ότι $\{\psi\phi : \phi \in S_n\} = S_n = \{\phi\psi : \phi \in S_n\}$.

Ορισμός 1. *Έστω $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ μια μετάθεση του συνόλου $(1, 2, \ldots, n)$. Θα λέμε ότι η μετάθεση έχει μια αντιστροφή θέσης (r, s) με $1 \leq r < s \leq n$ αν $i_r > i_s$. Μια μετάθεση που έχει περιττό αριθμό αντιστροφών ονομάζεται* περιττή *ενώ μια μετάθεση που έχει άρτιο αριθμό αντιστροφών ονομάζεται* άρτια.

Για παράδειγμα η $(4, 3, 5, 2, 1)$ έχει 3 αντιστροφές ως προς το πρώτο στοιχείο της, 2 ως προς το δεύτερο, 2 ως προς το τρίτο και 1 ως προς το τέταρτο. Συνεπώς έχει συνολικά 8 αντιστροφές και είναι άρτια.

Ορισμός 2. *Μια εναλλαγή της θέσης δύο στοιχείων, i_r, i_s, μιας μετάθεσης $(i_1, \ldots, i_n)$ ονομάζεται* αντιμετάθεση*: Με την αντιμετάθεση αυτή, η $(i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_s, \ldots, i_n)$ γίνεται $(i_1, \ldots, i_s, \ldots, i_r, \ldots, i_n)$. Τα στοιχεία i_r και i_s εναλλάσσουν τις θέσεις τους ενώ όλα τα υπόλοιπα τις διατηρούν. Μια αντιμετάθεση δύο γειτονικών στοιχείων ονομάζεται* γειτονική αντιμετάθεση.

Θεώρημα 1. *Μια αντιμετάθεση μετατρέπει μια περιττή μετάθεση σε άρτια και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Έστω $(i_1, \ldots, i_n)$ μια μετάθεση n στοιχείων. Μια γειτονική αντιμετάθεση των στοιχείων i_r και i_{r+1} δεν επηρεάζει σε τίποτε τον αριθμό των αντιστροφών των στοιχείων $i_1, \ldots, i_{r-1}$ όπως και των στοιχείων $i_{r+2}, \ldots, i_n$. Αν $i_r < i_{r+1}$ τότε η αντιμετάθεση τους αυξάνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_{r+1} κατά 1 ενώ αφήνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_r αναλλοίωτο. Αν $i_r > i_{r+1}$ τότε η αντιμετάθεσή τους μειώνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_r κατά 1 ενώ αφήνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_{r+1} αναλλοίωτο. Και στις δύο περιπτώσεις ο συνολικός αριθμός αντιστροφών όλων των στοιχείων μεταβάλλεται κατά μία μονάδα, είτε αυξάνεται είτε μειώνεται. Συνεπώς μια άρτια μετάθεση θα γίνει περιττή και αντίστροφα.

Στην γενική περίπτωση τα στοιχεία i_r, i_s δεν είναι γειτονικά και έστω ότι μεσολαβούν m στοιχεία μεταξύ τους. Χρειάζονται τότε $m+1$ γειτονικές αντιμεταθέσεις για να προχωρήσουμε το i_r μέχρι τη θέση s που κατείχε αρχικά το i_s. Στη συνέχεια χρειαζόμαστε m γειτονικές αντιμεταθέσεις για να πάμε πίσω το i_s στη θέση r που κατείχε το i_r. Συνεπώς συνολικά χρειάζονται $2m+1$ γειτονικές αντιμεταθέσεις για να αντιμεταθέσουμε τα i_r, i_s. Αν k από αυτές αυξάνουν τον αριθμό των αντιστροφών κατά 1 και l από αυτές μειώνουν τον συνολικό αριθμό των αντιστροφών κατά 1 τότε η συνολική μεταβολή του αριθμού των αντιστροφών είναι $k-l$. Ισχύει ότι $k+l = 2m+1$ και συνεπώς $k-l = 2m-2l+1$. Επομένως βλέπουμε ότι η συνολική μεταβολή του αριθμού των αντιστροφών είναι περιττός αριθμός και κατά συνέπεια, αν η μετάθεση ήταν αρχικά άρτια θα γίνει περιττή και αντίστροφα. ☐

3.2 Ορίζουσες

Ορισμός 3. *Η ορίζουσα ενός πίνακα A, $n \times n$ ορίζεται ως*

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{3.1}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις, σ, του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ και $\operatorname{sign}(\sigma) = +1$ *αν η μετάθεση είναι άρτια ενώ* $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ *αν είναι περιττή.*

3.3 Αλγεβρικά συμπληρώματα, Αντίστροφοι πίνακες και το θεώρημα του Cramér

Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία (a_{ij}). Θα συμβολίσουμε με M_{ij} τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την γραμμή i και την στήλη j. Θέτουμε $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$. Ο πίνακας με στοιχεία A_{ij} ονομάζεται *κλασσικός συζυγής* (adjoint) του πίνακα A και συμβολίζεται ως $\operatorname{adj}(A)$.

Η ορίζουσα του πίνακα A υπολογίζεται ως

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \tag{3.2}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ισχύει ότι

$$A \operatorname{adj}(A)^T = \det(A)\, I. \tag{3.3}$$

Πράγματι, το στοιχείο ij του γινομένου των δύο πινάκων δίνεται από την σχέση

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \;=\; \begin{cases} \det(A) & \text{αν } i = j \\ \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{3.4}$$

Αν $i \neq j$ τότε η έκφραση (3.4) είναι ίση με την ορίζουσα ενός πίνακα που προκύπτει αν η γραμμή j του A αντικατασταθεί από την γραμμή i. Συνεπώς αφού πρόκειται για ένα πίνακα με δύο ίδιες γραμμές η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι μηδέν. Αν $i = j$ τότε η έκφραση (3.4) είναι ίση με $\det(A)$.

Η σχέση (3.3) σημαίνει ότι, αν $\det(A) \neq 0$ τότε ο A^{-1} υπάρχει και δίδεται από την

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T. \tag{3.5}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι $\det(A) \neq 0$ το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση $x = A^{-1} b$ ή

$$x = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T b. \tag{3.6}$$

3.3.1 Συμπαράγοντες και ορίζουσες

Έστω A πίνακας $n \times n$ και

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} & 1 & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &+a_{1j}\begin{vmatrix} & & 1 & \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{vmatrix} & & & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

και επομένως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή κατάλληλα και αφαιρώντας από τις υπόλοιπες παίρνουμε

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ & & & \\ & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ & & & \\ & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} & 1 & & \\ a_{21} & & a_{2j} & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & & a_{ij} & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &+a_{1j}\begin{vmatrix} & & 1 & \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{vmatrix} & & & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Η τυπική ορίζουσα στην παραπάνω εξίσωση, όπου η j στήλη έχει 1 στην πρώτη θέση και 0 στις άλλες γράφεται, μετά από εναλλαγές στηλών, ως

$$\begin{vmatrix} & & 1 & \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & & \\ & a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & & & \\ & a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}\det M_{1j}$$

όπου M_{1j} είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A όταν διαγράφουμε την γραμμή 1 και την στήλη j. Γενικά, ο πίνακας που προκύπτει από τον A όταν διαγράφουμε την γραμμή i και την στήλη j συμβολίζεται με M_{ij}. Η ποσότητα $A_{ij} := (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ ονομάζεται *συμπαράγοντας* του στοιχείου a_{ij}. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις η (3.8) γίνεται

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \tag{3.8}$$

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται ανάπτυγμα της ορίζουσας σε συμπαράγοντες ως προς την πρώτη γραμμή. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να δώσει το ανάπτυγμα της ορίζουσας σε συμπαράγοντες ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή και στήλη. Ισχύει επομένως ότι

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n && (3.9) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. && (3.10) \end{aligned}$$

Θεώρημα 2. *Έστω A μη ιδιόμορφος πίνακας $n \times n$. Ο αντίστροφος πίνακας εκφράζεται ως προς τους συμπαράγοντες με τον ακόλουθο τρόπο. Αν $A^{-1} = C$ τότε $c_{ij} = (\det A)^{-1}A_{ji}$, δηλαδή*

$$A^{-1} = C = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{i1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{i2} & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1j} & A_{2j} & A_{ij} & A_{nj} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{in} & A_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Παρατηρείστε ότι το στοιχείο ij του γινομένου CA είναι το

$$[CA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj} = (\det A)^{-1} \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}. \tag{3.12}$$

Όταν $i = j$ η παραπάνω έκφραση δίνει

$$(\det A)^{-1} \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{ki} = 1 \tag{3.13}$$

λόγω της (3.10). Όταν $i \neq j$ η έκφραση

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni}$$

ισούται με το μηδέν επειδή εκφράζει την ορίζουσα ενός πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα A αν αντικαταστήσουμε την στήλη i με την στήλη j έτσι ώστε η στήλη j να εμφανίζεται δύο φορές ενώ η στήλη i καμία. ■

Θεώρημα 3 (Cramér). *Έστω A μη ιδιόμορφος πίνακας $n \times n$ και b διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ ή*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση της οποίας η συνιστώσα i δίδεται από το ακόλουθο πηλίκο οριζουσών

$$x_j \;=\; \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & b_i & a_{i,i+1} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^T$ το διάνυσμα στήλης υπ′ αριθμόν $i = 1, \ldots, n$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$. Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_i x_i + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}.$$

Αν $A = [\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n]$ είναι ο πίνακας του συστήματος, $\det A = \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n]$. Εξετάζουμε τώρα την ορίζουσα $\det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{a}_n]$ η οποία προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την στήλη $\mathbf{a}_i$ με την στήλη $\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{a}_n] &= \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_i x_i + \cdots + \mathbf{a}_n x_n, \cdots, \mathbf{a}_n] \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n] \;=\; x_i \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$x_i \det[a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n] = \det[a_1, \cdots, b, \cdots, a_n].$$

□

3.4 Ορίζουσες Vandermonde

Έστω x_i, $i = 1, 2, \ldots, x_n$ πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί. Η ορίζουσα

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

ονομάζεται ορίζουσα Vandermonde. Η τιμή της υπολογίζεται εύκολα από το ακόλουθο επιχείρημα. Ας θέσουμε στη θέση του x_n την μεταβλητή x.

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x^2 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την τελευταία στήλη βλέπουμε ότι η $V_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς x βαθμού (το πολύ) $n-1$. Βλέπουμε επίσης ότι, για $x = x_i$, $i = 1,\ldots,n-1$, η ορίζουσα (3.16) μηδενίζεται και επομένως πρέπει να έχει την μορφή

$$V_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x) = C(x_1,\ldots,x_{n-1})(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \tag{3.17}$$

Για να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς $C(x_1,\ldots,x_{n-1})$ θέτουμε $x = 0$ στην (3.17) και την (3.16) και έχουμε

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1}C(x_1,\ldots,x_{n-1})x_1\cdots x_{n-1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}x_1\cdots x_{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}x_1\cdots x_{n-1}V_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$C(x_1,\ldots,x_{n-1}) = V_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Επομένως, θέτοντας $x = n_n$ στην (3.17) και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τα παραπάνω έχουμε

$$V_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = V_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i). \tag{3.18}$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα αναδρομικά έχουμε

$$V_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i). \tag{3.19}$$

Επομένως βλέπουμε ότι η ορίζουσα Vandermonde είναι μηδέν αν και μόνο αν $x_i = x_j$ για κάποιο $i \neq j$.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές Αναδρομικές Εξισώσεις

4.1 Εισαγωγή

Μια εξίσωση της μορφής

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

ονομάζεται *γραμμική αναδρομική σχέση τάξης* k. Οι συντελεστές a_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι δεδομένες συναρτήσεις του n και το δεξί σκέλος, b_n, είναι μια δεδομένη συνάρτηση του n. Τυπικά, οι αρχικές συνθήκες $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ είναι δεδομένες και από αυτές και την (4.22) οι τιμές $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ προσδιορίζονται αναδρομικά.

Αν η b_n είναι μηδέν για κάθε n η εξίσωση (4.22) ονομάζεται *ομογενής* άλλως ονομάζεται *μη ομογενής*. Αν οι συντελεστές a_i δεν εξαρτώνται από το n τότε έχουμε μια *γραμμική αναδρομική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*. Αυτές είναι οι εξισώσεις που, όπως θα δούμε, επιλύονται εύκολα σε κλειστή μορφή.

4.1.1 Ομογενείς γραμμικές αναδρομικές σχέσεις τάξης k με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε την ομογενή γραμμική αναδρομική σχέση τάξης k

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x_0,\ x_1,\ \ldots, x_{k-1} \quad \text{δεδομένα.} \tag{4.3}$$

Οι συντελεστές a_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι πραγματικές (ή μιγαδικές). Αν $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, $\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$ είναι δύο ακολουθίες που ικανοποιούν την (4.23) (αλλά όχι υποχρεωτικά τις αρχικές συνθήκες) τότε εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\{rx_n + sy_n; n \in \mathbb{N}\}$, όπου $r, s \in \mathbb{R}$, επίσης ικανοποιεί την (4.23), λόγω γραμμικότητας. Πράγματι, αρκεί να γράψουμε

$$\begin{aligned} x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \cdots + c_k x_n &= 0, \\ y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \cdots + c_k y_n &= 0, \end{aligned}$$

να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με r, την δεύτερη με s και να προσθέσουμε κατά μέλη για να πάρουμε

$$rx_{n+k} + sy_{n+k} + c_1(rx_{n+k-1} + sy_{n+k-1}) + \cdots + c_k(rx_n + sy_n) = 0.$$

Βλέπουμε κατά συνέπεια ότι το σύνολο των ακολουθιών που είναι λύσεις της αναδρομικής σχέσης (4.23) αποτελούν ένα γραμμικό υπόχωρο του συνόλου όλων των ακολουθιών. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο υπόχωρος αυτός έχει πεπερασμένη διάσταση και θα βρούμε μια βάση γι΄ αυτόν.

Πράγματι, παρατηρείστε ότι οποιαδήποτε λύση $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ της (4.23) προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις πρώτες n αρχικές τιμές $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Κατά συνέπεια, λόγω της γραμμικότητας των λύσεων αρκεί να εξετάσουμε τις k *θεμελιώδεις λύσεις*, $\{\xi_n^i\}$, που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες $\xi_j^i = 0$ για $j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$, $\xi_i^i = 1$, για $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Η λύση της (4.23) με αρχικές συνθήκες (4.3) δίνεται τότε ως ο γραμμικός συνδυασμός των θεμελιωδών λύσεων

$$x_n = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \xi_n^i, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.4}$$

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι ο γραμμικός χώρος των λύσεων της (4.23) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος διάστασης k του γραμμικού χώρου όλων των ακολουθιών με μιγαδικά στοιχεία και ότι οι ακολουθίες $\{\xi_n^i\}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, αποτελούν μια βάση γι΄ αυτό τον υπόχωρο.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να βρούμε λύσεις της (4.23) που να έχουν την μορφή

$$x_n = \lambda^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου λ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός κατάλληλα επιλεγμένος. Για να είναι η x_n όπως την ορίσαμε λύση θα πρέπει

$$\lambda^{n+k} + a_1 \lambda^{n+k-1} + \cdots + a_k \lambda^n = 0.$$

Αφού δεν μας ενδιαφέρει η τετριμμένη λύση που αντιστοιχεί στην επιλογή $\lambda = 0$, διαιρώντας με λ^n παίρνουμε την

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \cdots + a_k = 0. \tag{4.5}$$

Η (4.5) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της αναδρομικής σχέσης (4.23) και είναι βαθμού k. Συνεπώς έχει k ρίζες, πραγματικές ή μιγαδικές. Οι μιγαδικές ρίζες βεβαίως, αν υπάρχουν, εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών αριθμών όταν οι συντελεστές του πολυωνύμου στην (4.5) είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ είναι οι k ρίζες της (4.5) τότε η γενική λύση της (4.23) δίδεται από την

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.6}$$

όπου c_i είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιορισθούν έτσι ώστε η $\{x_n\}$ να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό τα c_i θα πρέπει να επιλεγού έτσι ώστε να ισχύουν οι

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + \cdots c_k &=& x_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_k\lambda_k &=& x_1 \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 + \cdots + c_k\lambda_k^2 &=& x_2 \\ \cdots\cdots\cdots && \\ c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda_2^{k-1} + \cdots + c_k\lambda_k^{k-1} &=& x_{k-1}, \end{array}$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Παρατηρείστε ότι η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα είναι ακριβώς η ορίζουσα Vandermonde που είναι διαφορετική από το 0 υπό την προϋπόθεση ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$ και κατά συνέπεια το σύστημα (4.7) έχει μοναδική λύση. Συνεπώς υπάρχει μια μοναδική λύση της (4.23) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (4.3) και αυτή δίνεται από την (4.6) με τιμές των σταθερών c_i που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος (4.7).

4.2 Πολλαπλές Ρίζες

Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.5) δεν είναι όλες διακριτές. Ας θεωρήσουμε κατ᾽ αρχή την αναδρομική σχέση

$$x_{n+2} - 2\rho x_{n+1} + \rho^2 x_n = 0, \qquad x_0, x_1 \text{ δεδομένα}, \tag{4.8}$$

$\rho \in \mathbb{R}$. (Η (4.8) είναι ουσιαστικά η γενική περίπτωση μιας αναδρομικής σχέσης που έχει χαρακτηριστική εξίσωση με διπλή ρίζα, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δύο διαφορετικές λύσεις στην περίπτωση αυτή είναι οι ρ^n και $n\rho^n$. Πράγματι

$$(n+2)\rho^{n+2} - 2\rho(n+1)\rho^{n+1} + \rho^2 n\rho^n = \rho^{n+2}\left((n+2) - 2(n+1) + n\rho\right) = 0.$$

Η γενική λύση είναι $x_n = C_1\rho^n + C_2 n\rho^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Οι σταθερές C_1, C_2 προσδιορίζονται από το σύστημα

$$x_0 = C_1, \qquad x_1 = \rho(C_1 + C_2).$$

Γενικά, αν η εξίσωση (4.5) έχει την $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ m–πλή ρίζα ($m \le k$) τότε στην ρίζα αυτή αντιστοιχούν οι εξής m ανεξάρτητες λύσεις:

$$\rho^n, \qquad n\rho^n, \qquad n^2\rho^n, \qquad \cdots, \qquad n^{m-1}\rho^n.$$

Παράδειγμα: Έστω η αναδρομική σχέση $x_{n+4} - 5x_{n+3} + 9x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$ με x_0, x_1, x_2, x_3 δεδομένα. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2) = 0$. Η γενική λύση είναι $x_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, και οι σταθερες προσδιορίζονται από το σύστημα

$$x_0 = C_1 + C_4, \;\; x_1 = C_1 + C_2 + C_3 + 2C_4, \;\; x_2 = C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 4C_4, \;\; x_3 = C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 8C_4.$$

4.3 Οι αριθμοί Fibonacci

Μια από τις διασημότερες αναδρομικές σχέσεις είναι αυτή που δίνει τους αριθμούς Fibonacci. Η σχέση αυτή είναι η

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{4.9}$$

μαζί με τις *αρχικές συνθήκες*

$$F_0 = 0, \;\; F_1 = 1. \tag{4.10}$$

Στην παραπάνω σχέση F_n είναι ο n–οστός αριθμός Fibonacci και ο τρόπος που οι αριθμοί αυτή προσδιορίζονται αναδρομικά είναι σαφής: $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ κ.ο.κ. Παρότι ο διαδοχικός υπολογισμός είναι απλούστατος μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε αν υπάρχει μια έκφραση, σαν συνάρτηση του n η οποία να προσδιορίζει απ΄ ευθείας τον n–οστό αριθμό Fibonacci. Μια τέτοια έκφραση θα μας έδινε για παράδειγμα μια σαφή εικόνα για τον ρυθμό αύξησης των αριθμών αυτών. Ας ξαναγράψουμε την (4.9) στη μορφή

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0. \tag{4.11}$$

Θα ονομάζουμε μια τέτοια σχέση *ομογενή γραμμική αναδρομική σχέση δεύτερης τάξης με γραμμικούς συντελεστές*. Η λέξη ομογενής αναφέρεται στο γεγονός ότι το δεξί σκέλος της αναδρομικής σχέσης, όταν είναι γραμμένη μ΄ αυτό τον τρόπο, είναι 0. Αντίθετα η αναδρομική σχέση

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = n \tag{4.12}$$

είναι μη ομογενής. Αν $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, είναι δυο ακολουθίες που ικανοποιούν μια ομογενή γραμμική αναδρομική σχέση όπως η (4.11) τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, όπως για παράδειγμα ο $z_n := ax_n + by_n$ επίσης ικανοποιεί την αναδρομική σχέση.

Μια μέθοδος που μας επιτρέπει να βρούμε τις λύσεις μια ομογενούς γραμμικής αναδρομικής σχέσης με σταθερούς συντελεστές όπως η (4.9) είναι να δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής λ^n όπου το λ θα προσδιορισθεί κατάλληλα. Αντικαθιστώντας την προτεινόμενη λύση στην (4.11) έχουμε

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0$$

ή

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Η γενική λύση είναι

$$F_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{4.13}$$

και οι δύο σταθερές, C_1, C_2, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Θέτοντας $n = 0$ και $n = 1$ στην (4.13) και λαμβάνοντας υπ᾽ όψιν μας τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \end{aligned}$$

ή

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1$$

απ᾽ όπου έχουμε

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

και συνεπώς

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{4.14}$$

Παρατηρείστε ότι για μεγάλες τιμές του n μόνο ο πρώτος όρος μέσα στην παρένθεση είναι σημαντικός. Ο δεύτερος τείνει γρήγορα στο μηδέν αφού κατ᾽ απόλυτη τιμή είναι μικρότερος της μονάδας.

4.4 Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Η αναδρομική σχέση (4.22) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \\ x_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

ή, ισοδύναμα

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad \mathbf{x}_0 \text{ δεδομένο} \tag{4.16}$$

όπου

$$A \;:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{x}_n := \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots .$$

Επομένως η λύση προκύπτει αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1 \;=\; A^2\mathbf{x}_0 + A\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_3 \;=\; A^3\mathbf{x}_0 + A^2\mathbf{b}_0 + A\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= A^n\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}\mathbf{b}_i. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Στην περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης, $\mathbf{b}_n = 0$ για κάθε n και συνεπώς

$$\mathbf{x}_n \;=\; A^n\mathbf{x}_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{4.18}$$

4.5 Υπολογισμός των δυνάμεων ενός τετραγωνικού πίνακα

Όταν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει ιδιοτιμές διάφορες μεταξύ τους και γενικότερα, όταν είναι διαγωνοποιήσιμος, οι δυνάμεις του μπορεί να υπολογιστούν με διαγωνοποίηση. Αν

M είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του A και Λ ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του A (με την ίδια σειρά ώστε να αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα) τότε $AM = M\Lambda$ ή $A = M\Lambda M^{-1}$. Συνεπώς

$$A^n = (M\Lambda M^{-1})^n = M\Lambda^n M^{-1}. \tag{4.19}$$

Η παραπάνω τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του πίνακα A^n.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Sylvester (πάντα για ιδιοτιμές διάφορες μεταξύ τους)

Θεώρημα 4. *Έστω τετραγωνικός πίνακας A, $m \times m$ με ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$A^n \; = \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n \, L_i(A) \tag{4.20}$$

όπου οι τετραγωνικοί πίνακες $L_i(A)$ δίνονται από την σχέση

$$L_i(A) \; = \; \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{m} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι τετραγωνικοί πίνακες $A - \lambda_j I$, $A - \lambda_k I$ αντιμετατίθενται. Έστω v_i το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Τότε, παρατηρούμε ότι $(A - \lambda_j I)v_i = Av_i - \lambda_j v_i = (\lambda_i - \lambda_j)v_i$ και επομένως $L_k(A)v_i = v_i$ αν $k \neq i$ και $L_i(A)v_i = 0$. Γράφουμε, $L_i(A)v_k = \delta_{ik} v_k$ όπου

$$\delta_{ik} \; = \; \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad i = k \\ 0 & \text{αν} \quad i \neq k, \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \left(A^n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n \, L_i(A) \right) v_k \; &= \; A^n v_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n L_i(A) v_k \\ &= \; \lambda_k^n v_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n \delta_{ik} v_k \; = \; (\lambda_k^n - \lambda_k^n) v_k \; = \; 0. \end{aligned}$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε v_k και δεδομένου ότι τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_m$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^m$ συμπεραίνουμε ότι $A^n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n \, L_i(A) = 0$, δηλαδή η διαφορά είναι ίση με τον μηδενικό πίνακα. □

Παράδειγμα 1. Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4.$$

Από την (4.20) έχουμε

$$A^n = 4^n \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.6 Γραμμικές αναδρομικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Η ακολουθία $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιεί μια *ομογενή γραμμική αναδρομική εξίσωση τάξης k με σταθερούς συντελεστές* αν υπάρχουν k πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_k$, με $a_k \neq 0$, τέτοιοι ώστε

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \qquad n = k, k+1, \ldots. \tag{4.21}$$

Προκειμένου να προσδιοριστούν τα μέλη της ακολουθίας απαιτείται επιπλέον να δοθούν οι k πρώτοι όροι της ακολουθίας, $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε ως επί το πλείστον σε γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Προκειμένου να λύσουμε την ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} = 0 \tag{4.22}$$

θα δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $x_n = \lambda^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Για να είναι μια τέτοια ακολουθία λύση της (4.22) θα πρέπει να ισχύει $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} = 0$ το οποίο σημαίνει ότι το λ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{4.23}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και εν γένει έχει δυο διαφορετικές ρίζες (ενδεχομένως συζυγείς μιγαδικές, αφού $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$).

Πρόταση 1. *Η γενική λύση της εξίσωσης (4.22) δίνεται από την*

$$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{4.24}$$

όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν πάντα να προσδιορισθούν μονοσήμαντα έτσι ώστε η λύση της (4.22) να ικανοποιεί δεδομένες αρχικές συνθήκες, x_0, x_1 ή συνοριακές συνθήκες της μορφής x_0, x_N, όπου $N \in \mathbb{N}$. Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ τότε η γενική λύση της (4.22) δίνεται από την

$$C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n. \tag{4.25}$$

Αν $\{b_n\}$ είναι μια δεδομένη ακολουθία, η αναδρομική σχέση

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} = b_n \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.26}$$

ονομάζεται *μη ομογενής γραμμική αναδρομική σχέση δεύτερης τάξης*. Μια ακολουθία $\{y_n\}$ η οποία ικανοποιεί την (4.26) ονομάζεται *ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης*.

Πρόταση 2. *Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (4.21) δίνεται από την*

$$C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

όπου λ_1, λ_2 είναι οι δύο διαφορετικές ρίζες της (4.23) και $\{y_n\}$ μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ τότε η γενική λύση είναι $C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n + y_n$.

4.7 Παραδείγματα Γραμμικών Αναδρομικών Σχέσεων

4.7.1 Αριθμοί Pell

Θεωρούμε τρια ήδη πλακιδίων: Κόκκινα και μπλε τα οποία είναι τετράγωνα, 1 × 1, και λευκά ορθογώνια 1 × 2, με το ίδιο πλάτος αλλά διπλό μήκος. Τα πλακίδια τοποθετούνται στην σειρά σε μια γραμμή. Μας ενδιαφέρει να απαριθμήσουμε τον αριθμό διαφορετικών διατάξεων συνολικού μήκους n, έστω u_n. Είναι σαφές ότι $u_1 = 2$, διότι, υπάρχουν δύο διατάξεις μήκους 1, (κόκκινο ή μπλε πλακίδιο) και $u_2 = 5$ (ΚΚ, ΚΜ, ΜΚ, ΜΜ, και Λ, όπου Κ=κόκκινο, Μ=μπλε, Λ=λευκό). Γενικά,

$$u_n \;=\; 2u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad n = 3, 4, \ldots. \tag{4.28}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει αν ξεκινήσουμε με το πρώτο πλακίδιο. Αν είναι κόκκινο ή μπλε, μετά ακολουθούν σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις πλακίδια συνολικού μήκους $n-1$, τα οποία μπορούν να επιλεγούν με u_{n-1}. Αν το πρώτο είναι λευκό τότε ακολουθούν πλακίδια συνολικού μήκους $n-2$, τα οποία μπορούν να επιλεγούν με u_{n-2} τρόπους.

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (4.28) είναι η $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ με ρίζες

$$\lambda_1 \;=\; \frac{2+\sqrt{8}}{2} \;=\; 1+\sqrt{2}, \qquad \lambda_1 \;=\; \frac{2-\sqrt{8}}{2} \;=\; 1-\sqrt{2}.$$

Συνεπώς

$$u_n \;=\; C_1\left(1+\sqrt{2}\right)^n + C_2\left(1-\sqrt{2}\right)^n,$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τις αρχικές συνθήκες,

$$\begin{aligned} 2 &= C_1\left(1+\sqrt{2}\right)+C_2\left(1-\sqrt{2}\right), \quad (n=1), \\ 5 &= C_1\left(1+\sqrt{2}\right)^2+C_2\left(1-\sqrt{2}\right)^2, \quad (n=2). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό παίρνουμε $C_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$, $C_1 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$, και επομένως

$$u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^n. \tag{4.30}$$

Το σύστημα (4.29) από τό οποίο προκύπτουν οι τιμές των σταθερών C_1, C_2, μπορεί να απλοποιηθεί αν παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να θέσουμε $u_0 = 1$: Υπάρχει ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε 0 πλακίδια στη σειρά! Αν αυτό δεν είναι αρκετά ικανοποιητικό, παρατηρούμε απλώς ότι με $u_0 = 1$ και $u_1 = 2$, η αναδρομική σχέση (4.28) δίνει $u_2 = 2\cdot 2+1 = 5$. Αντί για το σύστημα (4.29) έχουμε τότε

$$\begin{aligned} 1 &= C_1+C_2, \quad (n=0), \\ 2 &= C_1\left(1+\sqrt{2}\right)+C_2\left(1-\sqrt{2}\right), \quad (n=1). \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό είναι απλούστερο από το (4.29) και βεβαίως δίνει την ίδια λύση για τα C_1, C_2.

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών $1, 2, 5, 12, 70, 169, \ldots$ η οποία προκύπτει από την αναδρομική σχέση (4.28), είναι γνωστή ως αριθμοί Pell στην θεωρία αριθμών.

4.7.2 Ροές Επιτυχιών

Σε ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία, Ε, και αποτυχία, Α, θεωρούμε ανεξάρτητες δοκιμές. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα επιτυχίας είναι p και η πιθανότητα αποτυχίας $q := 1-p$, μας ενδιαφέρει να βρούμε την πιθανότητα να χρειαστούν ακριβώς n πειράματα μέχρι να έχουμε k *διαδοχικές επιτυχίες*. Θα εξετάσουμε την περίπτωση $k = 2$,

$n = 2:$ EE με πιθανότητα p^2

$n = 3:$ AEE με πιθανότητα qp^2

$n = 4:$ $AAEE$ ή $EAEE$ με πιθανότητα $qp^3 + q^2p^2 = qp^2$

$n = 4:$ $AAAEE$ ή $EAAEE$ ή $AEAEE$ με πιθανότητα $q^3p^2 + q^2p^3 + q^2p^3 = (1+p)q^2p^2$.

Έστω λοιπόν, για $k = 2$, f_n η πιθανότητα να χρειαστούν ακριβώς n δοκιμές μέχρι να έχουμε 2 *διαδοχικές* επιτυχίες ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$f_n = qf_{n-1} + pqf_{n-2}. \tag{4.31}$$

Για την συνέχεια θα υποθέσουμε ότι $p = q = 1/2$ για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς. Η *χαρακτηριστική εξίσωση* της (4.31) είναι, στην περίπτωση αυτή,

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Συνεπώς

$$f_n \ = \ C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n . \tag{4.32}$$

Οι σταθερές C_1, C_2, μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_3 = \frac{1}{8}$. Συνεπώς έχουμε τελικά

$$f_n \ = \ \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n , \ \ n = 2, 3, \ldots . \tag{4.33}$$

4.7.3 Αριθμός Λέξεων Μήκους n με Τρια Ψηφία

Μας ενδιαφέρει ο αριθμός διαφορετικών λέξεων μήκους n που μπορεί να σχηματισθούν με τα ψηφία 0, 1, 2 αν το ψηφίο 2 δεν μπορεί να ακολουθείται ποτέ από ένα δεύτερο ψηφίο 2. Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός που αναφέρεται στο ψηφίο 2 ο συνολικός αριθμός λέξεων προφανώς θα ήταν 3^n. Ας συμβολίσουμε με f_n το πλήθος των λέξεων. Ισχύει ότι

$$f_1 = 3, \ \text{(λέξεις 0, 1, και 2)}, \quad f_2 = 8, \ \text{(λέξεις 00, 11, 01, 10, 20, 02, 21, 12)}. \tag{4.34}$$

Γενικά, αν $\mathbf{f}_n$ είναι τό σύνολο των λέξεων μήκους n τότε $\mathbf{f}_n = \{0,1\} \times \mathbf{f}_{n-1} \cup \{20, 21\} \times \mathbf{f}_{n-2}$ δηλαδή

$$f_n \ = \ 2f_{n-1} + 2f_{n-2}. \tag{4.35}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την (4.34) μπορούμε να πάρουμε ως αρχικές συνθήκες $f_0 = 1$, $f_2 = 3$. (Η κενή λέξη μηδενικού μήκους φτιάχνεται με έναν μόνο τρόπο. Επίσης $f_2 = 2f_0 + 2f_1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$.) Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (4.35) είναι η

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 \ = \ 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 \ = \ 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 \ = \ 1 - \sqrt{3}.$$

Επομένως η γενική λύση της (4.35) είναι η

$$f_n \ = \ C_1 \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + C_2 \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

με

$$\begin{aligned} 1 \ &= \ C_1 + C_2 \\ 3 \ &= \ C_1 \left(1+\sqrt{3}\right) + C_2 \left(1 - \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$f_n \ = \ \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(1 + \sqrt{3}\right)^n \ - \ \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(1 - \sqrt{3}\right)^n \ . \tag{4.36}$$

4.8 Ρητογραμμικές Αναδρομικές Εξισώσεις

Ρητογραμμικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) \;=\; \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}.$$

Ψποθέτουμε ότι $ad - bc \neq 0$ (άλλως η συνάρτηση f είναι σταθερά).

Ρητογραμμικές ονομάζονται οι αναδρομικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$x_{n+1} \;=\; \frac{ax_n+b}{cx_n+d}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0\text{: δεδομένη αρχική συνθήκη.} \tag{4.37}$$

Οι αναδρομικές αυτές εξισώσεις λύνονται σε κλειστή μορφή ως εξής. Η *χαρακτηριστική εξίσωση* της (4.37) είναι η

$$\lambda \;=\; \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d} \quad \Leftrightarrow \quad c\lambda^2 + (d-a)\,\lambda - b = 0. \tag{4.38}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Η (4.38) έχει δύο διακριτές ρίζες $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ισχύει ότι

$$\lambda_i \;=\; \frac{a\lambda_i+b}{c\lambda_i+d}\,, \;\; i = 1, 2,$$

και, από τις (4.37), (4.38),

$$x_{n+1} - \lambda_i \;=\; \frac{ax_n+b}{cx_n+d} - \frac{a\lambda_i+b}{c\lambda_i+d} \;=\; \frac{(ad-bc)(x_n-\lambda_i)}{(cx_n+d)(c\lambda_i+d)}\,, \quad i = 1, 2. \tag{4.39}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (4.40) για $i = 1, 2$, παίρνουμε

$$\frac{x_{n+1}-\lambda_1}{x_{n+1}-\lambda_2} \;=\; \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\,\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}. \tag{4.40}$$

Θέτουμε

$$u_n = \frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \quad \mu \;=\; \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\,.$$

Με τους ορισμούς αυτούς η (4.37) μετασχηματίζεται στην πολύ απλούστερη

$$u_{n+1} \;=\; \mu u_n$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$u_n \;=\; \mu^n u_0$$

όπου το

$$u_0 = \frac{x_0 - \lambda_1}{x_0 - \lambda_2},$$

είναι δεδομένο αφού γνωρίζουμε την αρχική τιμή x_0. Από τον ορισμό του u_n προκύπτει επομένως ότι

$$x_n \;=\; \frac{\lambda_2 u_0 \mu^n - \lambda_1}{u_0 \mu^n - 1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.41}$$

Η (4.38) έχει μια διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Από την εξίσωση $c\lambda^2 + (d-a)\,\lambda - b = 0$,

$$\lambda \;=\; \frac{d\lambda - b}{a - c\lambda}. \tag{4.42}$$

Επίσης, επειδή η λ είναι *διπλή ρίζα* της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης,

$$\lambda \;=\; \frac{a-d}{2c}. \tag{4.43}$$

$$x_{n+1} - \lambda \;=\; \frac{ax_n + b}{cx_n + d} \;-\; \lambda \;=\; \frac{(a - c\lambda)x_n - (d\lambda - b)}{cx_n + d} \;=\; \frac{(a - c\lambda)x_n - \lambda\,(a - c\lambda)}{cx_n - 2c\lambda + a} \tag{4.44}$$

(Στον αριθμητή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(d\lambda - b) = \lambda\,(a - c\lambda)$ (λόγω της (4.42)) ενώ στον παρονομαστή το γεγονός ότι $d = a - 2\lambda c$ (λόγω της (4.43)). Επομένως, από την (4.44),

$$x_{n+1} - \lambda \;=\; \frac{(a - c\lambda)x_n - \lambda\,(a - c\lambda)}{c(x_n - \lambda) + a - c\lambda} \;=\; \frac{x_n - \lambda}{\frac{c}{a - c\lambda}(x_n - \lambda) + 1}. \tag{4.45}$$

Θέτουμε τώρα $u_n = (x_n - \lambda)^{-1}$. Συνεπώς

$$u_{n+1} \;=\; \nu + u_n$$

όπου $\nu = \frac{c}{a - c\lambda} = \frac{c}{a - c\frac{a-d}{2c}} = \frac{2c}{a+d}$. Επομένως

$$u_n \;=\; u_0 + n\nu$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας ότι $u_0 = \frac{1}{x_0 - \lambda}$,

$$x_n \;=\; \lambda + \frac{x_0 - \lambda}{1 + n(x_0 - \lambda)\nu}.$$

4.8.1 Παραδείγματα

Διακριτές Ρίζες. Έστω η ρητογραμμική αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} \;=\; \frac{2x_n+6}{x_n+1}, \quad x_0 = 1.$$

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση είναι

$$\lambda \;=\; \frac{2\lambda+6}{\lambda+1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2-\lambda-6=0.$$

Οι ρίζες της είναι οι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ και επομένως

$$\begin{aligned} x_{n+1}-3 \;&=\; \frac{2x_n+6}{x_n+1}-3 \;=\; \frac{3-x_n}{x_n+1} \\ x_{n+1}+2 \;&=\; \frac{2x_n+6}{x_n+1}+2 \;=\; \frac{4x_n+8}{x_n+1} \end{aligned}$$

Διαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη

$$\frac{x_{n+1}-3}{x_{n+1}+2} \;=\; -\frac{1}{4}\,\frac{x_n-3}{x_n+2}.$$

Θέτουμε

$$u_n := \frac{x_n-3}{x_n+2}, \;\; n=0,1,2,\ldots, \qquad u_0 = \frac{x_0-3}{x_0+2} = \frac{1-3}{1+2} = -\frac{2}{3}.$$

Επομένως έχουμε

$$u_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $x_n = \frac{3+2u_n}{1-u_n}$ έχουμε

$$x_n \;=\; \frac{9+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{3+2\left(-\frac{1}{4}\right)^n}, \quad n=1,2,\ldots.$$

Συζυγείς Μιγαδικές Ρίζες Θεωρούμε την αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} \;=\; \frac{3x_n-1}{x_n+3}, \quad x_0 = 3.$$

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση είναι

$$\lambda \;=\; \frac{3\lambda-1}{\lambda+3}, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2+1=0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Έχουμε επομένως

$$\begin{aligned} x_{n+1} - i &= \frac{3x_n - 1}{x_n + 3} - i = \frac{(3-i)x_n - i(3-i)}{x_n + 3} = (x_n - i)\,\frac{3-i}{x_n+3}, \\ x_{n+1} + i &= \frac{3x_n - 1}{x_n + 3} + i = \frac{(3+i)x_n + i(3+i)}{x_n + 3} = (x_n + i)\,\frac{3+i}{x_n+3}. \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{x_{n+1} - i}{x_{n+1} - i} = \frac{x_n - i}{x_n + i}\,\frac{3-i}{3+i}$$

και θέτοντας $u_n := \frac{x_n - i}{x_n + i}$ μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$u_n = \left(\frac{3-i}{3+i}\right)^n u_0$$

όπου $u_0 = \frac{x_0 - i}{x_0 + i} = \frac{3-i}{3+i}$. Συνεπώς $u_n = \left(\frac{3-i}{3+i}\right)^{n+1}$ και επομένως $\left(\frac{3-i}{3+i}\right)^{n+1} = \frac{x_n - i}{x_n + i}$. Η σχέση αυτή γράφεται ως

$$x_n = i\,\frac{1 + \left(\frac{3-i}{3+i}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{3-i}{3+i}\right)^{n+1}}$$

Γράφουμε τον $3 + i$ σε πολική μορφή ως $\sqrt{3^2 + 1^1}e^{i\phi} = 10^{1/2}\,e^{i\phi}$ όπου $\phi = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Παρομοίως $3 - i = 10^{1/2}\,e^{-i\phi}$. Έχουμε επομένως

$$x_n = i\,\frac{e^{i(n+1)\phi} + e^{-i(n+1)\phi}}{e^{i(n+1)\phi} - e^{-i(n+1)\phi}} == \frac{\cos\left((n+1)\phi\right)}{\sin\left((n+1)\phi\right)}.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$x_n = \frac{1}{\tan\left((n+1)\arctan\frac{1}{3}\right)},$$

Διπλή Ρίζα. Έστω η ρητογραμμική αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 1}{4x_n - 1}, \quad x_0 = 3.$$

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση είναι

$$\lambda = \frac{3\lambda - 1}{4\lambda - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

η οποία έχει την διπλή ρίζα $\lambda = \frac{1}{2}$. Επομένως

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3x_n - 1}{4x_n - 1} - \frac{1}{2} = \frac{2x_n - 1}{2(4x_n - 1)} = \frac{2x_n - 1}{2(4x_n - 2 + 1)} = \frac{2x_n - 1}{4(2x_n - 1) + 2} = \frac{1}{4 + \frac{1}{x_n - \frac{1}{2}}}$$

ή

$$\frac{1}{x_{n+1}-\frac{1}{2}} \;=\; 4+\frac{1}{x_n-\frac{1}{2}}.$$

Θέτουμε $u_n = \left(x_n-\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $n=0,1,2,\ldots$. Επίσης $u_0=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{5}$, και

$$u_{n+1} \;=\; 4+u_n.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$u_n=\frac{2}{5}+4n, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{u_n}=\frac{3+5n}{1+10n}, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

4.8.2 Παραδείγματα

1.

$$x_{n+1}+ax_n=0, \qquad x_0 \text{ δεδομένο.}$$

Αυτή είναι μια ομογενής γραμμική αναδρομική σχέση πρώτης τάξης που μπορεί να λυθεί άμεσα. Παρ΄ όλα αυτά είναι ενδιαφέρον να εφαρμόσουμε τη γενική μεθοδολογία. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda+a=0$ και επομένως η γενική λύση είναι $x_n=c_1(-a)^n$. Έχουμε ακόμη $x_0=c_1(-a)^0$ και επομένως $c_1=x_0$. Συνεπώς η λύση της αναδρομικής σχέσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι η $x_n=x_0(-a)^n$.

2. $x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0$, $x_0=0$, $x_1=1$. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε την γενική μεθοδολογία ως εξής: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2+\lambda+1=0$ με ρίζες $\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Η γενική λύση θα έχει επομένως την μορφή $x_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$ όπου οι σταθερές c_1, c_2, προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_0=0 \;&=\; c_1+c_2 \\ x_1=1 \;&=\; c_1\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+c_2\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

από τις οποίες έχουμε ότι

$$c_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \;=\; c_1 i\sqrt{3}=1 \quad \text{και συνεπώς } c_1=-i\frac{\sqrt{3}}{3}, \;\; c_2=i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως $x_n=i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n-\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$ για $n=0,1,2,\ldots$. Η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αν λάβουμε υπ΄ όψιν μας ότι $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Επομένως

$x_n = i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i\frac{4n\pi}{3}} - e^{i\frac{2n\pi}{3}}\right)$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το υπόλοιπο του n όταν τον διαιρέσουμε με το 3.

$$\begin{aligned}
n = 3k: &\quad x_{3k} &=& \; i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i4k\pi} - e^{i2k\pi}\right) &=& \; 0, \\
n = 3k+1: &\quad x_{3k} &=& \; i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i4k\pi + i\frac{4\pi}{3}} - e^{i2k\pi + i\frac{2\pi}{3}}\right) &=& \; 1, \\
n = 3k+2: &\quad x_{3k} &=& \; i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i4k\pi + i\frac{8\pi}{3}} - e^{i2k\pi + i\frac{4\pi}{3}}\right) &=& \; -1.
\end{aligned}$$

4.9 Ασκήσεις

Ασκηση 4.9.1. Χρησιμοποιείστε τις βασικές ιδιότητες της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις

$$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Η τελευταία ορίζουσα μπορεί να υπολογισθεί μετασχηματίζοντας τον πίνακα σε άνω τριγωνικό.)

Ασκηση 4.9.2. Θεωρήστε την αναδρομική σχέση $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Να υπολογίσετε τον γενικό όρο της ακολουθίας.

Κεφάλαιο 5

Ιδιοδιανύσματα και Ιδιοτιμές

5.1 Ερμιτιανοί Πίνακες

Η πλήρης μελέτη του προβλήματος των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοτιμών μπορεί να γίνει με τον πιο φυσικό τρόπο στον γραμμικό χώρο $\mathbb{C}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι αν x, y είναι δύο διανύσματα σ' αυτό τον χώρο, το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ως $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$. Αν $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&(x+y, z) = (x, z) + (y, z),\\
&(x, y) = \overline{(y, x)},\\
&(\alpha x, y) = \alpha(x, y).
\end{aligned}$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει επίσης εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
&(x, y+z) = (x, z) + (y, z),\\
&(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y).
\end{aligned}$$

Η νόρμα ενός διανύσματος ορίζεται ως $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. Επίσης, με $\Re(z)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z ενώ με $\Im(z)$ το φανταστικό. Έτσι έχουμε $z = \Re(z) + i\Im(z)$.

Θεώρημα 5. *Το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την εξής ταυτότητα, γνωστή και ως νόμο του συνημιτόνου*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(x, y) + \|y\|^2.$$

Απόδειξη Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y,x+y) = (x,x)+(y,x)+(x,y)+(y,y) \\ &= \|x\|^2 + \left(\overline{(x,y)} + (x,y)\right) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re(x,y) + \|y\|^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το γενονός ότι για οποιοδήποτε $z \in \mathbb{C}$ $z+\bar{z} = 2\Re(z)$. ∎

Έστω ο $n \times n$ πίνακας $A = [a_{ij}]$ με στοιχεία στον $\mathbb{C}$. Ο *συζυγής ανάστροφος* του πίνακα A είναι ο πίνακας

$$A^* = \overline{(A^T)} \tag{5.1}$$

με στοιχεία $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Αν ο A είναι πραγματικός τότε $A^* = A^T$. Αν ισχύει ότι $A = A^*$ τότε ο A ονομάζεται *ερμιτιανός* (hermitian, προς τιμήν του Γάλλου μαθηματικού Hermite).

Η σκοπιμότης του παραπάνω ορισμού φαίνεται από το γεγονός ότι ο συζυγής ανάστροφος είναι εκείνος ο πίνακας για τον οποίο

$$(Ax,y) = (x,A^*y) \qquad \text{για κάθε } x,y, \text{ στο } \mathbb{C}^n. \tag{5.2}$$

Πράγματι, αν ισχύει η (5.1) τότε

$$\begin{aligned} (Ax,y) &= \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{a}_{ij}\right)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{(A^*y)_j} = (x,A^*y). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η (5.2) διαλέγουμε $x = e_i$, $y = e_j$ όπου $e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)^T$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση i, και έχουμε ότι $(Ae_i, e_j) = a_{ji}$ ενώ $(e_i, A^*e_j) = \overline{(a^*_{ij})}$. Από αυτό συνάγουμε ότι $a^*_{ij} = \overline{(a_{ji})}$.

Ένας πίνακας B ονομάζεται *αντιερμιτιανός* αν $B^* = -B$. Κάθε τετραγωνικός πίνακας C μπορεί να γραφεί ως $C = A + iB$ όπου ο A είναι ερμιτιανός και ο B αντιερμιτιανός. Για να διαπιστώσουμε αυτή την πρόταση αρκεί αν θέσουμε $A = \frac{1}{2}(C + C^*)$ και $B = \frac{1}{2i}(C - C^*)$.

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός τετραγωνικού, $n \times n$ πίνακα A, είναι το πολυώνυμο $\det(\lambda I - A)$ το οποίο εύκολα (με επαγωγή) μπορεί να δει κανείς ότι είναι n–οστού βαθμού. Ένας μιγαδικός αριθμός λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα A αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε

$$Ax = \lambda x. \tag{5.3}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι προφανώς οι ιδιοτιμές του A αφού $\det(\lambda I - A) = 0$ αν και μόνο αν ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι ιδιόμορφος, αν δηλαδή υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $(A - \lambda I)x = 0$. Δεδομένου ότι, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, κάθε πολυώνυμο βαθμού n στο $\mathbb{C}$ έχει ακριβώς n ρίζες, μετρώντας και την πολλαπλότητα, συμπεραίνουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται ώς

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$$

όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$ και r_i είναι φυσικοί τέτοιοι ώστε $r_1 + \cdots + r_k = n$. Ο r_i ονομάζεται *αλγεβρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_i.

Θεώρημα 6. *Αν $x_1, \ldots, x_k$ είναι k ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (με $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$) τότε τα x_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη Θα προχωρήσουμε με απαγωγή εις άτοπον. Έστω ότι τα k ιδιοδιανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε υπάρχει φυσικός $m \leq k-1$ τέτοιος ώστε τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *να είναι* γραμμικά ανεξάρτητα αλλά τα $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$ να μην είναι. (Ενδέχεται βέβαια το m να είναι ίσο με 1.) Επομένως, υπάρχουν c_i, όχι όλα ίσα με το μηδέν, τέτοια ώστε

$$c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} = 0. \tag{5.4}$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε επίσης ότι

$$0 = A(c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1}) = c_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + c_m \lambda_m x_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1}. \tag{5.5}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.4) με λ_{m+1} και αφαιρώντας από την (5.5) παίρνουμε

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) x_1 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) x_m.$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους, $\lambda_i - \lambda_{m+1} \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, m$, και συνεπώς τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, όπερ άτοπον. ∎

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι αν ένας πίνακας $n \times n$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε έχει και n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $x_1, \ldots, x_n$. Αν $M = [x_1 | \cdots | x_n]$ ο πίνακας που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα αυτά, τότε

$$AM = [Ax_1 | \cdots | Ax_n] = [\lambda_1 x_1 | \cdots | \lambda_n x_n] = M\Lambda$$

όπου

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A. Αφού τα n ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ο πίνακας M είναι αναστρέψιμος και η παραπάνω σχέση γράφεται επίσης ως

$$A = M\Lambda M^{-1} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad M^{-1}AM = \Lambda.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 7. *Αν ο A είναι ερμιτιανός τότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Αυτό ισχύει φυσικά και στην ειδική περίπτωση που ο A είναι πραγματικός, συμμετρικός πίνακας.*

Απόδειξη Έστω λ μια ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x. Τότε $Ax = \lambda x$. Επομένως $x^*Ax = \lambda x^*x$ ή

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{\|x\|^2}.$$

Αρκει να δείξουμε ότι $\lambda = \bar{\lambda}$ το οποίο ισχύει αφού $\overline{x^*Ax} = x^*A^*x = x^*Ax$ και συνεπώς τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής είναι πραγματικοί αριθμοί. ▮

Όπως είδαμε, για έναν οποιοδήποτε πίνακα, ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν ο πίνακας είναι ερμιτιανός (ή συμμετρικός, στην πραγματική περίπτωση) τότε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Θεώρημα 8. *Αν ο A είναι ερμιτιανός και x_i, x_j, είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j τότε $(x_i, x_j) = 0$.*

Απόδειξη Ισχύει ότι $Ax_i = \lambda_i x_i$ και επομένως $x_i^*A = \lambda_i x_i^*$ (όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $A = A^*$ και οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές). Πολλαπλασιάζοντας με x_j έχουμε $x_i^*Ax_j = \lambda_i x_i^* x_j$. Δεδομένου ότι $Ax_j = \lambda_j x_j$ έχουμε επίσης ότι $x_i^*Ax_j = \lambda_j x_i^* x_j$. Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $(\lambda_i - \lambda_j)x_i^*x_j = 0$ και αφού $\lambda_i \neq \lambda_j$ τα δύο ιδιοδιανύσματα πρέπει να είναι ορθογώνια. ▮

Πόρισμα 1. *Αν ο A είναι ερμιτιανός και έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $AU = U\Lambda$ και επομένως $A = U\Lambda U^*$.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας U ονομάζεται *ορθομοναδιαίος* αν $U^*U = I$. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει επίσης ότι $UU^* = I$ καθώς και ότι $U^* = U^{-1}$.

Λήμμα 1. *Ένας $n \times n$ πίνακας U διατηρεί αναλλοίωτα τα μήκη αν και μόνο αν διατηρεί αναλλοίωτα τα εσωτερικά γινόμενα δηλαδή $\|Ux\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ αν και μόνο αν $(Ux, Uy) = (x, y)\ \forall x, y$.*

Απόδειξη Αν $(Ux, Uy) = (x, y)\ \forall x, y$, τότε θέτοντας $y = x$ έχουμε $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$. Για να δείξουμε το αντίστροφο επισημαίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x,y)\\
\|x+iy\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Im(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right), &(5.6)\\
\Im(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right). &(5.7)
\end{aligned}$$

Η σχέση (5.6) προκύπτει κατ΄ ευθείαν από τον νόμο του συνημιτόνου ενώ η (5.7) από τον νόμο του συνημιτόνου για το διάνυσμα $x + iy$ λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\Re(x, iy) = \Re(-i(x, y)) = \Re(-i(\Re(x, y) + i\Im(x, y))) = \Re(-i\Re(x, y) + \Im(x, y)) = \Im(x, y)$. Παρόμοια έχουμε και τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\Re(Ux, Uy) &= \frac{1}{2}\left(\|U(x + y)\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2\right), &(5.8)\\ \Im(Ux, Uy) &= \frac{1}{2}\left(\|U(x + iy)\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2\right). &(5.9)\end{aligned}$$

Εφ΄ όσον ο U διατηρεί τα μήκη, το δεξί μέλος της (5.6) είναι ίσο με το δεξί μέλος της (5.8) και το δεξί μέλος της (5.7) ίσο με το δεξί της (5.9). Αλλά αυτό σημαίνει ότι $\Re(Ux, Uy) = \Re(x, y)$ και $\Im(Ux, Uy) = \Im(x, y)$ που σημαίνει ότι $(Ux, Uy) = (x, y)$. ∎

5.2 Κανονικοί Πίνακες

Όπως θα αποδείξουμε λίγο πιο κάτω, όλοι οι ερμιτιανοί πίνακες έχουν διάσπαση της μορφής

$$A = U\Lambda U^* \tag{5.10}$$

όπου U ορθομοναδιαίος πίνακας και Λ διαγώνιος. Υπάρχουν βεβαίως και άλλοι πίνακες, μη ερμιτιανοί, για τους οποίους ισχύει η παραπάνω διάσπαση. Θέλουμε να βρούμε ένα χαρακτηρισμό για την κλάση των πινάκων για τη οποία ισχύει η διάσπαση της μορφής (5.10). Παρατηρείστε ότι η (5.10) γράφεται και ως $Au_i = \lambda_i u_i$ όπου $U = [u_1| \cdots |u_n]$, $u_i^* u_j = \delta_{ij}$ και οι ιδιοτιμές λ_i δεν είναι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους.[1] Συνεπώς, η κλάση που ζητάμε είναι *η κλάση των πινάκων για τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ένα πλήρες σετ από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα*. Ο λόγος για την προσεκτική αυτή διατύπωση οφείλεται στο γεγονός ότι, όταν ο πίνακας έχει ιδιοτιμές με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας τότε η διάσταση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες ιδιοτιμές μπορεί να είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Σ΄ αυτή την περίπτωση η ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων είναι και ζήτημα επιλογής. Για παράδειγμα για τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

μπορούμε να επιλέξουμε τρία ορθογώνια ιδιοδιανύσματα, τα $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ και $(0, 0, 1)^T$. Δεν είναι όμως τα μόνα. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε και τα $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ και $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$ τα οποία είναι επίσης ορθογώνια ή ακόμη και τα $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ και $(0, 0, 1)^T$ τα οποία είναι μεν γραμμικά ανεξάρτητα δεν είναι όμως ορθογώνια.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι

---

[1] Ο συμβολισμός δ_{ij} το οποίο είναι 1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$ ονομάζεται δέλτα του Kroneker.

Θεώρημα 9. *Έστω H ένας $n \times n$ ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους). Τότε ο H έχει ιδιοδιανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ με $Hu_j = \lambda_j u_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ και $U^*HU = \Lambda$ όπου $U = [u_1 \mid \cdots \mid u_n]$ και $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής

Λήμμα 2. *Αν ένας πίνακας A απεικονίζει έναν υπόχωρο L_d του $\mathbb{C}^n$ με διάσταση $d \geq 1$ στον εαυτό του τότε ο A έχει ένα ιδιοδιάνυσμα στον L_d.*

Απόδειξη Αν ο L_d έχει διάσταση d, έστω $b_1, \ldots, b_d$ μια βάση του. Τα Ab_j είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $b_1, \ldots, b_d$ δηλαδή $Ab_j = m_{1j}b_1 + m_{2j}b_2 + \ldots + m_{dj}b_d$ ή $A[b_1 \mid \cdots \mid b_d] = BM$ όπου

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} m_{11} & m_{12} & & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{d1} & m_{d2} & & m_{dd} \end{array} \right].$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(\lambda I - M) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα (από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας) και συνεπώς ο πίνακας M έχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $My = \lambda y$, $y \neq 0$. Αφού $AB = BM$,

$$A(By) = BMy = B(\lambda y) = \lambda By.$$

Η τελευταία σειρά από ισότητες δείχνει ότι το By είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ. Επίσης το By προφανώς ανήκει στον L_d αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα B. Τέλος, $By \neq 0$ αφού $y \neq 0$ και οι στήλες του B είναι γραμμικά ανεξάρτητες. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος Από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, ο πίνακας H έχει ιδιοδιάνυσμα u_1 που αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή λ_1. Έστω ότι έχουμε βρει k ορθογώνια μοναδιαία ιδιοδιανύσματα $u_1, \ldots, u_k$ με $1 \leq k \leq n$. Ορίζουμε L_{n-k} τον γραμμικό υπόχωρο που είναι ορθογώνιος στα $u_1, \ldots, u_k$. Αφού ο H είναι ερμιτιανός, θα δούμε ότι απεικονίζει τον L_{n-k} στον εαυτό του: Αν $(x, u_j) = 0$ όπου $Hu_j = \lambda_j u_j$ τότε $(Hx, u_j) = (x, Hu_j) = (x, \lambda_j u_j) = \lambda_j (x, u_j) = 0$. Με βάση το λήμμα, ο H έχει ιδιοδιάνυσμα στον L_{n-k}, έστω u_{k+1} το οποίο εξ ορισμού είναι ορθογώνιο στα $u_1, \ldots, u_k$ και το οποίο μπορούμε να το επιλέξουμε ώστε να είναι μοναδιαίο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσο $k < n$. ∎

Ορισμός 4. *Ένας πίνακας N ονομάζεται κανονικός (normal) αν αντιμετατίθεται με τον συζυγή ανάστροφό του, αν δηλαδή $NN^* = N^*N$.*

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ένας πίνακας που ικανοποιεί την (5.10) είναι κανονικός αφού

$$AA^* = (U\Lambda U^*)(U\Lambda U^*)^* = U\Lambda U^* U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^*$$

ενώ

$$A^*A = (U\Lambda U^*)^*(U\Lambda U^*) = U\Lambda^* U^* U\Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^*.$$

Οι δύο εκφράσεις όμως είναι ίσες αφού

$$\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}.$$

Ποιο δύσκολο είναι να δείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν ένας πίνακας είναι κανονικός τότε διαγωνοποιείται με ένα ορθομοναδιαίο πίνακα δηλαδή ικανοποιεί την (5.10). Αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 10. *Ένας πίνακας N ικανοποιεί την (5.10) αν και μόνο αν είναι κανονικός.*

5.3 Κανονική Μορφή του Schur

Θεώρημα 11. *Κάθε τετραγωνικός πίνακας μπορεί να αναχθεί σε άνω τριγωνικό μέσω ενός ορθομοναδιαίου μετασχηματισμού: $P^*AP = T$, όπου $t_{ij} = 0$ όταν $1 \leq j < i$. Οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται στη διαγώνιο του T. Η διάσπαση αυτή ονομάζεται διάσπαση κατά Schur. Αν ο A και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές, ό P είναι επίσης πραγματικός και επομένως το ίδιο είναι και ο T.*

Απόδειξη. Έστω λ_1 μια ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x_1. Θεωρούμε οτι $\|x_1\| = 1$ και συμπληρώνουμε με τα ορθομοναδιαία διανύσματα w_i, $i = 2, \ldots, n$ που τα επιλέγουμε έτσι ώστε μαζί με το x_1 να αποτελούν μια βάση του χώρου και ο πίνακας με στήλες $Q = [x_1, w_1, \ldots, w_n]$ να είναι ορθομοναδιαίος: $Q^*Q = I$. Γράφουμε $Q = [x_1, W]$ (όπου W ο $n \times (n-1)$ πίνακας με στήλες w_i, $i = 2, \ldots, n$). Αφού $Ax_1 = \lambda x_1$, θα έχουμε ότι

$$Q^*AQ = \begin{bmatrix} x_1^* \\ W^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1, & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^*Ax_1 & x_1^*AW \\ W^*Ax_1 & W^*AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^*AW \\ 0 & W^*AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

όπου $b = W^*A^*x_1$ είναι διάνυσμα στήλης με $n-1$ συνιστώσες και $C = W^*AW$ είναι πίνακας $(n-1) \times (n-1)$. Αν ο A είναι πίνακας 2×2 έχουμε τελειώσει αφού ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικός.

Στη γενική περίπτωση έχουμε την ακόλουθη επαγωγική απόδειξη: Δείξαμε ότι η αναπαράσταση ισχύει για κάθε πίνακα 2×2 που είναι η βάση της επαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για κάθε πίνακα $(n-1) \times (n-1)$. Τότε για τον πίνακα C της (5.11) ισχύει ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος V διάστασης $(n-1) \times (n-1)$ τέτοιος ώστε $V^*CV = T_1$ όπου T_1 τριγωνικός πίνακας διάστασης $(n-1) \times (n-1)$. Θεωρούμε τώρα τον $n \times n$ πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $U^*U = I$ και συνεπώς ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος. Έχουμε επίσης ότι ο $P = QU$ είναι ορθομοναδιαίος ως γινόμενο ορθομοναδιαίων πινάκων και

$$\begin{aligned} P^*AP &= U^*Q^*AQU = U^* \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^*V \\ 0 & V^*CV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^*V \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός και επομένως έχουμε συμπληρώσει την απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι ο A και ο P^*AP έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αφού ο P^*AP είναι τριγωνικός, τα διαγώνια στοιχεία του θα είναι οι ιδιοτιμές του και άρα και οι ιδιοτιμές του A. Τέλος παρατηρούμε ότι αν ο A και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί, τότε το x_1 και λ_1 θα είναι πραγματικοί. Μπορούμε σ' αυτή την περίπτωση να διαπιστώσουμε με ένα επαγωγικό επιχείρημα ότι οι P και T είναι πραγματικοί πίνακες. □

5.4 Κανονικοί Πίνακες

Ορισμός 5. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται κανονικός αν $AA^* = A^*A$.*

Παρατηρείστε ότι αν ο A είναι ερμιτιανός ή συμμετρικός τότε είναι και κανονικός. Οι κανονικοί πίνακες είναι ακριβώς εκείνοι που διαγωνιοποιούνται από ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς όπως θα δούμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 12. *Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει $P^*AP = \Lambda$, όπου Λ διαγώνιος αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση: Αν ο A είναι ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος έχουμε $A = P\Lambda P^*$ και συνεπώς

$$AA^* = (P\Lambda P^*)(P\Lambda^* P^*) = P\Lambda\Lambda^* P^* = P\Lambda^*\Lambda P^* = (P\Lambda^* P^*)(P\Lambda P^*) = A^*A.$$

Στην παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι Λ και Λ^* αντιμετατίθενται αφού είναι διαγώνιοι πίνακες.

Για να δείξουμε την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι ο A είναι κανονικός. Είναι ορθομοναδιαία άνω τριγωνοποιήσιμος λόγω του θεωρήματος του Schur, όπως κάθε τετραγωνικός πίνακας, και συνεπώς $P^*AP = T$. Συνεπώς

$$TT^* \;=\; (P^*AP)(P^*A^*P) \;=\; P^*AA^*P \;=\; P^*A^*AP \;=\; (P^*A^*P)(P^*AP) \;=\; T^*T. \tag{5.13}$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα TT^* δίνονται από την έκφραση

$$(TT^*)_{ii} \;=\; \sum_{j=1}^{n} t_{ij}t^*_{ji} \;=\; \sum_{j=1}^{i} t_{ij}\bar{t}_{ij} \;=\; \sum_{j=1}^{i} |t_{ij}|^2 \tag{5.14}$$

όπου, στην παραπάνω σχέση λάβαμε υπ′ όψη ότι $t_{ij} = 0$ όταν $j > i$ αφού ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός. Ομοίως

$$(T^*T)_{ii} \;=\; \sum_{j=1}^{n} t^*_{ij}t_{ji} \;=\; \sum_{j=i}^{n} \bar{t}_{ji}t_{ji} \;=\; \sum_{j=i}^{n} |t_{ji}|^2 \tag{5.15}$$

Από τις σχέσεις (5.14) και (5.15) έχουμε, για $i = 1$,

$$|t_{11}|^2 \;=\; |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2$$

από την οποία συμπεραίνουμε, αφού $|t_{1j}|^2 \geq 0$, ότι

$$|t_{1j}|^2 \;=\; 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{5.16}$$

Για $i = 2$,

$$|t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 \;=\; |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \cdots + |t_{2n}|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την (5.16) και απλοποιώντας συμπεραίνουμε ότι

$$|t_{2j}|^2 \;=\; 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, n. \tag{5.17}$$

Παρομοίως, για $i = 3$,

$$|t_{13}|^2 + |t_{23}|^2 + |t_{33}|^2 \;=\; |t_{33}|^2 + |t_{34}|^2 + \cdots + |t_{3n}|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την (5.16) και την (5.17) και απλοποιώντας διαπιστώνουμε ότι

$$|t_{3j}|^2 \;=\; 0, \qquad j = 4, 5, \ldots, n. \tag{5.18}$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε επομένως ότι $t_{ij} = 0$ όταν $j > i$ και επομένως ο άνω τριγωνικός πίνακας T είναι στην ουσία διαγώνιος. □

5.5 Το θεώρημα Cayley-Hamilton

5.5.1 Δυνάμεις πινάκων

Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στους πραγματικούς αριθμούς. Η n–οστή δύναμη του πίνακα ορίζεται ως $A^n := A \cdot A^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, $A^1 = A$, $A^0 = I$. Αν ο πίνακας A είναι *αναστρέψιμος*, τότε ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται με τον προφανή τρόπο και στους αρνητικούς ακέραιους εκθέτες. Αν $p(x) := a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ είναι ένα πολυώνυμο (με πραγματικούς συντελεστές ή μιγαδικούς συντελεστές), τότε ο πίνακας $p(A)$ ορίζεται ως $p(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I$.

5.5.2 Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα

Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί ένα πολυώνυμο, που ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα και που ορίζεται ως $\chi(x) := \det(xI - A)$. Είναι εύκολο να δει κανείς (από τον ορισμό της ορίζουσας) ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει την μορφή $\chi(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. (Στην παραπάνω έκφραση επισημαίνουμε ότι ο συντελεστής του x^n είναι μονάδα, ενώ ο σταθερός όρος είναι $c_0 = (-1)^n \det(A)$.) Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα και αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζες $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (όχι υποχρεωτικά διακριτές), τότε

$$\chi(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα ορίζουμε A_{ij} την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε την γραμμή i και την στήλη j από τον αρχικό πίνακα. Θέτουμε $C_{ij} := (-1)^{i+j} A_{ji}$. Τότε, αν $C := (C_{ij})$, $AC = \det(A)I$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{kj} (-1)^{i+j} = \det(A) \delta_{ik}$$

όπου $\delta_{ik} = 0$ αν $i \neq k$ και 1 αν $i = k$.

Θεώρημα 13 (Cayley-Hamilton). *Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, ισχύει δηλαδή ότι*

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0. \tag{5.19}$$

Απόδειξη: Έστω C το αλγεβρικό συμπλήρωμα του πίνακα $xI - A$. Τότε

$$(xI - A)C = \det(xI - A)I. \tag{5.20}$$

Λόγω του τρόπου με τον οποίο ο C προκύπτει από τον $xI - A$, ισχύει ότι $C = x^{n-1}B_{n-1} + x^{n-2}B_{n-2} + \cdots + x^1B_1 + B_0$. Συνεπώς, από την (5.20) προκύπτει ότι

$$(xI - A)(x^{n-1}B_{n-1} + x^{n-2}B_{n-2} + \cdots + x^1B_1 + B_0) = x^nI + c_{n-1}x^{n-1}I + \cdots + c_1xI + c_0I$$

ή ισοδύναμα

$$x^nB_{n-1} + x^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + x(B_0 - AB_1) - AB_0 = x^nI + c_{n-1}x^{n-1}I + \cdots + c_1xI + c_0I.$$

Συνεπώς έχουμε τις ισότητες

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= Ic_{n-1} \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= Ic_{n-2} \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1I \\ -AB_0 &= c_0I. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με A^n, την δεύτερη με A^{n-1}, και ούτω καθ′ εξής και προσθέτωντας όλες τις εξισώσεις βλέπουμε ότι ισχύει η (5.21). ▮

Παρατήρηση: Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε είναι ακόμη ευκολότερο να αποδείξουμε το θεώρημα Caley-Hamilton. Πράγματι, σ′ αυτή την περίπτωση, υπάρχει αναστρέψιμος πίνακας M τέτοιος ώστε $A = M\Lambda M^{-1}$. (Ο Λ είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία του τις ιδιοτιμές του A ενώ οι στήλες του M είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.) Τότε, αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $A^k = (M\Lambda M^{-1})^k = M\Lambda^kM^{-1}$,

$$\begin{aligned} &A^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1A + c_0I \\ &= M\Lambda^nM^{-1} + c_{n-1}M\Lambda^{n-1}M^{-1} + c_{n-2}M\Lambda^{n-2}M^{-1} + \cdots + c_1M\Lambda M^{-1} + c_0M\Lambda^0M^{-1} \\ &= M\left(\Lambda^n + c_{n-1}\Lambda^{n-1} + c_{n-2}\Lambda^{n-2} + \cdots + c_1\Lambda + c_0I\right)M^{-1}. \end{aligned}$$

Ο διαγώνιος πίνακας που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση είναι μηδενικός γιατί, για οποιοδήποτε διαγώνιο στοιχείο του, έστω λ_i, ισχύει ότι $\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + c_{n-2}\lambda_i^{n-2} + \cdots + c_1\lambda_i + c_0 = 0$.

Η πλέον προφανής συνέπεια του θεωρήματος των Cayley-Hamilton είναι ότι, για έναν τετραγωνικό πίνακα $n \times n$, η n–οστή του δύναμη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n - 1$ πρώτων δυνάμεών του.

5.6 Το ελάχιστο πολυώνυμο

Ένα πολυώνυμο p με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{F}$ (το οποίο στην περίπτωσή μας είναι οι πραγματικοί ή οι μιγαδικοί αριθμοί) ονομάζεται *μονικό* αν ο συντελεστής της υψηλότερης δύναμης της μεταβλητής είναι 1, αν δηλαδή είναι της μορφής $p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$). Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Συμβολίζουμε με $p(A)$ τον τετραγωνικό πίνακα $n \times n$ που ορίζεται ως $p(A) := A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \cdots + p_1A + p_0I$. Θεωρούμε το σύνολο όλων των μονικών πολυωνύμων p για τα οποία ισχύει ότι $p(A) = 0$. Το σύνολο αυτό δεν είναι κενό διότι περιέχει τουλάχιστον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, $\chi(x)$, το οποίο είναι βαθμού n, όπως προκύπτει από το θεώρημα Cayley-Hamilton. Έστω $m(x)$ το μονικό πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού για το οποίο ισχύει $m(A) = 0$. Το πολυώνυμο αυτό είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω k ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου. (Αναγκαστικά, $k \leq n$ αφού ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι n.) Ας υποθέσουμε ότι το $h(x)$ είναι επίσης μονικό, βαθμού k, και ισχύει ότι $h(A) = 0$. Τότε για το πολυώνυμο $p(x) := m(x) - h(x)$ ισχύει ότι $p(A) = m(A) - h(A) = 0$ και $\deg(p) < k$ αφού τόσο το m όσο και το h είναι μονικά. ($\deg(p)$ είναι ο βαθμός του p.) Αφού k είναι εξ υποθέσεως ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου, $p(x) \equiv 0$ και $m(x) \equiv h(x)$.

Δεδομένου ότι οι πίνακες που εξετάζουμε περιγράφουν γραμμικούς μετασχηματισμούς, είναι καλύτερο να μελετήσουμε απ΄ ευθείας τον γραμμικό μετασχηματισμό f. Έστω V ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, έστω $n = \dim(V)$, ορισμένος πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$. Αν $f : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τότε συμβολίζουμε με f^m την σύνθεση $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (m φορές). Ο f^m είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός πάνω στον χώρο V. Αν $p(x) := a_mx^m + a_{m-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ είναι ένα πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{F}$, τότε με $p(f)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $a_mf^m + \cdots + a_1f + a_0I$ όπου I ο ταυτοτικός γραμμικός μετασχηματισμός πάνω στο V. Αν A είναι ο $n \times n$ πίνακας που εκφράζει τον γραμμικό μετασχηματισμό f ως προς μια βάση, έστω $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, τότε ο πίνακας που εκφράζει τον f^m ως προς την βάση αυτή είναι ο A^m και ο πίνακας που εκφράζει τον $p(f)$ είναι ασφαλώς ο $p(A) := a_mA^m + \cdots + a_1A + a_0I$ όπου I εδώ είναι ο ταυτοτικός πίνακας $n \times n$.

Θεώρημα 14. *Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας και $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε $p(A) = 0$ τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του A, $m(x)$, διαιρεί το $p(x)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Εφ΄ όσον $p(A) = 0$ ο βαθμός του $p(x)$ είναι μεγαλύτερος του βαθμού του $m(x)$. (Όπως είδαμε, από την μοναδικότητα του m δεν είναι δυνατόν να έχουμε $\deg(p) = \deg(m)$.) Αφού ο βαθμός του p είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον βαθμό του m, από τον αλγόριθμο της διαίρεσης των πολυωνύμων έχουμε $p(x) = q(x)m(x) + r(x)$ όπου ο βαθμός του $r(x)$ είναι αυστηρά μικρότερος από αυτόν του $m(x)$. Συνεπώς έχουμε $r(A) = p(A) - q(A)m(A) = 0$. Άρα, αν το $r(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από εκείνον του ελάχιστου πολυωνύμου για το οποίο ισχύει ότι $r(A) = 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατον και επομένως θα ισχύει ότι $r(x) \equiv 0$ και $p(x) = q(x)m(x)$, το οποίο συνεπάγεται ότι το $m(x)$ διαιρεί το $p(x)$. ∎

5.7 Το ελάχιστο πολυώνυμο και η σχέση του με το πρόβλημα της διαγωνοποίησης

Έστω V γραμμικός χώρος διάστασης n (στους μιγαδικούς αριθμούς) και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση σ' αυτόν. Έστω A ο πίνακας που περιγράφει αυτή την απεικόνιση ως προς μια συγκεκριμένη βάση, $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Θα απαντήσουμε τα εξής δύο ερωτήματα:

1. Πότε υπάρχει ένας μη ιδιόμορφος πίνακας S (δηλαδή μια αλλαγή βάσης) τέτοιος ώστε ο $\Lambda := S^{-1}AS$ να είναι διαγώνιος;
2. Αν αυτό δεν είναι εφικτό ποιά είναι η πλησιέστερη στη διαγώνια μορφή που μπορεί να πάρει ο $S^{-1}AS$;

Έστω $\chi_A(x) := (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, όπου λ_i, $i = 1, \ldots, r$ είναι οι *διακριτές* ιδιοτιμές του A και ν_i οι αντίστοιχες *αλγεβρικές πολλαπλότητες*. Ισχύει επομένως ότι $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Υπενθυμίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές και τις αλγεβρικές τους πολλαπλότητές και συνεπώς δεν αλλάζει σε οποιαδήποτε βάση και αν εκφράσουμε την γραμμική απεικόνιση f. Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο χαρακτηρίζει την f και δεν διακρίνει ανάμεσα στον πίνακα A και στον $S^{-1}AS$. Δεδομένου του θεωρήματος Caley–Hamilton, αν I είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, ισχύει ότι

$$\chi(f) = (f - \lambda_1 I)^{n_1} \cdots (f - \lambda_r I)^{n_r} = 0, \tag{5.21}$$

δηλαδή, ο μετασχηματισμός $\chi(f)$ είναι ταυτοτικά μηδενικός.

Συμβολίζουμε τον μηδενόχωρο ενός γραμμικού μετασχηματισμού, $g : V \to V$ με $\ker g := \{x \in V : g(x) = 0\}$.

Ορισμός 6. *Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f τότε ο μηδενόχωρος $ker(f - \lambda I)$ ονομάζεται* ιδιόχωρος *της λ. Η διάσταση του $ker(f - \lambda)$ ονομάζεται* γεωμετρική πολλαπλότητα *της λ.*

Έστω $V_i = \ker(f - \lambda_i I)$ ο μηδενόχωρος του γραμμικού μετασχηματισμού $f - \lambda_i I$. Αν $v \in V_i$ τότε $(f - \lambda_i I)v = 0$ το οποίο σημαίνει ότι $f(v) = \lambda_i v$ ή, αν A είναι ο πίνακας που περιγράφει τον γραμμικό μετασχηματισμό f ως προς μια συγκεκριμένη βάση, $Av = \lambda_i v$, δηλαδή το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο V_i, είναι γραμμικός υπόχωρος του V ως μηδενόχωρος ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Η διάσταση του V_i, $\gamma_i := \dim(V_i)$ ονομάζεται *γεωμετρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_i. Προφανώς, γ_i είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i.

Ορισμός 7. *Ένας πίνακας A, $n \times n$ ονομάζεται* διαγωνιοποιήσιμος *αν υπάρχει μη ιδιόμορφος (δηλαδή αντιστρέψιμος) πίνακας $n \times n$, έστω S, και διαγώνιος πίνακας $n \times n$, έστω Λ, τέτοιος ώστε*

$$S^{-1}AS = \Lambda. \tag{5.22}$$

Θεώρημα 15. *Ένας πίνακας $n \times n$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Απόδειξη: Παρατηρείστε ότι η (5.22) εκφράζεται ισοδύναμα ως

$$AS = S\Lambda \tag{5.23}$$

και αν οι στήλες του πίνακα S είναι $S = [s_1, \ldots, s_n]$ και ο διαγώνιος πίνακας Λ είναι $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ τότε η (5.23) γράφεται ως

$$As_i = \lambda_i s_i. \tag{5.24}$$

Από τις σχέσεις (5.23), (5.24) είναι σαφές ότι οι στήλες του S είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα Λ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Η γραμμική ανεξαρτησία των ιδιοδιανυσμάτων είναι αναγκαία προκειμένου ο πίνακας S να είναι αναστρέψιμος. ▮

Ισοδύναμα λέμε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f : V \to V$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του V η οποία να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.

Πόρισμα 2. *Ένας πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $n_i = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, r$ δηλαδή αν η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την γεωμετρική πολλαπλότητά της.*

Η πρόταση αυτή είναι προφανής συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος διότι μόνο στην περίπτωση αυτή θα έχει ο πίνακας A n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Η επόμενη πρόταση συνδέει το πρόβλημα της διαγωνοποίησης ενός πίνακα με το ελάχιστο πολυώνυμό του:

Θεώρημα 16. *Έστω A ένας πίνακας $n \times n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ οι διακριτές του ιδιοτιμές. Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε το $p(x) := (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A*

Απόδειξη: Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε υπάρχει βάση που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A, έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ισχύει ότι $p(A)v_i = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_r I)v_i$. Όμως, επειδή οι παράγοντες $(A - \lambda_j I)$ αντιμετατίθενται, ισχύει ότι

$$p(A)v_i = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \cdots (A - \lambda_r I)(A - \lambda_i I)v_i = 0.$$

Η παραπάνω σχέση, μαζύ με το γεγονός ότι τα v_i είναι βάση του χώρου, συνεπάγεται ότι $p(A)x = 0$ για κάθε διάνυσμα x του χώρου. Συνεπώς $p(A) = 0$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο, $m(x)$, διαιρεί το $p(x)$. Αυτό σημαίνει ότι το m είναι το γινόμενο κάποιων από τους όρους $(x - \lambda_j)$, δηλαδή $m(x) = \prod_{j \in \mathscr{M}} (x - \lambda_j)$ όπου $\mathscr{M} \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ (γνήσιο υποσύνολο). Αν υποθέσουμε ότι $i \neq \mathscr{M}$, δηλαδή ότι ο όρος $(x - \lambda_i)$ δεν είναι όρος του m. Τότε, αν v_i είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και $j \neq i$, έχουμε $(A - \lambda_j I)v_i = \lambda_i v_i - \lambda_j v_i = (\lambda_j - \lambda_i)v_i$. Επομένως

$$m(A)v_i = \left(\prod_{j \in \mathscr{M}} (A - \lambda_j I) \right) v_i = \left(\prod_{j \in \mathscr{M}} (\lambda_i - \lambda_j) \right) v_i.$$

Δεδομένου ότι $j \neq i$ για κάθε $j \in \mathscr{M}$ προκύπτει ότι $m(A)v_i \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $m(A) \neq 0$. Συνεπώς όλοι οι παράγοντες του $p(x)$ περιέχονται στο $m(x)$ και επομένως το $m(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο. ∎

Το παραπάνω θεώρημα σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα *έχει μόνο απλές ρίζες*, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα. Θα δούμε στη συνέχεια ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα έχει μόνο απλές ρίζες (οι οποίες βεβαίως θα είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα) τότε ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος. Προκειμένου να αποδείξουμε αυτή την αντίστροφη πρόταση θα χρειαστούμε μερικές επιπλέον έννοιες.

5.7.1 Αθροίσματα και Ευθέα Αθροίσματα Υποχώρων

Έστω V ένας γραμμικός χώρος διάστασης n και U, W, γραμμικοί υπόχωροι του V. Το σύνολο

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του V και ονομάζεται *άθροισμα* των υποχώρων U και W. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα δύο υποχώρων U και W είναι το σύνολο των στοιχείων του V που μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα ενός στοιχείου του U και ενός στοιχείου του V, *όχι υποχρεωτικά με μοναδικό τρόπο.* Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $U + W$ είναι πράγματι γραμμικός υπόχωρος του V: Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και $x_1, x_2 \in U + W$ τότε υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ και $w_1, w_2 \in W$ (όχι υποχρεωτικά μοναδικά) τέτοια ώστε $x_1 = u_1 + w_1$ και $x_2 = w_1 + w_2$, από τον ορισμό του συνόλου $U + W$. Συνεπώς,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2).$$

Όμως $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ επειδή ο U είναι γραμμικός υπόχωρος και ομοίως $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$. Επομένως το $\alpha x_1 + \beta x_2$ γράφεται ως άθροισμα ενός στοιχείου του U και ενός στοιχείου του W και συνεπώς ανήκει στο άθροισμα $U + W$, σύμφωνα με τον ορισμό.

Αν οι γραμμικοί υπόχωροι U και W ικανοποιούν επιπλέον την σχέση $U \cap V = \{0\}$ τότε το άθροισμά τους ονομάζεται *ευθύ άθροισμα* και συμβολίζεται ως $U \oplus W = \{u + w :$

$u \in U, w \in W\}$. Παρατηρείστε ότι αν $x \in U \oplus W$ τότε το x γράφεται σαν άθροισμα ενός στοιχείου του U και ενός στοιχείου του V *με μοναδικό τρόπο.* Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ όπου $u_i \in U$, $w_i \in W$ για $i = 1, 2$, τότε $u_1 - u_2 = w_1 - w_2$. Όμως, αφού οι U, W είναι γραμμικοί υπόχωροι, $u_1 - u_2 \in U$ και $w_1 - w_2 \in W$. Συνεπώς, λόγω της ισότητας των διαφορών και του γεγονότος ότι η τομή των U, W, είναι το μηδενικό στοιχείο του γραμμικού χώρου, $u_1 - u_2 = 0$ και παρόμοια $w_1 - w_2 = 0$.

Ορισμός 8. *Ο V είναι το* ευθύ άθροισμα *των υποχώρων $V_1, \ldots, V_r$ αν κάθε διάνυσμα $v \in V$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $v = v_1 + \cdots + v_r$ όπου $v_i \in V_i$. Το γεγονός αυτό το εκφράζουμε γράφοντας $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.*

Πρόταση 3. *Αν V_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ είναι υπόχωροι του V, B_i είναι βάση του V_i και $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$, τότε το σύνολο $\cup_{i=1}^{r} B_i$ είναι βάση του V.*

5.7.2 Πολυώνυμο Παρεμβολής του Lagrange

Δεδομένων n ζευγών πραγματικών αριθμών, (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ζητείται πολυώνυμο $p(x)$ (βαθμού $n - 1$ το πολύ) τέτοιο ώστε $p(x_i) = y_i$. Το ζητούμενο πολυώνυμο που ονομάζεται πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange μπορεί κανείς εύκολα να δει ότι είναι μοναδικό και δίδεται από την εκφραση

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

ή ισοδύναμα

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, L_i(x) \qquad \text{όπου} \qquad L_i(x) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Θεώρημα 17. *Έστω V γραμμικός χώρος διάστασης n και f γραμμικός μετασχηματισμός $f : V \to V$. Έστω λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ οι διακριτές ιδιοτιμές του f. Τότε, υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας που εκφράζει τον μετασχηματισμό f είναι διαγώνιος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του f είναι το $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι εύκολη και την έχουμε ήδη αποδείξει στο Θεώρημα (16). Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$ και θα αποδείξουμε ότι $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, όπου V_i είναι ο μηδενόχωρος του $f - \lambda_i I$ δηλαδή ο γραμμικός υπόχωρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του f και επομένως ότι υπάρχει βάση του V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του f, πράγμα που σημαίνει ότι στην βάση αυτή ο f θα εκφράζεται από ένα διαγώνιο πίνακα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το ελάχιστο πολυώνυμο έχει απλές ρίζες. Ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$p_i(x) \;=\; \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \frac{x-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Παρατηρείστε ότι

$$p_i(\lambda_k) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k = i \\ 0 & \text{αν} \quad k \neq i. \end{cases}$$

Τα πολυώνυμα $p_i(x)$ είναι βαθμού το πολύ $r-1$ και επομένως το πολυώνυμο

$$p(x) \;=\; \sum_{i=1}^{r} p_i(x)$$

είναι βαθμού το πολύ $r-1$. Επειδή το πολυώνυμο $p(x)-1$ έχει είναι επίσης το πολύ βαθμού $r-1$ και έχει r ρίζες, τις $x_1, x_2, \ldots, x_r$, συμπεραίνουμε ότι είναι ταυτοτικά το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή $p(x)-1 \equiv 0$. Επομένως $p(f) = I$ ή ισοδύναμα

$$I = \sum_{i=1}^{r} p_i(f).$$

Συνεπώς, για κάθε $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{r} p_i(f)v$. Θέτουμε $v_i = p_i(f)v$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}(f-\lambda_i I)v_i \;&=\; (f-\lambda_i I)p_i(f)v = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)} \left(\prod_{j=1}^{r}(f-\lambda_j I)\right) v \\ &=\; \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)}\, m(f)v = 0.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $v_i \in V_i = \ker(f-\lambda_i I)$. Ισχύει όμως ότι $V_i \cap V_j = \{0\}$ όταν $i \neq j$ διότι αν $v \in V_i$ τότε $fv = \lambda_i v$ και αν $v \in V_j$ τότε $fv = \lambda_j v$. Από τις δυο αυτές σχέσεις $\lambda_i v = \lambda_j v$ ή $(\lambda_i - \lambda_j)v = 0$ και συνεπώς, αφού $\lambda_i \neq \lambda_j$, $v = 0$. Επομένως $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$.

□

Θεώρημα 18. *Αν ο πίνακας A είναι ερμιτιανός, το ελάχιστο πολυώνυμό του έχει απλές ρίζες.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A δεν έχει απλές ρίζες. Τότε υπάρχει λ και πολυώνυμο $p(x)$ τέτοια ώστε $m(x) = (x-\lambda)^2 p(x)$. Αυτό σημαίνει ότι, αν θέσουμε $q(x) = (x-\lambda)p(x)$ ο πίνακας $q(A)$ δεν είναι μηδενικός (άλλως το m δεν θα ήταν το ελάχιστο πολυώνυμο) και επομένως υπάρχει στοιχείο v του χώρου V τέτοιο ώστε $w = q(A)v \neq 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}0 \;&<\; \langle w, w\rangle = \langle q(A)v, q(A)v\rangle = \langle (A-\lambda I)p(A)v, (A-\lambda I)p(A)v\rangle \\ &=\; \langle p(A)v, (A-\lambda I)^2 p(A)v\rangle \\ &=\; \langle p(A)v, m(A)v\rangle = \langle p(A)v, 0\rangle = 0\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. (Στις παραπάνω ισότητες χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού ο A είναι ερμιτιανός, και ο $A - \lambda I$ είναι ερμιτιανός, και επομένως, για οποιαδήποτε $x, y \in V$, $\langle (A - \lambda I)x, y\rangle = \langle x, (A - \lambda I)y\rangle$.) $\square$

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ερμιτιανοί πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι, κάτι που έχουμε ήδη δει.

Στην γενική περίπτωση, όταν ο γραμμικός μετασχηματισμός f δεν είναι υποχρεωτικά διαγωνιοποιήσιμος, το ελάχιστο πολυώνυμο έχει την μορφή $m(x) = (x-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x-\lambda_r)^{\mu_r}$ όπου $1 \leq \mu_i \leq n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες του χαρακτηριστικού αλλά ενδεχομένως με μικρότερη πολλαπλότητα. Ο πίνακας ειναι διαγωνιοποιήσιμος αν $\mu_i = 1$ για $1, \ldots, r$.

Παράδειγμα: Θεωρείστε τους δύο πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Και οι δύο έχουν χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(x) = (x-2)(x-1)^2$. Όμως, αν κάνουμε τις πράξεις βλέπουμε ότι $(A - I)(A - 2I) \neq 0$ συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $(x-2)(x-1)^2$ και ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. Όσον αφορά τον πίνακα B, $(B - I)(B - 2I) = 0$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του B είναι το $(x-2)(x-1)$. Αυτό σημαίνει ότι ο B είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Αν ένας πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε μπορεί να τεθεί με μια αλλαγή βάσης στη μορφή Jordan. Η μορφή αυτή είναι σχεδόν διαγώνια με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και μονάδες πάνω από την διαγώνιο για τις ιδιοτιμές εκείνες των οποίων η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη από την αλγεβρική. Χωρίς να μπούμε στις λεπτομέρειες ας δούμε το εξής παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $(x-2)^2$ (Η ιδιοτιμή 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2). Έχει όμως γεωμετρική πολλαπλότητα 1 γιατί μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2, το $(1, 1)^T$. Συνεπώς, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι επίσης το $(x-2)^2$. Ο πίνακας B μπορεί να γραφεί με μια αλλαγή βάσης στη μορφή Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το e^{Jt} μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n$ και να υπολογίσουμε τις δυνάμεις

$$J^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

ή να λύσουμε το διαφορικο σύστημα

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

πρώτα με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ προκειμένου να προσδιορίσουμε την πρώτη στήλη του πίνακα e^{Jt} και στη συνέχεια με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ώστε να προσδιορίσουμε την δεύτερη στήλη.

Αν ακολουθήσουμε την πρώτη μέθοδο έχουμε

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}n2^{n-1}\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{n!}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Στην τελευταία εξίσωση, εκτός από την σειρά για την εκθετική συνάρτηση, χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}n2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}2^{n-1} = te^{2t}$.

Ορισμός 9. *Δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$ ονομάζονται πρώτα μεταξύ τους (στους μιγαδικούς αριθμούς) αν δεν έχουν κοινές ρίζες.*

Θεώρημα 19. *Αν τα f, g είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους τότε υπάρχουν πολυώνυμα $a(x)$, $b(x)$ τέτοια ώστε $a(x)f(x) + b(x)g(x) \equiv 1$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\deg(f) \geq \deg(g)$. Ας δούμε πρώτα την ειδική περίπτωση όπου $\deg(g) = 0$ δηλαδή το g είναι το σταθερό πολυώνυμο $g(x) \equiv \theta$ (όπου $\theta \in \mathbb{C}$). Τότε, θέτοντας $a(x) \equiv 1$, $b(x) = \theta^{-1}(1 - f(x))$ βλέπουμε ότι ισχύει ταυτοτικά $1 \cdot f(x) + \theta^{-1}(1 - f(x)) \cdot \theta = 1$. Συνεπώς, η πρόταση ισχύει στην περίπτωση αυτή, δηλαδή ισχύει για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0$. Επαγωγικά: Έστω ότι ισχύει για $\deg(f) + \deg(g) \leq n - 1$. Αν $\deg(f) + \deg(g) = n$ τότε

$$f(x) = p(x)g(x) + r(x).$$

Έστω $\deg(r) = 0$. Αν $r(x) \equiv 0$ τότε αναγκαστικά $g(x) \equiv C$, (άλλως οι f, g θα είχαν ρίζα από κοινού) και συνεπώς η πρόταση ισχύει. Αν $\deg(r) > 0$ τότε τα g και r δεν έχουν κοινή ρίζα (γιατί αν είχαν τότε θα ήταν και ρίζα της f). Αφού $\deg(r) < \deg(g)$ και, επειδή $\deg(g) < \deg(f)$, $\deg(r) + \deg(g) < \deg(g) + \deg(f) = n$, από την επαγωγική υπόθεση

$$r(x)u(x) + g(x)v(x) \equiv 1.$$

Συνεπώς,

$$f(x)u(x) = p(x)u(x)g(x) + r(x)u(x) = p(x)g(x)u(x) + 1 - g(x)v(x)$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(x)u(x) + g(x)[v(x) - p(x)u(x0] \equiv 1.$$

□

5.8 Ασκήσεις

Πρόβλημα 1. Να διαγωνιοποιήσετε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

και να υπολογίσετε τον A^n για $n \in \mathbb{N}$

Λύση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & & \\ 3 & 9 & & \\ & & 1 & -3 \\ & & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 10 & & \\ & & 0 & \\ & & & 10 \end{bmatrix}$$

Αφού ο πίνακας A είναι συμμετρικός τα ιδιοδιανύσματα μπορεί να επιλεγούν με τρόπο που να είναι ορθογώνια και αυτό έγινε εδώ. (Λέμε «μπορεί να επιλεγούν» και όχι «είναι» επειδή οι ιδιοτιμές δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.) Συνεπώς, κανονικοποιώντας έχουμε την αναπαράσταση

$$A = U \Lambda U^T$$

όπου

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

και Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών. Παρατηρείστε ότι ο U είναι συμμετρικός συνεπώς $U^T = U$. Άρα ισχύει $U^2 = I$.

$$A^n = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 10^{n-1} & & \\ & & 0 & \\ & & & 10^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, μετά από στοιχειώδεις πράξεις έχουμε ότι

$$A^n = 10^{n-1} A.$$

Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει αφού μπορεί κανείς να δει με λίγη σκέψη ότι ο A είνα βαθμωτό πολλαπλάσιο ενός πίνακα προβολής.

Πρόβλημα 2. Να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και να υπολογίσετε τον B^n για $n \in \mathbb{N}$

Λύση: Αφού ο πίνακας είναι τριγωνικός οι ιδιοτιμές βρίσκονται στην διαγώνιο και είναι οι 0, 1 και 2. Βρίσκοντας τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$B^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 3. Ποιοι από τους πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \\ 2 & 8 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

μπορούν να διαγωνοποιηθούν με ένα ορθομοναδιαίο πίνακα, δηλαδή για ποίους από τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να γράψουμε $A_i = U_i \Lambda_i U_i^H$ όπου U_i ορθομοναδιαίος και Λ_i διαγώνιος $(i = 1, 2, 3, 4)$ με στοιχεία στο $\mathbb{C}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 4. α) Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3 καθώς και τον e^{tA}. β) Να επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 5. α) Πότε ένας πίνακας ονομάζεται ορθομοναδιαίος; Δείξτε ότι αν ο U είναι ορθομοναδιαίος τότε είναι και ο U^2. β) Πότε είναι το γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων $n \times n$ συμμετρικός πίνακας;

Πρόβλημα 6. Έστω v διάνυσμα στήλης του $\mathbb{R}^n$ με στοιχεία $v_1, \ldots, v_n$. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = vv^T = \begin{bmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & \cdots & v_1v_n \\ v_2v_1 & v_2v_2 & \cdots & v_2v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_nv_1 & v_nv_2 & \cdots & v_nv_n \end{bmatrix}$$

έχει n πραγματικές ιδιοτιμές (όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους) και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Περιγράψτε την περίπτωση $n = 3$, $v^T = (1, 1, 2)$.

Πρόβλημα 7. Λύστε με διαγωνοποίηση το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τον A^{-1} με την βοήθεια του θεωρήματος Cayley–Hamilton.

Πρόβλημα 10. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

και να δείξετε ότι τα $(1, -1)$ και $(1, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα.

Πρόβλημα 11. Έστω ο πίνακας

$$Q = \begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix}$$

όπου οι τετραγωνικοί 2×2 πίνακες K_1, K_2, δίδονται από τις

$$K_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2,$$

και τα υπόλοιπα στοιχεία του Q είναι μηδενικά. Να δείξετε ότι $\|Qx\| = \|x\|$, δηλαδή ότι ο Q διατηρεί τα μήκη. Να βρείτε επίσης τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αν $\theta_1 = \pi/4$ και $\theta_2 = \pi/2$.

Ασκηση 5.8.1. Θεωρείστε τον πίνακα $U = I - 2ww^T$ όπου $w^T = \frac{1}{9}(2, 2, 1)$. Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς σκεφτείτε ποιες πρέπει να είναι οι ιδιοτιμές και ποια τα ιδιοδιανύσματα του U με βάση την γεωμετρία. Επαληθεύστε τις σκέψεις σας.

Ασκηση 5.8.2. Έστω P ο πίνακας μεταθέσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

διάστασης n. Να δείξετε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του P είναι το $x^n - 1$. Αν $\omega = e^{2\pi i/n}$ να δείξετε ότι το ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ω^{n-r} δίνεται από την

$$x_r = (\omega^r, \omega^{2r}, \ldots, \omega^{nr})^T, \quad r = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.25}$$

Δείξτε ότι, αν

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ & & \cdots & & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

και $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$, τότε $A = f(P)$. Συμπεράνετε ότι οι ιδιοτιμές του A δίνονται από τις $f(\omega^{n-r})$, $r = 1, 2, \ldots, n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_r που δίνονται από την (5.25).

Ασκηση 5.8.3. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε επίσης το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα.

Κεφάλαιο 6

Ανάλυση Πινάκων

6.1 Πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικές συναρτήσεις

Ας θεωρήσουμε ένα (τετραγωνικό) πίνακα A, $n \times n$ του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής: $a_{ij}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα είναι συνεχείς, διαφορίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο του $A(t)$ ως

$$\frac{d}{dt}A(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(A(t+\delta) - A(t)\right)$$

Συνεπώς $[\frac{d}{dt}A(t)]_{ij} = \frac{d}{dt}[A(t)]_{ij}$ (δηλαδή το στοιχείο ij της παραγώγου του πίνακα A είναι η παράγωγος του στοιχείου ij του πίνακα A ή με άλλα λόγια ο πίνακας παραγωγίζεται στοιχείο προς στοιχείο). Για παράδειγμα, αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t & t^2 \end{bmatrix},$$

τότε

$$A'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{bmatrix}, \qquad B'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$ ενώ αντίθετα $B(t)B'(t) \neq B'(t)B(t)$. Εν γένει οι πίνακες A και A' δεν αντιμετατίθενται.

Από τον ορισμό μπορούμε να δούμε πώς μεταβάλλονται οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης πραγματικών συναρτήσεων στη περίπτωση των πινάκων.

Πρόταση 4. *Αν A, B είναι παραγωγίσιμοι τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$,*

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
(AB)' &= \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} \left(A(t+\delta)B(t+\delta) - A(t)B(t)\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} \left(A(t+\delta)B(t+\delta) - A(t+\delta)B(t) + A(t+\delta)B(t) - A(t)B(t)\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} A(t+\delta)\left(B(t+\delta) - B(t)\right) + \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} \left(A(t+\delta) - A(t)\right) B(t) \\
&= A'B + AB' \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

■

Αν στην πρόταση που μόλις δείξαμε πάρουμε $A = B$ έχουμε $(A^2)' = A'A + AA'$. Αν οι πίνακες A και A' αντιμετατίθενται τότε $(A^2)' = 2AA' = 2A'A$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι $(A^3)' = A'A^2 + AA'A + A^2A'$, $(A^4)' = A'A^3 + AA'A^2 + A^2A'A + A^3A'$, και γενικά, για κάθε ακέραιο m,

$$(A^m)' = \sum_{k=0}^{m-1} A^k A' A^{m-1-k}.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και θέσουμε $B = A^{-1}$ τότε έχουμε $0 = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})'$ απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.

6.2 Το εκθετικό ενός τετραγωνικού πίνακα

Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ μπορούμε να ορίσουμε το εκθετικό του μέσω της άπειρης σειράς

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \qquad (6.2)$$

Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η συνάρτηση $E(t) := e^{At}$, $t \in \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται παρόμοια ως

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \qquad (6.3)$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σειρά όρο προς όρο διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $E(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $E'(t) = AE(t) = E(t)A$ με αρχική συνθήκη $E(0) = I$. (Παρατηρήστε επίσης ότι ο πίνακας e^{tA} αντιμετατίθεται με τον A.)

6.2.1 Υπολογισμός του εκθετικού ενός πίνακα με αναγωγή στη διαγώνια μορφή

Ένας απλός τρόπος υπολογισμού του e^{tA} βασίζεται στην διαγωνοποίηση του A, υπό την προϋπόθεση ότι έχει ένα πλήρες σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Αν θέσουμε $S = [x_1| \ldots |x_n]$ και $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ τον διαγώνιο πίνακα με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A τότε

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

και

$$A^k = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1} \cdots S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^k S^{-1}.$$

Συνεπώς, από την σειρά (6.3) έχουμε

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S\Lambda^k S^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\Lambda^k\right) S^{-1} = Se^{t\Lambda}S^{-1} \tag{6.4}$$

όπου $e^{t\Lambda} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$.

6.3 Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων

Ο λόγος που παρεμβάλουμε την συζήτηση για τις νόρμες που ακολουθεί είναι προκειμένου να δικαιολογήσουμε θεωρητικά τα ζητήματα σύγκλισης που προκύπτουν, για παράδειγμα, από τον ορισμό (6.2). Ξεκινάμε την ενότητα αυτή με δύο σημαντικές ανισότητες.

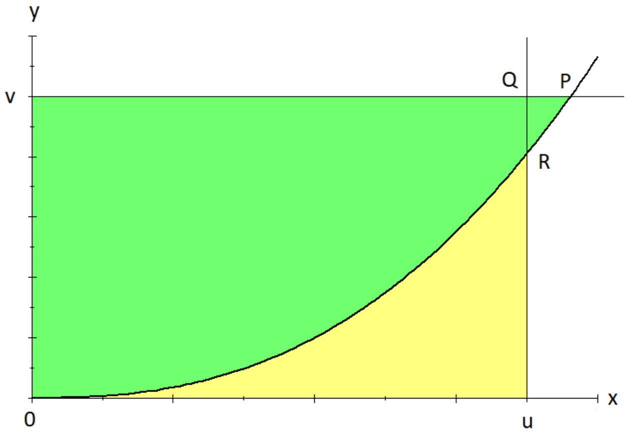
6.3.1 Η ανισότητα του Hölder

Πρόταση 5. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^+$ και $p, q \in [1, \infty)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{6.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^{p-1}$. Ισχύει ότι $\int_0^u x^{p-1}dx = \frac{u^p}{p}$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι το εμβαδόν του χωρίου $0uR$ (με κίτρινο χρώμα στο σχήμα). Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Γι' αυτή ισχύει ότι $\int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{v^{1+\frac{1}{p-1}}}{1+\frac{1}{p-1}} = \frac{v^q}{q}$ (Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι $1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$). Το δεύτερο αυτό ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν του χωρίου $0Pv$ στο σχήμα (με πράσινο χρώμα). Από το σχήμα είναι σαφές ότι

$$uv \leq \int_0^u x^{p-1}dx + \int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$



Σχήμα 6.1: Η ανισότητα του Hölder

επειδή το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $0uR$ και $0Pv$ υπερβαίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου $0uQv$ κατά το εμβαδόν του PQR. Έτσι δείξαμε ότι ισχύει η 6.12. Από το σχήμα επίσης φαίνεται ότι η ισότητα στην (6.12) ισχύει μόνο αν το εμβαδόν του PQR είναι μηδέν πράγμα που συμβαίνει αν $v = u^{p-1}$ ή ισοδύναμα $v^q = u^{q(p-1)}$ ή $v^q = u^p$. (Το τελευταίο ισχύει γιατί $p^{-1} + q^{-1} = 1$ συνεπάγεται $p = q(p-1)$.) □

Εφαρμόζοντας τη σχέση (6.12) για τις θετικές ποσότητες $\frac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $\frac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$, έχουμε

$$\frac{|x_i|^p}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \geq \frac{|x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

και αθροίζοντας ως προς i:

$$\frac{1}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Παρατηρείστε όμως ότι $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^p$ όπως και $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \|\boldsymbol{y}\|_q^q$. Επομένως, δεδομένου ότι $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει την ανισότητα του Hoelder:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{6.6}$$

6.3.2 Η ανισότητα του Minkowski

Αν $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ και $p \geq 1$ τότε

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p. \tag{6.7}$$

Η ανισότητα αυτή προφανώς ισχύει όταν $p = 1$. (Στην περίπτωση αυτή γίνεται η τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή.) Επομένως υποθέτουμε ότι $p > 1$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \\ &= \|\boldsymbol{x}\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p^{1+p/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q} \end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \leq \|\boldsymbol{y}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q} + \|\boldsymbol{y}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}$$

απ΄ όπου προκύπτει η (6.14) λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $p - p/q = 1$.

6.3.3 Νόρμες διανυσμάτων

Έστω V ένας γραμμικός χώρος στον $\mathbb{C}$ και $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ μια συνάρτηση από τον V στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

N1. $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ για κάθε $x \in V$ και $\alpha \in \mathbb{C}$.

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in V$. (Τριγωνική Ιδιότητα)

Η νόρμα γενικεύει την έννοια του μήκους ενός διανύσματος. Αν ο γραμμικός χώρος V είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο τότε η *επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο* είναι η

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{6.8}$$

Η νόρμα αυτή ονομάζεται και *ευκλίδεια νόρμα*. Στην περίπτωση που ο V είναι ο $\mathbb{C}^n$ είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η επαγώμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί πράγματι τις ιδιότητες του ορισμού. Πράγματι, αν $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, τότε $(\langle x, x\rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ απ΄ όπου βλέπουμε ότι η $N1$ ισχύει. Επίσης η $N2$ ισχύει διότι $\|\alpha x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \|x\|$.

Τέλος, προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι η $N3$ ισχύει παρατηρούμε ότι, αν $x, y \in V$ τότε

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\le \|x\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες στην παραπάνω σχέση προκύπτει η $N3$.

Η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι η μόνη που έχει ενδιαφέρον. Ανήκει σε μια κατηγορία ευρέως χρησιμοποιούμενων νορμών που ονομάζονται p–νόρμες και οι οποίες ορίζονται ως εξής όταν για $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty]. \tag{6.9}$$

Όταν $p = 2$ ο παραπάνω ορισμός μας δίνει την ευκλίδεια νόρμα (6.8). Ας βεβαιωθούμε ότι ο ορισμός (6.9) ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες που πρέπει να διαθέτει μια νόρμα. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $p \in [1, \infty)$. Η περίπτωση $p = \infty$ είναι ιδιάζουσα και θα την δούμε στη συνέχεια. Το γεγονός ότι ο ορισμός (6.9) ικανοποιεί τις $N1$ και $N2$ είναι εύκολο να το διαπιστώσετε και το αφήνουμε ως άσκηση. Μένει να βεβαιωθούμε ότι ικανοποιείται και η τριγωνική ιδιότητα, ότι δηλαδή αν $x, y \in \mathbb{C}^n$ τότε

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{6.10}$$

Στην γενική περίπτωση για την απόδειξη της παραπάνω ανισότητας χρειάζεται η ανισότητα του Hölder. Για την περίπτωση $p = 1$ τα πράγματα είναι απλά. $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$ λόγω της ανισότητας που ισχύει για τα μέτρα μιγαδικών αριθμών (ή τις απόλυτες τιμές των πραγματικών αριθμών) και αθροίζοντας έχουμε

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|.$$

Η περίπτωση $p = \infty$ προκύπτει ως το όριο του ορισμού (6.9) όταν $p \to \infty$. Αν θέσουμε $|x|_{\max} := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ τότε

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= |x|_{\max} \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\left(\frac{|x_1|}{|x|_{\max}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{|x|_{\max}}\right)^p} \\ &= |x|_{\max}\end{aligned}$$

Για να πεισθείτε για την τελευταία ισότητα παρατηρείστε ότι

$$\sqrt[p]{1} \leq \sqrt[p]{\left(\frac{|x_1|}{|x|_{\max}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{|x|_{\max}}\right)^p} \leq \sqrt[p]{n}$$

και επομένως

$$1 \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\left(\frac{|x_1|}{|x|_{\max}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{|x|_{\max}}\right)^p} \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} = 1.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ επίσης ικανοποιεί τις ιδιότητες N_1, N_2, N_3 του ορισμού της νόρμας.

Η νόρμα απαιτείται προκειμένου να ορίσουμε την έννοια της απόστασης δύο διανυσμάτων σ' ένα γραμμικό χώρο, που με τη σειρά της είναι απαραίτητη προκειμένου να ορίσουμε έννοιες όπως η σύγκλιση.

Ορισμός 10. *Αν $\{x_n\}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων ενός γραμμικού χώρου V και $x \in V$ θα λέμε ότι η ακολουθία έχει όριο το x και θα γράφουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ αν*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{6.11}$$

6.3.4 Η ανισότητα του Hölder

Πρόταση 6. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^+$ και $p, q \in [1, \infty)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{6.12}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^{p-1}$. Ισχύει ότι $\int_0^u x^{p-1}dx = \frac{u^p}{p}$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Γι' αυτή ισχύει ότι $\int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{v^{1+\frac{1}{p-1}}}{1+\frac{1}{p-1}} = \frac{v^q}{q}$ (Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι $1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$). Από το σχήμα είναι σαφές ότι

$$uv \leq \int_0^u x^{p-1}dx + \int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

επειδή το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $0uR$ και $0Pv$ υπερβαίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου $0uQv$ κατά το εμβαδόν του PQR. Έτσι δείξαμε ότι ισχύει η 6.12. Από το σχήμα επίσης φαίνεται ότι η ισότητα στην (6.12) ισχύει μόνο αν το εμβαδόν του PQR είναι μηδέν πράγμα που συμβαίνει αν $v = u^{p-1}$ ή ισοδύναμα $v^q = u^{q(p-1)}$ ή $v^q = u^p$. (Το τελευταίο ισχύει γιατί $p^{-1} + q^{-1} = 1$ συνεπάγεται $p = q(p-1)$.) □

Εφαρμόζοντας τη σχέση (6.12) για τις θετικές ποσότητες $\frac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $\frac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$, έχουμε

$$\frac{|x_i|^p}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \geq \frac{|x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

και αθροίζοντας ως προς i:

$$\frac{1}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Παρατηρείστε όμως ότι $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^p$ όπως και $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \|\boldsymbol{y}\|_q^q$. Επομένως, δεδομένου ότι $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει την ανισότητα του Hoelder:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{6.13}$$

6.3.5 Η ανισότητα του Minkowski

Αν $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ και $p \geq 1$ τότε

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p. \tag{6.14}$$

Η ανισότητα αυτή προφανώς ισχύει όταν $p = 1$. (Στην περίπτωση αυτή γίνεται η τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή.) Επομένως υποθέτουμε ότι $p > 1$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} &\le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\\ &= \|\boldsymbol{x}\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p^{1+p/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}\end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \le \|\boldsymbol{y}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \le \|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q} + \|\boldsymbol{y}\|_p\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}$$

απ΄ όπου προκύπτει η (6.14) λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $p - p/q = 1$.

6.4 Νόρμες Πινάκων

Ορισμός 11. *Έστω $\mathscr{L}^{m\times n}$ το σύνολο των πινάκων $m \times n$ με στοιχεία στο $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathscr{L}^{m\times n} \to [0,\infty)$ ονομάζεται νόρμα αν ισχύουν οι εξής συνθήκες*

MN1. $\|A\| \ge 0$ *για κάθε* $A \in \mathscr{L}^{m\times n}$ *και* $\|A\| = 0$ *αν και μόνο αν* $A = 0$.

MN2. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$ *και κάθε* $A \in \mathscr{L}^{m\times n}$, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

MN3. Για κάθε $A, B \in \mathscr{L}^{m\times n}$, $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$. *(Τριγωνική Ιδιότητα)*

Ξωρίς ουσιαστική απώλεια γενικότητας θα περιοριστούμε σε τετραγωνικούς πίνακες, δηλαδή στοιχεία του $\mathscr{L}^{n\times n}$. Επίσης θα περιοριστούμε στις λεγόμενες *επαγόμενες νόρμες* που προκύπτουν από τις αντίστοιχες νόρμες των στοιχείων του $\mathbb{C}^n$.

Ορισμός 12 (Επαγόμενη Νόρμα Πίνακα)**.** *Για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{C}^n$ η επαγόμενη νόρμα στον $\mathscr{L}^{n\times n}$ ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{C}^n : x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{6.15}$$

ή ισοδύναμα

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{C}^n : \|x\|=1}\|Ax\|. \tag{6.16}$$

Η νόρμα που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της (6.15) είναι η νόρμα του $\mathbb{C}^n$. Είναι εύκολο να δούμε την ισοδυναμία των δύο διατυπώσεων του ορισμού. Βασίζεται στην ιδιότητα $N2$ για τις νόρμες του $\mathbb{C}^n$. Μένει βεβαίως να δείξουμε ότι ο ορισμός της επαγόμενης νόρμας πράγματι ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες, MN1 – MN3.

Οι ιδιότητες MN1 και MN2 είναι εύκολο να διαπιστώστουμε ότι ισχύουν και τις αφήνουμε ως άσκηση. Για να αποδείξουμε την MN3 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|M+N\| &= \sup_{\|x\|=1}\{\|Mx+Nx\|\} \leq \sup_{\|x\|=1}\{\|Mx\|+\|Nx\|\} \\ &\leq \sup_{\|x\|=1}\{\|Mx\}+\sup_{\|x\|=1}\{\|Nx\} = \|M\|+\|N\|.\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει την ανισότητα N3 για νόρμες διανυσμάτων ενώ η δεύτερη ανισότητα από το γεγονός ότι στο αριστερό σκέλος μεγιστοποιούμε το άθροισμα $\|Mx\|+\|Nx\|$ για όλα τα x για τα οποία $\|x\|=1$ ενώ στο δεξί σκέλος μεγιστοποιούμε τον καθένα από τους δύο όρους χωριστά.

Πρόταση 7. *Για μια επαγόμενη νόρμα ενός πίνακα ισχύει επίσης η ανισότητα*

MN4. $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Απόδειξη. Αν $Bx=0$ για κάθε x τότε $B=0$ και η MN4 ισχύσει ως ισότητα. Διαφορετικά, συμβολίζοντας με $S:=\{x:\|x\|=1\}$ την μοναδιαία σφαίρα,

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\{\|ABx\|\} = \sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\left\{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\|Bx\|\right\} \\ &\leq \sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\left\{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\right\}\sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\{\|Bx\|\} \qquad (6.17)\end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι στο δεξί σκέλος μεγιστοποιούμε κάθε έναν από τους δύο παράγοντες χωριστά. Προφανώς, $\sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\{\|Bx\|\}=\sup_{x\in S}\{\|Bx\|\}=\|B\|$. Λόγω της N2, $\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}=\|A\left(\frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\|$, και επομένως

$$\sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\left\{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\right\} = \sup_{y:\|y\|=1,\,y=Bx\text{για κάποιο }x}\{\|Ay\|\} \leq \sup_{y:\|y\|=1,}\{\|Ay\|\} \qquad (6.18)$$

όπου η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι μεγιστοποιούμε πάνω σε ένα μεγαλύτερο σύνολο. Από τις (6.17), (6.18), προκύπτει η MN4. □

6.5 Ασκήσεις

Πρόβλημα 4. α) Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3 καθώς και τον e^{tA}. β) Να επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 7. Λύστε με διαγωνοποίηση το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 8. Αν $A^T = A$ δείξτε ότι $e^A = (e^A)^T$.

Πρόβλημα 9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τον A^{-1} με την βοήθεια του θεωρήματος Cayley–Hamilton και τον e^{At}.

Πρόβλημα 10. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

και να δείξετε ότι τα $(1, -1)$ και $(1, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα. Κάτω από ποιές συνθήκες είναι ό πίνακας A θετικά ορισμένος;

Κεφάλαιο 7

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μια διαφορική εξίσωση είναι μια σχέση που συνδέει μια συνάρτηση $y(x)$ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x με την μεταβλητή και της παραγώγους της, $y'(x)$, $y''(x)$, κ.ο.κ. Η *τάξη* μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η μέγιστη τάξη παραγώγου της εξαρτημένης μεταβλητής στη εξίσωση. Για παράδειγμα η

$$(y'')^2 + (y')^2 \ = \ x^2$$

είναι διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) δεύτερης τάξης.

Η διαφορική εξίσωση $\phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ δίδεται σε *πεπλεγμένη μορφή*. Σε αντιδιαστολή η εξίσωση $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ δίδεται σε κανονική μορφή.

Οι παραπάνω εξισώσεις ανήκουν στην κατηγορία των *συνήθων διαφορικών εξισώσεων* διότι υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Όταν υπάρχουν δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και μια εξαρτημένη μεταβλητή και οι *μερικές παράγωγοί τους* τότε έχουμε *μερικές διαφορικές εξισώσεις*. Για παράδειγμα, η μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ = \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.1}$$

συνδέει τις μερικές παραγώγους της εξαρτημένης μεταβλητής u ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και t. Μια λύση εξίσωσης αυτής είναι η

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}} \tag{7.2}$$

όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς αντικαθιστώντας την (7.2) στην (7.1). Στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε στην μελέτη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

7.1 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Αυτές είναι εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \tag{7.3}$$

όπου f, g, δεδομένες συναρτήσεις, ή ισοδύναμα εξισώσεις της μορφής $\phi(y)dy = \chi(x)dx$. Οι λύση μιας τέτοιας εξίσωσης δίδεται ως

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

7.2 Εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{ex+fy}$

Θέτουμε $v := y/x$ και επομένως $vx = y$ απ΄ όπου έχουμε $v'x + v = y'$ (Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $v' := \frac{dv}{dx}$, $y' := \frac{dy}{dx}$.) Συνεπώς

$$v'x + v = \frac{a+bv}{e+fv}$$

ή

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{a+(b-e)v-fv^2}{e+fv}$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει την λύση

$$\int \frac{e+fv}{a+(b-e)v-fv^2}dv = \int \frac{dx}{x}.$$

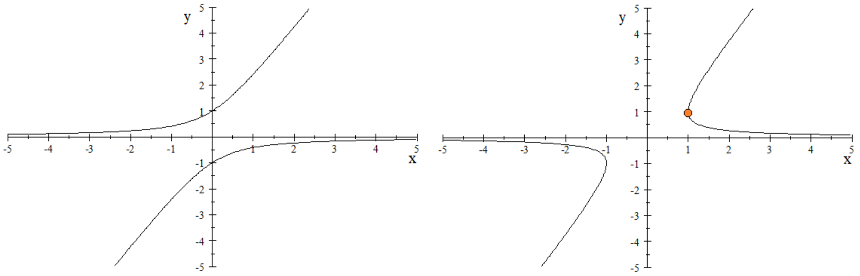
Το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά της εξισώσεως μπορεί να υπολογιστεί πάντα σε κλειστή μορφή

Παράδειγμα. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x} \tag{7.4}$$

με αρχική συνθήκη $y(1) = 1$. Θέτοντας $v := y/x$ έχουμε $y = xv$ και $y' = v + xv'$ και η (7.4) γίνεται

$$v + xv' = \frac{v}{v-1} \quad \text{ή} \quad xv' = \frac{v(2-v)}{v-1}$$



$K \; = \; 1$ $\qquad$ $K \; = \; -1$

Σχήμα 7.1: Η παραβολή $y^2 - 2xy = K$ για $K = 1$ και $K = -1$

που γράφεται ως

$$\frac{v-1}{v(2-v)}\,dv \;=\; \frac{dx}{x}$$

και αναλύοντας σε απλά κλάσματα

$$-\frac{1}{2}\,\frac{dv}{v} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{dv}{2-v} \;=\; \frac{dx}{x}.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int \frac{dv}{v} \;+\; \int \frac{dv}{v-2} \;=\; -2\int \frac{dx}{x}$$

και συνεπώς

$$\ln v \;+\; \ln(v-2) \;=\; -2\ln x + C$$

ή

$$\ln|v(v-2)x^2| \;=\; C.$$

Συνεπώς $vx(vx-2x) = K$ όπου $K \neq 0$ ή

$$y^2 - 2xy \;=\; K. \tag{7.5}$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει μια παραβολή. Το Σχήμα 7.1 δείχνει το είδος της παραβολής ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς K. Η αρχική συνθήκη $y(1) = 1$ δίνει $1^2 - 2\cdot 1\cdot 1 = K$ που συνεπάγεται $K = -1$. Μόνο ο δεξιός κλάδος αποτελεί λύση.

7.3 Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Αυτές είναι εξισώσεις της μορφής

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0. \tag{7.6}$$

όπου M, N είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Η εξίσωση (7.6) είναι γραμμένη σε διαφορική μορφή και είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

υποθέτοντας ότι ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Η εξίσωση (7.6) ονομάζεται *ακριβής* αν υπάρχει συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

$$\Phi_x := \frac{\partial \Phi}{\partial x} = M, \quad \text{και} \quad \Phi_y := \frac{\partial \Phi}{\partial x} = N. \tag{7.7}$$

Αν η εξίσωση είναι ακριβής και ισχύει η (7.7) για κάποια συνάρτηση Φ, τότε

$$d\Phi \;=\; \Phi_x dx + \Phi_y dy \;=\; M dx + N dy \;=\; 0$$

και συνεπώς η λύση της εξίσωσης (7.6) είναι

$$\Phi(x,y) \;=\; C \tag{7.8}$$

όπου C μια αυθαίρετη σταθερά. Συνεπώς η (7.8) προσδιορίζει μια *οικογένεια καμπυλών* στον $\mathbb{R}^2$.

7.4 Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Έστω η εξίσωση σε διαφορική μορφή

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0 \tag{7.9}$$

η οποία υποθέτουμε ότι δεν είναι ακριβής, δηλαδή $M_y \neq N_x$. Αναζητούμε συνάρτηση $\mu(x,y)$ τέτοια ώστε η εξίσωση

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy \;=\; 0$$

να είναι ακριβής. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{7.10}$$

δηλαδή ότι

$$\mu_y M + \mu M_y \;=\; \mu_x N + \mu N_x. \tag{7.11}$$

Η εξίσωση (7.11) είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση η οποία εν γένει είναι δύσκολο να επιλυθεί. Είναι όμως εύκολο να διαπιστώσουμε κατά πόσον υπάρχει ολοκληρωτικός παράγων $\mu(x)$ που να εξαρτάται μόνο από το x. Στην περίπτωση αυτή $\mu_y = 0$, $\mu_x = \frac{d\mu}{dx}$, και συνεπώς, από την (7.11)

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} \;=\; \frac{M_y - N_x}{N}. \tag{7.12}$$

Θα πρέπει επίσης το δεξιό μέλος της (7.12) να εξαρτάται μόνο από το x και όχι από το y. Συνεπώς θα πρέπει

$$\frac{M_y - N_x}{N} \;=\; \phi(x)$$

για κάποια συνάρτηση ϕ, και επομένως $\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx} \;=\; \phi(x)$ που σημαίνει ότι

$$\mu(x) \;=\; e^{\int \phi(x)dx} \tag{7.13}$$

είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας.

Παρομοίως, θα υπάρχει ολοκληρωτικός παράγων $\mu(y)$ που να εξαρτάται μόνο από το y (και επομένως $\mu_x = 0$, $\mu_y = \frac{d\mu}{dy}$) αν

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} \;=\; \frac{N_x - M_y}{M} \tag{7.14}$$

και το δεξιό μέλος της (7.14) εξαρτάται μόνο από το y και επομένως γράφεται ως $\psi(y)$ για κάποια συνάρτηση ψ. Τότε $\frac{1}{\mu(y)}\frac{d\mu}{dy} \;=\; \psi(y)$ και ο ολοκληρωτικός παράγων είναι

$$\mu(y) \;=\; e^{\int \phi(y)dy}. \tag{7.15}$$

Παράδειγμα 1. Έστω η Δ.Ε. $(y^2 + 1 + x)dx + 2ydy = 0$. Η εξίσωση αυτή δεν είναι αρκριβής αφού $M_y = 2y \neq 0 = N_x$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{M_y - N_x}{N} \;=\; \frac{2y - 0}{2y} \;=\; 1$$

και το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης δεν εξαρτάται από το y συνεπώς $\mu(x) \;=\; e^{\int 1dx} = e^x$ είναι ο ολοκληρωτικός παράγων. Κατά συνέπεια η εξίσωση

$$(y^2 + 1 + x)e^x dx + 2ye^x dy = 0$$

είναι ακριβής. Αρα

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2ye^x \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = y^2 e^x + f(x).$$

Παίρνοντας μερική παράγωγο ως προς x έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \;&=\; y^2 e^x + f'(x) = y^2 e^x + (1 + x)e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x(1 + x)\\ &\Rightarrow \quad f(x) = e^x + xe^x - e^x + C = xe^x + C.\end{aligned}$$

Επομένως η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y^2 e^x + xe^x \;=\; K.$$

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την Δ.Ε. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ η οποία δεν είναι ακριβής αφού $M_y = 1 \neq 2xy - 1 = N_x$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - 2xy + 1}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}$$

που είναι συνάρτηση μόνο του x. Αρα $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ είναι ο ολοκληρωτικός παράγων και η εξίσωση

$$\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

είναι ακριβής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση Φ τέτοια ώστε $\Phi_x = \frac{y}{x^2}$ και $\Phi_y = y - \frac{1}{x}$. Επομένως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \;\Rightarrow\; \Phi = -\frac{y}{x} + g(y) \;\Rightarrow\; \Phi_y = -\frac{1}{x} + g'(y) = y - \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; g'(y) = y.$$

Συμπεραίνουμε ότι $g(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$ και επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = K.$$

7.5 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Μια *ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης* είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y' + p(x)y = 0 \tag{7.16}$$

όπου $p(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με τον *ολοκληρωτικό παράγοντα* $e^{\int_0^x p(u)du}$ έχουμε

$$y'e^{\int_0^x p(u)du} + p(x)ye^{\int_0^x p(u)du} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\left(ye^{\int_0^x p(u)du}\right)' = 0.$$

Συνεπώς

$$ye^{\int_0^x p(u)du} = C$$

όπου C μια αυθαίρετη ολοκληρωτική σταθερά η οποία προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη, $y(0)$ δεδομένο. Συνεπώς

$$y = y(0)e^{-\int_0^x p(u)du}. \tag{7.17}$$

Η παραπάνω λύση μπορούμε να δούμε εύκολα ότι είναι μοναδική.

Για παράδειγμα, η μοναδική λύση της $y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, είναι η $y(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μια *μη ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης* είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y' + p(x)y \;=\; r(x) \tag{7.18}$$

όπου $p(x)$, $r(x)$, είναι συνεχείς συναρτήσεις. Πολλαπλασιάζοντας πάλι με τον ίδιο παράγοντα έχουμε

$$y'e^{\int_0^x p(u)du} \;+\; p(x)ye^{\int_0^x p(u)du} \;=\; r(x)e^{\int_0^x p(u)du}$$

ή

$$\left(ye^{\int_0^x p(u)du}\right)' \;=\; r(x)e^{\int_0^x p(u)du}.$$

Ολοκληρώνοντας, αυτό δίνει

$$y(x) \;=\; Ce^{-\int_0^x p(u)du} \;+\; e^{-\int_0^x p(u)du}\int_0^x r(\xi)e^{\int_0^\xi p(u)du}d\xi\;.$$

Θέτωντας $x = 0$ βλέπουμε ότι $y(0) = C$ και παρατηρούμε ότι το παραπάνω επιχείρημα δείχνει ότι η λύση που βρήκαμε είναι και μοναδική. Έτσι έχουμε

$$y(x) \;=\; y(0)e^{-\int_0^x p(u)du} \;+\; \int_0^x r(\xi)e^{-\int_\xi^x p(u)du}d\xi\;. \tag{7.19}$$

Παράδειγμα 7.5.1. Η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{1+x}y = 1, \qquad y(0) = 1,$$

με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int_0^x \frac{1}{1+u}du} = e^{\log 1+x} = 1 + x$, μπορούμε να δούμε ότι έχει την λύση

$$y(x) = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1+x}{2}.$$

Παράδειγμα 7.5.2. Η διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = x, \qquad y(0) = 0,$$

με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int xdx} = e^{\frac{x^2}{2}}$ γίνεται $e^{\frac{x^2}{2}}y' + xe^{\frac{x^2}{2}}y = xe^{\frac{x^2}{2}}$ ή $\left(e^{\frac{x^2}{2}}y\right)' = xe^{\frac{x^2}{2}}$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε

$$e^{\frac{x^2}{2}}y = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

όπου C είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης, ή

$$y(x) = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Δεδομένου ότι $y(0) = 1 + C = 0$, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

7.6 Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli

Αυτές είναι εξισώσεις της μορφής

$$y' + P(x)y \;=\; Q(x)y^n \tag{7.20}$$

όπου $n \notin \{0,1\}$. (Στην περίπτωση που $n = 0$ ή $n = 1$ η εξίσωση (7.20) μεταπίπτει σε γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης.) Θέτοντας $z := y^{1-n}$ έχουμε

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \;\;\Rightarrow\;\; y' = z'\frac{y^n}{1-n}.$$

Αντικαθιστώντας στην (7.20)

$$z'\frac{y^n}{1-n} + P(x)y \;=\; Q(x)y^n \;\;\Rightarrow\;\; z' + (1-n)P(x)y^{1-n} \;=\; (1-n)Q(x)$$

ή

$$z' + (1-n)P(x)z \;=\; (1-n)Q(x). \tag{7.21}$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$xy' + y \;=\; x^4y^3.$$

Πρόκειται για εξίσωση Bernoulli με $n = 3$. Θέτουμε $z = y^{-2}$ και επομένως $z' = -2y^{-3}y'$ ή $y' = -\frac{1}{2}y^3z'$ και επομένως

$$-\frac{x}{2}y^3z' + y \;=\; x^4y^3$$

ή

$$z' - \frac{2}{x}y^{-2} \;=\; -2x^3$$

που δίδει

$$z' - \frac{2}{x}z \;=\; -2x^3.$$

Ο ολοκληρωτικός παράγων αυτής της εξίσωσης είναι $e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{x^2}z' - \frac{2}{x^3} \;=\; 2x \;\;\Rightarrow\;\; \left(\frac{z}{x^2}\right)' \;=\; -2x$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\frac{z}{x^2} \;=\; -\int 2x\,dx \;\;\Rightarrow\;\; z = -x^4 + Cx^2.$$

Επομένως έχουμε

$$y \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2(C-x^2)}}.$$

Ασκηση 7.6.1. *Να επιλύσετε την ΔΕ* $xy' + y = xy^2$.

7.7 Λογιστικά Πληθυσμιακά Πρότυπα

Έστω $x(t)$ το μέγεθος του ενός πληθυσμού την χρονική στιγμή t. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού δίδεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = rx(C-x), \qquad x(0) = x_0. \tag{7.22}$$

Η παράμετρος C ονομάζεται 'φέρουσα ικανότητα' του συστήματος. Όταν ο πληθυσμός ξεπερνά το όριο C τότε ο ρυθμός αύξησης γίνεται αρνητικός (δηλαδή οι γεννήσεις ξεπερνούν τους θανάτους) και ο πληθυσμός μειώνεται. Η εξίσωση (7.22) είναι χωριζομένων μεταβλητών εφ' όσον μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dx}{x(C-x)} = rdt.$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{1}{x(C-x)} = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{C-x}\right)$$

έχουμε

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{C-x} = \int Crdt$$

και επομένως

$$\log x - \log(C-x) = Crt + k.$$

Άρα $\log \frac{x}{C-x} = k + Crt$ και επομένως, θέτοντας $K = e^k > 0$,

$$\frac{x}{C-x} = K\,e^{Crt}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x(t) = \frac{KC\,e^{Crt}}{1+Ke^{Crt}}. \tag{7.23}$$

Θέτοντας $t=0$ στην παραπάνω σχέση έχουμε $x_0 = x(0) = \frac{CK}{1+K}$ και επομένως $K = \frac{x_0}{C-x_0}$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (7.23) παίρνουμε

$$x(t) = \frac{Cx_0\,e^{Crt}}{C-x_0+x_0\,e^{Crt}}, \quad t \geq 0. \tag{7.24}$$

Παράδειγμα 1. Μια φήμη εξαπλώνεται σε μια πόλη με πληθυσμό $C = 10^5$. Έστω $P(t)$ ο αριθμός των ανθρώπων που έχουν ακούσει την φήμη. Ό ρυθμός μεταβολής (δηλαδή εν προκειμένω αύξησης) του $P(t)$ είναι ανάλογος των ανθρώπων που έχουν ακούσει την φήμη, P επί των αριθμό εκείνων που δεν την έχουν ακούσει, $C-P$, δηλαδή $\frac{d}{dt}P = rP(C-P)$. Υποθέτουμε ότι $P(0) = 10^3$ και ότι, μετά από 1 εβδομάδα, $P(1) = 10^4$. Η τιμή του συντελεστή k δεν είναι γνωστή. Σε πόσες εβδομάδες θα έχει ακούσει την φήμη το 80% του συνολικού πληθυσμού της πόλης;

Από την (7.24) έχουμε

$$P(1) = \frac{CP(0)}{[C - P(0)]e^{-Cr} + P(0)} \quad \Rightarrow \quad 10^4 = \frac{10^5 \cdot 10^3}{[10^5 - 10^3]e^{-10^5 r} + 10^3}$$

ή

$$e^{-10^5 r} = \frac{10^4 - 10^3}{10^5 - 10^3} = 10 - 1100 - 1 = \frac{1}{11}.$$

Αν τ είναι ο χρόνος (σε εβδομάδες) που τ0 80% του πληθυσμού έχει ακούσει την φήμη,

$$P(\tau) = 0.8 \cdot 10^5 = \frac{CP(0)}{[C - P(0)]e^{-Cr\tau} + P(0)} = \frac{10^5 \cdot 10^3}{[10^5 - 10^3]e^{-10^5 r\tau} + 10^3}$$

και συνεπώς

$$0.8 = \frac{10^3}{[10^5 - 10^3]\left(\frac{1}{11}\right)^\tau + 10^3} \quad \Rightarrow \quad 0.8 = \frac{1}{99\left(\frac{1}{11}\right)^\tau + 1}$$

και τελικά $\tau = \frac{\log(4 \cdot 99)}{\log 11} \approxeq 2.49$. Αυτό σημαίνει ότι το 80% του πληθυσμού θα έχει ακούσει την φήμη περίπου 2.5 εβδομάδες από την αρχή του χρόνου (όταν 10^3 άνθρωποι την είχαν ακούσει).

7.8 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξης

Λήμμα 3. *Έστω $I = [a, b]$ και $\sigma : I \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν για κάθε*

$$\sigma'(x) \leq K\sigma(x) \quad \forall x \in [a, b] \tag{7.25}$$

για κάποια σταθερά $K > 0$ τότε ισχύει ότι

$$\sigma(x) \ \leq \ \sigma(a)e^{K(x-a)} \quad a \leq x \leq b. \tag{7.26}$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της ανισότητας $\sigma'(x) \leq K\sigma(x)$ με την θετική ποσότητα $e^{-K(x-a)}$ έχουμε $e^{-K(x-a)}\sigma'(x) \leq e^{-K(x-a)}\sigma(x)$ και συνεπώς

$$\left(e^{-K(x-a)}\sigma(x)\right)' \ \leq \ 0.$$

Η τελευταία αυτή σχέση σημαίνει ότι η συνάρτηση $e^{-K(x-a)}\sigma(x)$ είναι μη αύξουσα στο διάστημα $[a, b]$ και επομένως $\sigma(a) \geq e^{-K(x-a)}\sigma(x)$. Από την ανισότητα αυτή προκύπτει η (7.26). □

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f(y,x), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{7.27}$$

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{y_n\}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_{n+1}(x) &= y_0 \;+\; \int_{x_0}^{x} f(y_n(\xi),\xi)d\xi \;. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται επαναληπτική μέθοδος Picard. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1-y), \qquad y(0) = 2. \tag{7.29}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 2, \\ y_1(x) &= 2 \;+\; \int_{x_0}^{x} 2\xi(1-2)\,d\xi = 2 - x^2 \qquad (7.30) \\ y_2(x) &= 2 \;+\; \int_{x_0}^{x} 2\xi(1-2+\xi^2)\,d\xi = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2}. \qquad (7.31) \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι αναλόγως έχουμε

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}, \quad y_4(x) \;=\; 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}, \\ y_5(x) &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120}. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και ως $y_5(x) \;=\; 2 + \sum_{k=1}^{5} \frac{(-x^2)^k}{k!}$. Γενικότερα, επαγωγικά έχουμε $y_n(x) = 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x^2)^k}{k!}$. Όταν $n \to \infty$ $y_n(x) \to 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$. Αυτή η άπειρη σειρά συγκλίνει (για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στην συνάρτηση $y(x) = 2 + (e^{-x^2} - 1)$ ή

$$y(x) \;=\; 1 + e^{-x^2}. \tag{7.32}$$

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση αυτή αποτελεί πράγματι την λύση της διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη (7.29). Η επαναληπτική διαδικασία του Pickard είναι χρήσιμη ως μέθοδος αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Χρησιμοποιείται επίσης στην απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης μια διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 20 (Ύπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης). *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $\{(x,y) : a \le x \le b,\, -\infty < y < \infty\}$και η οποία ικανοποιεί την εξής συνθήκη Lipschitz*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \;\le\; K\,|y_1 - y_2|. \tag{7.33}$$

Αν $x_0 \in (a,b)$ η διαφορική εξίσωση

$$y' \;=\; f(x,y), \qquad \text{με αρχική συνθήκη } y(x_0) = y_0 \tag{7.34}$$

έχει μια μοναδική λύση $\bar{y}(x)$ στο διάστημα $[a,b]$ με $\bar{y}(x_0) = y_0$.

7.9 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

7.9.1 Γραμμική Ανεξαρτησία Συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις f_i, $i = 1, \ldots, n$, που ορίζονται πάνω στο διάστημα $[a, b]$ θα ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες* αν υπάρχουν πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί c_i, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν οι συναρτήσεις f_i δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε θα ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω ότι οι συναρτήσεις f_i είναι $n-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Η ορίζουσα Wronski των f_i ορίζεται ως

$$W(f_1, \ldots, f_n) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (7.35)$$

Η ορίζουσα Wronski μας δίνει το ακόλουθο εύχρηστο κριτήριο για να προσδιορίσουμε αν ένα σύνολο από παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή όχι.

Θεώρημα 21. *Έστω n συναρτήσεις, f_i, $i = 1, \ldots, n$, ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$, $n-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Αν η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων αυτών, που δίδεται από την (7.35) είναι* ταυτοτικά μηδέν *στο $[a, b]$ τότε οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αν για κάποιο $x_0 \in [a, b]$ $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$ τότε οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Απόδειξη. Οι f_i είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές c_i τέτοιες ώστε

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Αφού οι συναρτήσεις f_i είναι παραγωγίσιμες μπορούμε να παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση $n-1$ φορές οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots c_n f_n'(x) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots& \\ c_1 f_1^{n-1}(x) + c_2 f_2^{n-1}(x) + \cdots c_n f_n^{n-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.36)$$

Αν υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ για το οποίο η ορίζουσα του πίνακα να είναι μη μηδενική τότε αναγκαστικά η μόνη λύση του ομογενούς συστήματος είναι η τετριμμένη και συνεπώς οι f_i είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν η ορίζουσα είναι μηδενική για κάθε $x \in [a,b]$ τότε υπάρχουν c_i, όχι όλα μηδέν, που να ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα και συνεπώς οι συναρτήσεις f_i είναι γραμμικά εξαρτημένες. ☐

Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις $f_i(x) = e^{\lambda_i x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, η ορίζουσα Wronski είναι σ' αυτή την περίπτωση

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} &= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\,x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\,x} \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)\,. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση οφείλεται στο γεγονός ότι η δεύτερη ορίζουσα είναι η ορίζουσα Vandermonde. Είναι προφανές ότι αν τα λ_i είναι διάφορα μεταξύ τους, η ορίζουσα δεν μηδενίζεται.

7.9.2 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Τάξης n με Μεταβλητούς Συντελεστές

Μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n με μεταβλητούς συντελεστές έχει την μορφή

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = 0 \tag{7.37}$$

με δεδομένες αρχικές συνθήκες $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$. Οι συντελεστές $a_i(x)$ είναι δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις.

Λήμμα 4. *Αν οι συναρτήσεις f_i, $i = 1, \ldots, n$ είναι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (7.37) η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων αυτών στο σημείο x και στο σημείο x_0 ικανοποιούν την σχέση*

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(y) dy}. \tag{7.38}$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 f_1^{(n-1)} \cdots - a_n f_1 & -a_1 f_2^{(n-1)} \cdots - a_n f_2 & \cdots & -a_1 f_n^{(n-1)} \cdots - a_n f_n \end{vmatrix}$$

Στην τελευταία ορίζουσα, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με a_n, την δεύτερη με a_{n-1} κλπ. και την προτελευταία με a_2 και προσθέτοντάς τις στην τελευταία παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 f_1^{(n-1)} & -a_1 f_2^{(n-1)} & \cdots & -a_1 f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dx}W(f_1,\ldots,f_n) = -a_1(x)W(f_1,\ldots,f_n). \tag{7.39}$$

Λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση προκύπτει η (7.38). □

Δεδομένου ότι το εκθετικό δεν μηδενίζεται ποτέ συμπεραίνουμε από την (7.38) ότι όταν οι συναρτήσεις f_i είναι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης η ορίζουσα του Wronski είτε δεν θα μηδενίζεται ποτέ, είτε θα είναι ταυτοτικά μηδέν. Ισχύει επομένως το εξής

Πόρισμα 3. *Αν οι n λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (7.37) ικανοποιούν τις αρχικές* *συνθήκες*

$$\begin{pmatrix} f_i^{(0)}(x_0) \\ \vdots \\ f_i^{(i-1)}(x_0) \\ \vdots \\ f_i^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

με την συνηθισμένη σύμβαση $f^{(0)} = f$, τότε οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της (7.37).

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) = \det(I) = 1$ και επομένως από το προηγούμενο Λήμμα $W(f_1, \ldots, f_n)(x) \neq 0$ για κάθε x. □

7.10 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς συντελεστές

Η γενική ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι η $y'' + ay' + by = 0$. Πριν εξετάσουμε την γενική αυτή εξίσωση θα δούμε πρώτα τις εξής δύο ειδικές μορφές.

7.10.1 Η διαφορική εξίσωση $y'' + by = 0$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το αν $b < 0$, $b = 0$ ή $b > 0$.

Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε την διαφορική εξίσωση ως

$$y'' - k^2 y = 0. \tag{7.40}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι τόσο η $y_1(x) = e^{kx}$ όσο και η $y_2(x) = e^{-kx}$ είναι λύσεις της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Το ίδιο ισχύει και για την

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{7.41}$$

η οποία είναι και η γενική λύση. Αυτή είναι και η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης όπως θα δούμε σε λίγο. Το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών συνθηκών απαιτεί τον προσδιορισμό της $y(0)$, *και της* $y'(0)$.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε την

$$y'' = 0 \tag{7.42}$$

η οποία έχει την γενική λύση

$$y(x) \;=\; C_1 + C_2 x. \tag{7.43}$$

Στην τρίτη περίπτωση γράφουμε την εξίσωση ως

$$y'' + k^2 y \;=\; 0. \tag{7.44}$$

Οι συναρτήσεις $y_1(x) = \sin kx$ και $y_2(x) = \cos kx$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και η γενική λύση δίδεται από την

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \tag{7.45}$$

Και στις τρεις περιπτώσεις είναι εύκολο να δούμε ότι για οποιεσδήποτε αρχικές τιμές $y(0)$, $y'(0)$, οι σταθερές C_1, C_2, προσδιορίζονται πάντα και μονοσήμαντα.

Μια εναλλακτική προσέγγιση στην τρίτη περίπτωση είναι η χρήση των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $y_1(x) = e^{ikx}$, $y_2(x) = e^{-ikx}$. Η γενική λύση σ' αυτή την περίπτωση είναι η

$$y(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}. \tag{7.46}$$

Οι σταθερές C_1, C_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί που μπορεί να επιλεγούν για να ικανοποιεί η λύση τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $y(0)$, $y'(0)$. Επειδή

$$y(0) \;=\; C_1 + C_2 \tag{7.47}$$

$$y'(0) \;=\; ikC_1 - ikC_2 \tag{7.48}$$

προκύπει ότι

$$C_1 = \frac{iky(0) + y'(0)}{2ik}, \qquad C_1 = \frac{iky(0) - y'(0)}{2ik}.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στην (7.46) και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}. \tag{7.49}$$

παίρνουμε

$$y(x) \;=\; y(0)\cos kx + \frac{y'(0)}{k}\sin kx.$$

7.10.2 Ομογενείς εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι της μορφής

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{7.50}$$

με τις αρχικές συνθήκες

$$y(0), \;\; y'(0), \text{ δεδομένες.} \tag{7.51}$$

Προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση αυτή δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής $e^{\lambda x}$. Αντικαθιστώντας στην (7.50) παίρνουμε $\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$ και, δεδομένου ότι $e^{\lambda x} \neq 0$ για κάθε x, προκύπτει ότι

$$\lambda^2 + a\lambda + b \;=\; 0. \tag{7.52}$$

Το συμπέρασμα που εξάγουμε από τα παραπάνω είναι ότι η συνάρτηση $e^{\lambda x}$ είναι λύση της (7.50) αν και μόνον αν το λ είναι λύση της (7.52). Η εξίσωση (7.52) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της (7.50).

Εν γένει, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες, έστω λ_1 και λ_2. Η *γενική λύση* της (7.50) είναι η

$$y(x) \;=\; C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{7.53}$$

όπου C_1, C_2, δύο αυθαίρετες σταθερές. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right)'' + a\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right)' + b\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\
&\quad = \;\left(C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x}\right) + a\left(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}\right) + b\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\
&\quad = \;C_1 e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\right) + C_2 e^{\lambda_2 x}\left(\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b\right) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

(Στην τελευταία εξίσωση οι ποσότητες μέσα στις δύο παρενθέσεις είναι 0 επειδή οι λ_1, λ_2 είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Μένει να δείξουμε ότι οι σταθερές C_1, C_2, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες (7.51). Πράγματι

$$\begin{aligned}
y(0) \;&=\; C_1 e^{\lambda_1 0} + C_2 e^{\lambda_2 0} \;=\; C_1 + C_2, \\
y'(0) \;&=\; C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 0} \;=\; C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2.
\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας έχει ορίζουσα $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ (δεδομένου υποθέσαμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο διακριτές ρίζες) και επομένως υπάρχει μοναδική λύση στο σύστημα η οποία είναι

$$C_1 \;=\; \frac{\lambda_2 y(0) - y'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 \;=\; \frac{y'(0) - \lambda_1 y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{7.54}$$

Παράδειγμα. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - y' - 2y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Επομένως, η γενική λύση είναι η

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Έχουμε επίσης $y(0) = 1 = C_1 + C_2$ και $y'(0) = 3 = -C_1 + 2C_2$, απ' όπου προκύπτει ότι $C_1 = -\frac{1}{3}$ και $C_2 = \frac{4}{3}$.

Η περίπτωση των συζυγών μιγαδικών ριζών. Η παραπάνω μέθοδος συνεχίζει να ισχύει και όταν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα: Θέλουμε να λύσουμε την $y'' - 4y' + 5y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$ και η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 e^{(2+i)x} + C_2 e^{(2-i)x}$$

όπου οι σταθερές C_1, C_2, είναι τώρα αυθαίρετοι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2, \quad y'(0) = -2 = (2+i)C_1 + (2-i)C_2.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $C_1 = \frac{1}{2} + 2i$, $C_2 = \frac{1}{2} - 2i$, και συνεπώς η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι

$$y(x) \; = \; \left(\frac{1}{2} + 2i\right) e^{(2+i)x} + \left(\frac{1}{2} - 2i\right) e^{(2-i)x}.$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε προκειμένου να εκφράσουμε την παραπάνω λύση ως προς πραγματικά εκθετικά, ημίτονα και συνημίτονα:

$$\begin{aligned} y(x) \; &= \; \left(\frac{1}{2} + 2i\right) e^{(2+i)x} + \left(\frac{1}{2} - 2i\right) e^{(2-i)x} \; = \; \frac{1}{2}\left(e^{(2+i)x} + e^{(2-i)x}\right) + 2i\left(e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\right) \\ &= \; e^{2x}\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + (2i)^2 e^{2x}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \; = \; e^{2x}\left(\cos x - 4\sin x\right). \end{aligned}$$

Η περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα. Στην περίπτωση αυτή η διακρίνουσα της (7.52) είναι 0 δηλαδή $\Delta = a^2 - 4b = 0$ και $\lambda = -a/2$. Στην περίπτωση αυτή οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (7.50) είναι οι $e^{\lambda x}$ και $xe^{\lambda x}$. Η γενική λύση της (7.50) είναι η

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Πράγματι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $(xe^{\lambda x})' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$ και $(xe^{\lambda x})'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by \; &= \; \left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\right)'' + a\left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\right)' + b\left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\right) \\ &= \; C_1 e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) + C_2 e^{\lambda x}\left(2\lambda + a\right) + C_2 e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) \; = \; 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ και $2\lambda + a = 0$, επειδή η λ είναι διπλή ρίζα της (7.52). Οι συντελεστές C_1, C_2, της γενικής λύσης προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$y(0) = C_1 e^{\lambda 0} + C_2 0\, e^{\lambda 0} = C_1, \qquad y'(0) = C_1 \lambda e^{\lambda 0} + C_2 \left(e^{\lambda 0} + \lambda\, 0\, e^{\lambda 0}\right)$$

ή

$$y(0) = C_1, \qquad y'(0) = \lambda C_1 + C_2.$$

Προφανώς, για οποιεσδήποτε τιμές των αρχικών συνθηκών, $y(0)$, $y'(0)$, υπάρχει μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος. (Η λύση είναι η $C_1 = y(0)$, $C_2 = y'(0) - \lambda y(0)$.

Παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα. Να βρείτε την λύση της $y'' - 2y + y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ η οποία έχει μια διπλή ρίζα, $\lambda = 1$. Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε $y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x$ και επομένως

$$y(0) = C_1 = 2, \quad \text{και } y'(0) = C_1 + C_2 = -1 \ \text{ ή } C_2 = -3.$$

Συνεπώς η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι $y(x) = 2e^x - 3xe^x$.

Θεώρημα Μοναδικότητας της Λύσης για Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

Θεώρημα 22. *Έστω $I = [a, b]$ και p, q, r, συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο I. Θεωρούμε την γρμμική διαφορική εξίσωση*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \;=\; r(x), \quad x \in [a, b] \tag{7.55}$$
$$\text{με αρχικές συνθήκες } y(a) = y_0, \;\; y'(a) = y_0'.$$

καθώς και την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ

$$u'' + p(x)u' + q(x)u \;=\; 0, \quad x \in [a, b]. \tag{7.56}$$

Αν η εξίσωση (7.55) έχει δύο λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τις δεδομένες αρχικές συνθήκες τότε οι λύσεις αυτές ταυτίζονται. Ισοδύναμα, αν η ομογενής εξίσωση έχει μια λύση η οποία να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $u(a) = 0$, $u'(a) = 0$ τότε $u(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη. Έστω v, w, δύο συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την ΔΕ (7.55) με τις δεδoμένς αρχικές συνθήκες. Τότε η $u(x) := v(x) - w(x)$ ικανοποιεί την ομογενή ΔΕ (7.56) με αρχικές συνθήκες $u(a) = v(a) - w(a) = 0$, $u'(a) = v'(a) - w'(a) = 0$. Θα δείξουμε ότι η μοναδική τέτοια συνάρτηση u είναι ταυτοτικά 0. Έστω $\sigma(x) := (u(x))^2 + (u'(x))^2$. Τότε

$$\sigma'(x) = 2u'(u + u'') = 2u'\left[u - p(x)u' - q(x)u\right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$ αφού η u ικανοποιεί την (7.56). Παρατηρούμε επίσης ότι $(u \pm u')^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |2uu'| \leq (u^2 + u'^2)$. Συνεπώς

$$2(1 - q(x))uu' \leq (1 + |q(x)|)(u^2u'^2)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &\leq [1 + |q(x)|]u^2 + (1 + |q(x)| + 2|p(x)|)u'^2 \leq (1 + |q(x)| + 2|p(x)|)(u^2 + u'^2) \\ &= (1 + |q(x)| + 2|p(x)|)\sigma(x) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $K := 1 + \max_{a \leq x \leq b}\{|q(x)| + 2|q(x)|\}$, τότε έχουμε την ανισότητα

$$\sigma'(x) \leq K\sigma(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη της ανισότητας με τον θετικό παράγοντα e^{-Kx} έχουμε

$$\sigma'(x)e^{-Kx} \leq K\sigma(x)e^{-Kx} \quad \Rightarrow \quad \left(\sigma(x)e^{-Kx}\right)' \leq 0 \;\; \forall x \in [a, b].$$

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\sigma(x)e^{-Kx}$ είναι μη αύξουσα στο διάστημα $[a, b]$ και επομένως $\sigma(x)e^{-Kx} \leq \sigma(a)e^{-Ka}$ για κάθε $x \in [a, b]$, ή

$$0 \leq \sigma(x) \leq K\sigma(a)e^{K(x-a)}.$$

Όμως, $\sigma(a) = u(a)^2 + u'(a)^2 = 0$ και επομένως $\sigma(x) = 0$ για κάθε x. Αυτό σημαίνει ότι $u(x) = 0$ για κάθε x δηλαδή η u είναι ταυτοτικά 0. □

7.11 Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Εδώ εξετάζουμε εξισώσεις της μορφής

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{7.57}$$

όπου $r(x)$ δεδομένη συνάρτηση. Οποιαδήποτε λύση της (7.57) θα ονομάζεται ειδική λύση. Θα δείξουμε πρώτα ότι η γενική λύση της (7.57) προκύπτει από την γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (που δίνεται από την (7.53)) αν σ' αυτή προσθέσουμε μια ειδική λύση. Έστω $y_g(x)$ η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (7.50) η οποία βεβαίως θα είναι της μορφής $C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ αν η χαρακτηριστική εξίσωση (7.52) έχει δύο διακριτές ρίζες, λ_1, λ_2, ή $C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$ αν έχει μια διπλή ρίζα, λ. Συνεπώς ισχύει ότι

$$y_g'' + ay_g' + by_g = 0.$$

Επίσης, έστω $y_s(x)$ μια *ειδική λύση* της μη ομογενούς εξίσωσης (7.57), δηλαδή μια συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$y_s'' + ay_s' + by_s = r(x).$$

Τότε η $y(x) := y_g(x) + y_s(x)$ είναι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Πράγματι

$$(y_g + y_s)'' + a\,(y_g + y_s)' + b\,(y_g + y_s) = \left(y_g'' + ay_g' + by_g\right) + \left(y_s'' + ay_s' + by_s\right) = 0 + r(x),$$

δηλαδή η $y_g + y_s$ είναι η γενική λύση.

Μένει όμως το πρόβλημα της εξεύρεσης μιας ειδικής λύσης. Θα παρουσιάσουμε δύο μεθόδους. Η πρώτη είναι υπολογιστικά εύκολη αλλά εφαρμόζεται μόνο για ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων, ενώ η δεύτερη, η οποία οφείλεται στον Lagrange, είναι γενική.

7.11.1 Εξεύρεση μιας ειδικής λύσης όταν η $r(x)$ είναι πολυώνυμο, εκθετική συνάρτηση, ημίτονο, συνημίτονο ή γινόμενο των ανωτέρω

Πρόταση 8. *Αν η $r(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού k τότε μια ειδική λύση της (7.57) είναι πάλι πολυώνυμο του ίδιου βαθμού, του οποίου οι συντελεστές προσδιορίζονται αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7.57).*

Η απόδειξη είναι εύκολη. Αντ' αυτής θα δώσουμε ένα παράδειγμα: Έστω η μη ομογενής εξίσωση $y'' + 3y' - y = 2x^2 + 4x + 1$. Μια ειδική λύση της θα είναι η $y_s(x) = Ax^2 + Bx + C$. Επομένως

$$y_s'' + 3y_s' - y_s = 2A + 3(2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 4x + 1$$

απ' όπου παίρνουμε $-Ax^2 + (6A - B)x + 2A + 3B - C = 2x^2 + 4x + 1$ και επομένως $A = -2$, $6A - B = 4$, $2A + 3B - C = 1$ ή $A = -2$, $B = -16$, $C = -53$. Συνεπώς, η ζητούμενη ειδική λύση είναι η $y_s = -2x^2 - 16x - 53$

Πρόταση 9. *Έστω ότι η $r(x)$ είναι εκθετική συνάρτηση της μορφής $e^{\rho x}$ και ο ρ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + a\lambda + b$. Τότε μια ειδική λύση της (7.57) είναι η $y_s(x) = Ae^{\rho x}$ όπου η σταθερά A προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση. Σε περίπτωση που ο ρ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε μια* *ειδική λύση είναι η $y_s(x) = Axe^{\rho x}$ όπου η σταθερά A προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην εξίσωση. Τέλος, αν ο ρ είναι* διπλή *ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μια ειδική λύση είναι η $y_s(x) = Ax^2e^{\rho x}$ όπου η A προσδιορίζεται πάλι αντικαθιστώντας στην εξίσωση.*

Απόδειξη: Έστω ότι το ρ δεν είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε, θέτοντας $y_s(x) = Ae^{\rho x}$ στην διαφορική εξίσωση $y'' + ay' + by = e^{\rho x}$ παίρνουμε $A\rho^2e^{\rho x} + aA\rho e^{\rho x} + bAe^{\rho x} = e^{\rho x}$ και επομένως βλέπουμε ότι η $Ae^{\rho x}$ είναι μια ειδική λύση αν

$$A = \frac{1}{\rho^2 + a\rho + b}.$$

Παρατηρείστε ότι στο παραπάνω κλάσμα που ορίζει την Α ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, εφ' όσον το ρ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αν το ρ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης θέτουμε $y_s(x) = Axe^{\rho x}$ στην διαφορική εξίσωση $y'' + ay' + by = e^{\rho x}$ και παίρνουμε $A(2\rho e^{\rho x} + \rho^2xe^{\rho x}) + a(\rho xe^{\rho x} + e^{\rho x}) + bAxe^{\rho x} = e^{\rho x}$. Απλοποιώντας το $e^{\rho x}$, έχουμε

$$Ax(\rho^2 + a\rho + b) + A(2\rho + a) = 1.$$

Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι 0 επειδή ο ρ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επίσης, $2\rho + a \neq 0$ επειδή ο ρ είναι *απλή ρίζα* της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή,

$$A = \frac{1}{2\rho + a}.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο ρ είναι *διπλή ρίζα* της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Θέτουμε $y_s(x) = Ax^2e^{\rho x}$ στην διαφορική εξίσωση και παίρνουμε

$$Ae^{\rho x}\left(2 + 4\rho x + x^2\rho^2\right) + aAe^{\rho x}\left(2x + x^2\rho\right) + bAx^2e^{\rho x} = e^{\rho x}$$

ή

$$2A + 2xA\left(2\rho + a\right) + x^2A\left(\rho^2 + a\rho + b\right) = 1.$$

Αφού το ρ είναι διπλή ρίζα ισχύει ότι $\rho^2 + a\rho + b = 0$ και $2\rho + a = 0$. Συνεπώς, $A = 1/2$ και η ειδική λύση στην περίπτωση αυτή είναι $y_s(x) = \frac{x^2}{2}e^{\rho x}$. ∎

7.11.2 Παραδείγματα.

1. Η μη ομογενής διαφορική εξίσωση $y'' + 3y' + 2y = 5e^x$ έχει ειδική λύση $y_s(x) = Ae^x$ όπου το A θα προσδιοριστεί αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση. (Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι η $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -1$. Συνεπώς το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.) Έχουμε συνεπώς

$$Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x \Rightarrow 6A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{6}.$$

Η *γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης* είναι η

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{5}{6}e^x.$$

Αν θέλουμε να βρούμε την λύση της μη ομογενούς εξίσωσης με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ τότε προσδιορίζουμε τις τιμές των σταθερών C_1, C_2, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

$$C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = 1 \quad \text{και} \quad -C_1 - 2C_2 + \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = -\frac{4}{3}.$$

Συνεπώς η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{5}{6}e^x$.

2. Ας δούμε τώρα την διαφορική εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος όταν ο εκθέτης στον δεξιό όρο είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα ας δούμε την $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Στην περίπτωση αυτή μια ειδική λύση θα είναι η Axe^{-2x}. Η σταθερά A προσδιορίζεται από την

$$\begin{aligned}&\left(Axe^{-2x}\right)'' + 3\left(Axe^{-2x}\right)' + 2\left(Axe^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\\ &\Rightarrow 4Axe^{-2x} - 2Ae^{-2x} - 6Axe^{-2x} + 3Ae^{-2x} + 2Axe^{-2x} = 3e^{-2x} \Rightarrow A = 3.\end{aligned}$$

Συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3xe^{-2x}.$$

Συνεπώς, $y(0) = C_1 + C_2 + 3 = 1$ και $y'(0) = -C_1 - 2C_2 + 3 = 0$ που δίνουν $C_1 = -7$ και $C_2 = 5$. Επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = -7e^{-x} + 5e^{-2x} + 3xe^{-2x}$.

3. Εξετάζουμε τέλος την μη ομογενή εξίσωση $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ η οποία έχει διπλή ρίζα το -2. Συνεπώς μια ειδική λύση είναι η $y_s(x) = Ax^2e^{-2x}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}y_s'(x) &= 2xAe^{-2x}(1-x)\\ y_s''(x) &= 2Ae^{-2x}(1 - 4x + 2x^2)\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας

$$2Ae^{-2x}(1 - 4x + 2x^2) + 8Ae^{-2x}(x - x^2) + 4Ax^2e^{-2x} = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}.$$

$y(0) = C_1$ και $y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0$ και επομένως $C_1 = 0$ και $C_2 = 1$. Άρα, η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$.

Πρόταση 10. *1) Όταν η $r(x)$ είναι ημιτονοειδής συνάρτηση, π.χ. $\sin(\omega x)$ ή $\cos(\omega x)$ τότε μια ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_s(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ όπου οι συντελεστές A, B προσδιορίζονται αντικαθιστώντας στην εξίσωση.*

2) Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που η μη ομογενής διαφορική εξίσωση είναι η

$$y'' + by = \sin(\omega x) \qquad \text{με } b = \omega^2. \tag{7.58}$$

Τότε μια ειδική λύση είναι της μορφής $y_s(x) = +Bx\cos(\omega x)$ όπου η σταθερά B προσδιορίζεται αντικαθιστώντας την y_s στην εξίσωση.

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν όταν $r(x) = \cos \omega x$.

Απόδειξη: 1) Εφ' όσον

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= A\omega \cos \omega x - B\omega \sin \omega x \\ y_s''(x) &= -A\omega^2 \sin \omega x - B\omega^2 \cos \omega x. \end{aligned}$$

Συνεπως η $y_s'' + ay_s' + by_s = \sin \omega x$ γίνεται

$$-A\omega^2 \sin \omega x - B\omega^2 \cos \omega x + a(A\omega \cos \omega x - B\omega \sin \omega x) + b(A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)) = \sin \omega x$$

και ισοδύναμα

$$\cos \omega x\,(-B\omega^2 + aA\omega + Bb) + \sin \omega x(-A\omega^2 - aB\omega + bA - 1) = 0 \tag{7.59}$$

Όμως οι συναρτήσεις $\sin \omega x$ και $\cos \omega x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$\left| \begin{array}{cc} \sin \omega x & \cos \omega x \\ (\sin \omega x)' & (\cos \omega x)' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \sin \omega x & \cos \omega x \\ \omega \cos \omega x & -\omega \sin \omega x \end{array} \right| = -\omega(\sin^2 \omega x + \cos^2 \omega x) = -\omega \neq 0.$$

Συνεπώς από την (7.59) έχουμε $-B\omega^2 + aA\omega + B = 0$ και $-A\omega^2 - aB\omega + bA - 1 = 0$ ή

$$\begin{bmatrix} b - \omega^2 & -a\omega \\ a\omega & b - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$A = \frac{b - \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}, \qquad B = \frac{-a\omega}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}.$$

Συνεπώς
$$y_s(x) = \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2}\sin\omega x + \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2}\cos\omega x.$$

2) Η μόνη περίπτωση που προκύπτει πρόβλημα στην παραπάνω διαδικασία είναι όταν ο παρονομαστής στις παραπάνω εκφράσεις μηδενιζεται, δηλαδή όταν $(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2 = 0$ ή $a = 0$, $b = \omega^2$. Αυτή είναι η περίπτωση 2) οπότε αναζητούμε μια ειδική λύση της (7.58). Θέτοντας $y_s(x) = Bx\cos\omega x$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= -B\omega x\sin\omega x + B\cos\omega x \\ y_s''(x) &= -Bx\omega^2\cos\omega x - B\omega\sin\omega x \end{aligned}$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση $y_s''(x) + by_s = \sin\omega x$, παίρνουμε

$$-Bx\omega^2\cos\omega x - B\omega\sin\omega x + b(Bx\cos\omega x) = \sin\omega x$$

ή
$$Bx\cos\omega x(b-\omega^2) - (B\omega+1)\sin\omega x = 0.$$

Δεδομένου ότι $b = \omega^2$ στην περίπτωση που εξετάζουμε συμπεραίνουμε ότι $B = -\frac{1}{\omega}$ και συνεπώς $y_s(x) = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x$. ∎

4. Έστω η $y'' - 3y' + 2y = 2\sin(2x)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$. Μια ειδική λύση της εξίσωσης θα είναι η $A\sin 2x + B\cos 2x$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 3(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 2\sin 2x$$

ή

$$(-4A+6B+2A-2)\sin 2x + (-4B-6A+2B)\cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} -4A+4B+2A-2 = 0 \\ -4B-6A+2B = 0 \end{cases}.$$

Από το σύστημα αυτό βρίσκουμε $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{3}{10}$, και συνεπώς η ειδική λύση είναι η $y_s(x) = -\frac{1}{10}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 2x$. Συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 2x$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις σταθερές λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = C_1 + C_2 + \frac{3}{10} \\ y'(0) &= 0 = C_1 + 2C_2 - \frac{2}{10} \end{aligned}$$

και παίρνουμε $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

5. Έστω η $y'' + 9y = 2\sin 3x$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Εδώ η ειδική λύση είναι της μορφής $Ax\cos(3x)$ (η περίπτωση 2) της πρότασης 10). Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$-4A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 9Ax\cos 3x = 2\sin 3x \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $C_1\sin 3x + C_2\cos 3x$ και η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι $y(x) = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x - \frac{1}{2}x\cos 3x$. Οι τιμές που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες είναι $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$. Επομένως η λύση της μη ομογενούς που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{2}x\cos 3x$.

Η περίπτωση $r(x) = p(x)e^{\rho x}$, $p(x)\sin(\omega x)$, $p(x)\cos(\omega x)$, $e^{\rho x}\sin\omega x$, $e^{\rho x}\cos\omega x$ καθώς και αθροίσματα τέτοιων όρων. Εδώ θα εξετάσουμε αυτές τις περιπτώσεις των γινομένων μέσω παραδειγμάτων.

6. Προκειμένου να βρούμε μια ειδική λύση της $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x$ δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής $(Ax^2 + Bx + C)e^x$. Αντικαθιστώντας μπορείτε να διαπιστώσετε ότι μια ειδική λύση είναι η

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}\right) e^x$$

7. Προκειμένου να βρούμε μια ειδική λύση της $y'' + y' + y = x\cos 2x$ θέτουμε $y_s(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= (-2Ax + C - B)\sin 2x + (2Cx + D + A)\cos 2x \\ y_s''(x) &= -4(Cx + D + A)\sin 2x - 4(Ax + B - C)\cos 2x \end{aligned}$$

και συνεπώς, αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$((-3C-2A)x+2D+A+C-B)\sin 2x+((-3A+2C)x+-3B+4C+D+A)\cos 2x = x\cos 2x$$

απ΄ όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{array}{rrrrcl} -2A & & -3C & & = & 0 \\ -3A & & +2C & & = & 0 \\ A & -B & +C & +2D & = & 1 \\ A & -3B & +4C & +D & = & 0 \end{array}$$

του οποίου η λύση είναι $A = -\frac{15}{65}$, $B = \frac{11}{65}$, $C = \frac{10}{65}$, $D = \frac{8}{65}$. Συνεπώς, η ειδική λύση είναι

$$y_s(x) \; = \; \frac{-15x + 11}{65}\cos 2x + \frac{10x + 8}{65}\sin 2x.$$

8. Να βρεθεί η λύση της $y''+y'+y = e^x+x$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι $\lambda^2+\lambda+1 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Ο εκθέτης στο εκθετικό του δεξιού όρου είναι διάφορος των δύο ριζών. Συνεπώς θα αναζητήσουμε μια ειδική λύση της μορφής $Ae^x+B_1x+B_2$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$Ae^x + Ae^x + B_1 + Ae^x + B_1x + B_2 = e^x + x$$

και επομένως $A = 1/3$, $B_1 = 1$, $B_2 = -1$. Η ειδική λύση της μη ομογενούς είναι $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{3}e^x + x - 1$.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} - 1 \\ y'(0) &= 0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \frac{1}{3} + 1 \end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε $C_1 = \frac{2}{3}\frac{\lambda_2+2}{\lambda_2-\lambda_1}$, $C_1 = -\frac{2}{3}\frac{2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των λ_1, λ_2 παίρνουμε μετά από πράξεις

$$C_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{3}, \;\; C_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{3}.$$

Συνεπώς, η λύση που θέλουμε είναι

$$y(x) \;=\; \frac{1+i\sqrt{3}}{3}\, e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,x} \;+\; \frac{1-i\sqrt{3}}{3}\, e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,x} \;+\; \frac{1}{3}e^x \;+\; x \;-\; 1.$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω λύση χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler:

$$\begin{aligned} \frac{1+i\sqrt{3}}{3}\, e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,x} \;+\; \frac{1-i\sqrt{3}}{3}\, e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,x} \;&=\; \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x}}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x}}{2}\right) \\ =\; \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x}}{2} - \sqrt{3}\,\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\,x}}{2i}\right) \;&=\; \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση απλοποιείται περισσότερο αν θέσουμε $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \tan\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \;&=\; \frac{2}{3\cos\pi/3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &=\; \frac{4}{3}e^{-x/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια η λύση γράφεται ως

$$y(x) \;=\; \frac{4}{3}e^{-x/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \;+\; \frac{1}{3}e^x \;+\; x \;-\; 1.$$

7.11.3 Η μέθοδος του Lagrange

Μεχρις εδώ είδαμε μεθόδους που μας επιτρέπουν να βρούμε ειδικές λύσεις μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων όταν οι συναρτήσεις στο δεξί μέρος είναι πολυώνυμα, εκθετικές συναρτήσεις, ημίτονα ή συνημίτονα (τα οποία βεβαίως είναι φανταστικά εκθετικά) καθώς και γινόμενα πολυωνύμων και εκθετικών. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε την μέθοδο των μεταβλητών συντελεστών του Lagrange. Η μέθοδος αυτή είναι πιο περίπλοκη αλλά εφαρμόζεται για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $r(x)$.

Υποθέτουμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι διαφορετικές μεταξύ τους και θεωρούμε την $y(x) = C_1(x)e^{\lambda_1 x} + C_2(x)e^{\lambda_2 x}$. Έχουμε

$$y'(x) = C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 C_1(x)e^{\lambda_1 x} + C_2'(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2 C_2(x)e^{\lambda_2 x} \tag{7.60}$$

Αν θέσουμε

$$C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + C_2'(x)e^{\lambda_2 x} = 0 \tag{7.61}$$

τότε η (7.60) γίνεται

$$y'(x) = \lambda_1 C_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2(x)e^{\lambda_2 x} \tag{7.62}$$

και παραγωγίζοντας ακόμη μια φορά έχουμε

$$y''(x) = \lambda_1^2 C_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_1 C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2'(x)e^{\lambda_2 x}. \tag{7.63}$$

Θέτουμε τώρα

$$\lambda_1 C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2'(x)e^{\lambda_2 x} = r(x). \tag{7.64}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, παραλείποντας την εξάρτηση των C_1, C_2 από το x, έχουμε

$$\begin{aligned} y'' + ay' + b &= \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x} + r(x) + a\left(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\ &\qquad +b\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= C_1\left(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\right)e^{\lambda_1 x} + C_2\left(\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b\right)e^{\lambda_2 x} + r(x) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις C_1, C_2 ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + C_2'(x)e^{\lambda_2 x} &= 0 \\ \lambda_1 C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2'(x)e^{\lambda_2 x} &= r(x). \end{aligned} \tag{7.65}$$

Από το θεώρημα του Cramér έχουμε

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 x} \\ r(x) & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}} = \frac{r(x)e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{7.66}$$

και

$$C_2'(x) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}} \;=\; \frac{r(x)e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{7.67}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, ολοκληρώνοντας έχουμε

$$C_1(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_1 u}du, \qquad C_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_2 u}du. \tag{7.68}$$

Επομένως, μια ειδική λύση της (7.57) είναι η

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_1 u}du \;+\; \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_2 u}du \\ &= \int_0^x r(u)\frac{e^{\lambda_1(x-u)} - e^{\lambda_2(x-u)}}{\lambda_1 - \lambda_2}du \\ &= \int_0^x r(u)G(u,x)du \end{aligned} \tag{7.69}$$

όπου

$$G(u,x) \;=\; \frac{e^{\lambda_1(x-u)} - e^{\lambda_2(x-u)}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{7.70}$$

Παράδειγμα 7.11.1. Να βρείτε την λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' - 2y' - y = e^{-t}$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $s^2 - 2s - 1 = 0$ και έχει ρίζες $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης, $y'' - 2y' - y = 0$ είναι η

$$y_0(x) := C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}.$$

Μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{(1+\sqrt{2})x}\int_0^x e^{-u}e^{-(1+\sqrt{2})u}du - e^{(1-\sqrt{2})x}\int_0^x e^{-u}e^{-(1-\sqrt{2})u}du\right) \\ &= \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2+\sqrt{2}} - \frac{e^{(1-\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η $y_0(x) + y_p(x)$ και επομένως η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (λαμβανομένου υπ΄ όψιν του γεγονότος ότι $y_p(0) = y_p'(0) = 0$) είναι η

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{(1-\sqrt{2})x}}{2} + \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2+\sqrt{2}} - \frac{e^{(1-\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3-\sqrt{2}}{2}e^{(1+\sqrt{2})x} - \frac{3+\sqrt{2}}{2}e^{(1-\sqrt{2})x} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

7.12 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης με Μεταβλητούς συντελεστές

7.12.1 Λύση με μορφή δυναμοσειράς

Εξετάζουμε τη γενική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Έχει τη μορφή

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x). \tag{7.71}$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι η

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{7.72}$$

Αναζητούμε λύσεις υπό την μορφή δυναμοσειράς. Θα περιγράψουμε την διαδικασία επίλυσης ξεκινώντας από εύκολα παραδείγματα όπου η λύση θα μπορούσε να ευρεθεί και με άλλες μεθόδους. Έστω η εξίσωση

$$y' - y = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{7.73}$$

Αν εκφράσουμε τη λύση της σε μορφή δυναμοσειράς, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, τότε παραγωγίζοντας όρο προς όρο (υπενθυμίζουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι επιτρεπτή για τις δυναμοσειρές μέσα στην ακτίνα σύγκλισης) έχουμε $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$ και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n = 0$$

ή

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n - c_{n+1}(n+1))x^n = 0$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $c_n - c_{n+1}(n+1) = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, ή

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}c_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Λύνοντας την αναδρομική αυτή σχέση έχουμε

$$c_n = \frac{1}{n!}c_0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

και επομένως προκύπτει η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης ως

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = c_0 e^x.$$

Θέτοντας $x = 0$ στην παραπάνω σχέση έχουμε $c_0 = y(0)$. Συνεπώς η λύση της ΔΕ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι η $y(x) = y(0)e^x$.

Ας δούμε τώρα ένα δεύτερο παράδειγμα της χρήσης των δυναμοσειρών του οποίου την λύση επίσης γνωρίζουμε. Έστω η γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \tag{7.74}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, με δεδομένες αρχικές συνθήκες $y(0)$, $y'(0)$. Δοκιμάζουμε την λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Τότε $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$ και αντικαθιστώντας στην (7.74) έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n + \lambda^2 c_{n+2}(n+2)(n+1)c_n\right)x^n = 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$c_{n+2} = -\frac{\lambda^2}{(n+1)(n+2)}c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7.75}$$

Η αναδρομική σχέση (7.75) προσδιορίζει το c_2 από το c_0, το c_4 από το c_2 και ούτω καθ' εξής. Ομοίως, προσδιορίζει το c_3 από το c_1, το c_5 από το c_3, κλπ. Συνεπώς έχουμε

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n\lambda^{2n}}{(2n)!}c_0 \tag{7.76}$$

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n\lambda^{2n}}{(2n+1)!}c_1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7.77}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$c_2 = -\frac{\lambda^2}{2\cdot 1},\ c_4 = \frac{\lambda^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1},\ c_6 = -\frac{\lambda^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, \ldots$$
$$c_3 = -\frac{\lambda^2}{3\cdot 2},\ c_5 = \frac{\lambda^4}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2},\ c_7 = -\frac{\lambda^6}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \ldots$$

Η γενική λύση της (7.74) είναι επομένως

$$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\lambda x)^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!}\lambda^{2n}x^{2n+1}. \tag{7.78}$$

Παρατηρείστε ότι, αν $\lambda = 0$ τότε όλοι οι όροι των παραπάνω δυναμοσειρών μηδενίζονται εκτός από τους πρώτους και έχουμε $y(x) = c_0 + xc_1$ που είναι πράγματι η γενική λύση της ΔΕ $y'' = 0$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε η παραπάνω λύση γράφεται και ως

$$y(x) = c_0\left(1 - \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} - \frac{(\lambda x)^6}{6!} + \cdots\right)$$
$$+ c_1\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda x}{1!} - \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \frac{(\lambda x)^5}{5!} - \frac{(\lambda x)^7}{7!} + \cdots\right).$$

Αναγνωρίζουμε ότι οι παραπάνω δυναμοσειρές αντιστοιχούν στο $\cos \lambda x$ και $\sin \lambda x$ αντίστοιχα και, αφού τα c_0, c_1 είναι ούτως ή άλλως αυθαίρετες σταθερές, ξαναγράφουμε την γενική λύση ως

$$y(x) = C_0 \cos \lambda x + C_1 \sin \lambda x. \tag{7.79}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (7.79) έχουμε $y'(x) = -C_0 \lambda \sin \lambda x + C_1 \lambda \cos \lambda x$. Συνεπώς, για $x = 0$,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_0, \\ y'(0) &= C_1 \lambda, \end{aligned}$$

και από τις σχέσεις αυτές προσδιορίζουμε τα C_0, C_1, ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Στα παραπάνω παραδείγματα είδαμε πώς μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος των δυναμοσειρών σε πολύ απλές περιπτώσεις όπου η λύση μιας ΔΕ ήταν ήδη γνωστή. Η μέθοδος όμως αυτή μας επιτρέπει την επίλυση εξισώσεων που δεν θα μπορούσαμε να λύσουμε με άλλους τρόπους.

7.13 Δυναμοσειρές

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = 0 \tag{7.80}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική, πρώτης τάξης, με μεταβλητούς συντελεστές και μπορεί να λυθεί με την μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων. Η γενική της λύση είναι

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{7.81}$$

όπου C σταθερά που προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη.

Ας επιλύσουμε την ίδια εξίσωση με την μέθοδο των δυναμοσειρών: Έστω $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ η γενική λύση της (7.80). Θα ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$ ή

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

Συνεπώς, αφού η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει ταυτοτικά για κάθε x, θα έχουμε $(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ και $a_1 = 0$ (αυτό προκύπτει από τον όρο x^0). Συμπεραίνουμε ότι

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$a_{2n} = \frac{a_0(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)} = \frac{a_0(-1)^n}{n!2^n}$$

και

$$a_{2n+1} = 0 \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι η γενική λύση προκύπτει ως η σειρά

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x/2)^n}{n!} = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Η λύση αυτή συμφωνεί πλήρως (όπως αναμενόταν) με την (7.81

7.13.1 Η διαφορική εξίσωση του Airy

Ας δούμε τώρα μια εξίσωση για την οποία δεν υπάρχει ουσιαστικά άλλος τρόπος λύσης εκτός από τη χρήση δυναμοσειρών. Έστω

$$y'' + xy = 0 \tag{7.82}$$

Θέτοντας $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ παίρνουμε $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ ή

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1} a_{n-1}x^n = 0.$$

7.14 Ομογενείς Διαφορικές εξισώσεις

Εξετάζουμε την διαφορική εξίσωση

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0, \qquad x > 0. \tag{7.83}$$

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής $y = x^r$. Θα πρέπει να ισχύει $r(r-1)x^{r-2} + arx^{r-2} + bx^{r-2} = 0$ και επομένως, αφού $x > 0$, το r θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $r(r-1) + ar + b = 0$ ή

$$r^2 + r(a-1) + b = 0. \tag{7.84}$$

Στην γενική περίπτωση η παραπάνω εξίσωση έχει δύο διακριτές ρίζες, r_1, r_2 και η γενική λύση της (7.83) δίνεται από την

$$y(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}. \tag{7.85}$$

Αν οι ρίζες της (7.84) είναι μιγαδικές, δηλαδή $r_1 = \kappa + i\lambda$, $r_2 = \kappa - i\lambda$ τότε το δεξί μέλος της (7.85) γίνεται

$$\begin{aligned} x^\kappa \left(C_1 x^{i\lambda} + C_2 x^{-i\lambda}\right) &= x^\kappa \left(C_1 e^{\log x^{i\lambda}} + C_2 e^{\log x^{-i\lambda}}\right) \\ &= x^\kappa \left(C_1 e^{i\lambda \log x} + C_2 e^{-i\lambda \log x}\right) \\ &= x^\kappa \left(D_1 \cos(\lambda \log x) + D_2 \sin(\lambda \log x)\right) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση λάβαμε υπ΄ όψι μας την σχέση του Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Οι D_1, D_2 είναι αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Όταν η (7.85) έχει μια διπλή ρίζα τότε η παραπάνω μέθοδος προσδιορίζει μια μόνο λύση της (7.83).

7.15 Μέθοδος των μεταβλητών συντελεστών του Lagrange

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί προκειμένου να βρούμε μια δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη, λύση μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ όταν μια λύση είναι ήδη γνωστή. Έστω η ΔΕ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{7.86}$$

και έστω $y_1(x)$ μια λύση της. Θα αναζητήσουμε μια δεύτερη λύση της μορφής

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) \tag{7.87}$$

όπου $v(x)$ μια άγνωστη συνάρτηση η οποία θα προσδιοριστεί κατάλληλα προκειμένου η y_2 να ικανοποιεί την (7.86). Παραγωγίζοντας την (7.87) παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_2' &= v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''. \end{aligned}$$

Προκειμένου να είναι η (7.87) λύση της (7.86) θα πρέπει να ισχύει $y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0$ και αντικαθιστώντας τις τιμές των παραγώγων αφού παραγοντοποιήσουμε κατάλληλα παίρνουμε

$$v\left(y_1'' + Py_1' + Qy\right) + v''y_1 + v'\left(2y_1' + Py_1\right) = 0.$$

Ο παράγοντας του v μέσα στην πρώτη παρένθεση στην παραπάνω σχέση μηδενίζεται αφού εξ υποθέσεως η y_1 είναι λύση της (7.86). Αν θέσουμε $u = v'$ τότε θα έχουμε

$$u'y_1 + u(2y_1' + Py_1) = 0$$

η

$$u' + u\left(2\frac{y_1'}{y_1} + P\right) = 0.$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι μια ΔΕ πρώτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές την οποία εύκολα μπορούμε να επιλύσουμε πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}.$$

Έχουμε συνεπώς

$$e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}u' + e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}u\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right) = 0$$

ή

$$\left(e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}u\right)' = 0$$

ή

$$u = Ce^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx} = Ce^{-2\log y_1-\int Pdx} = Cy_1^{-2}e^{-\int Pdx},$$

όπου C είναι μια σταθερά που προκύπτει από την ολοκλήρωση. Ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά, δεδομένου ότι $u = v'$ παίρνουμε

$$v(x) = C\int y_1^{-2}e^{-\int Pdx}dx + C_0.$$

Συνεπώς μια δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη λύση της (7.86) θα είναι η $y_2 = vy_1$ ή

$$y_2 = Cy_1\int y_1^{-2}e^{-\int Pdx}dx + C_0y_1.$$

Δεδομένου ότι η y_1 είναι ήδη γνωστή και οι πολλαπλασιαστικές σταθερές σ′ αυτή τη φάση δεν μας ενδιαφέρουν έχουμε απλώς την δεύτερη λύση

$$y_2 = y_1\int y_1^{-2}e^{-\int Pdx}dx. \tag{7.88}$$

Η γενική λύση της (7.86) είναι επομένως η

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x). \tag{7.89}$$

(Το τελευταίο αυτό βήμα θα πρέπει να επεξηγεί πλήρως το λόγο που γράψαμε την δεύτερη λύση στην μορφή (7.88).)

7.16 Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα και το Εκθετικό Ενός Πίνακα

Εδώ θα εξετάσουμε γραμμικά διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Το γενικό διαφορικό σύστημα αυτής της μορφής είναι το

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \ + \ b_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \ + \ b_n(t) \end{aligned} \tag{7.90}$$

με δεδομένες αρχικές συνθήκες $x_1(0) = c_1, \ldots, x_n(0) = c_n$. Οι συντελεστές a_{ij} και οι συναρτήσεις $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ είναι επίσης δεδομένα του προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά μέσω του πίνακα A με στοιχεία a_{ij}, του διανύσματος στήλης $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$, $c = [c_1, \ldots, c_n]^T$ και του $b(t) = [b_1(t), \ldots, b_n(t)]^T$ ως

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = c. \tag{7.91}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα ως εξής

$$\begin{aligned} e^{-At}x'(t) - e^{-At}x(t) &= e^{-At}b(t) \ \Rightarrow \ \left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}b(t) \\ &\qquad \Rightarrow \ e^{-At}x(t) - e^{-A\,0}x(0) = \int_0^t e^{-As}b(s)ds. \end{aligned}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $x(0) = c$, $e^{-A\,0} = I$, έχουμε

$$e^{-At}x(t) = c + \int_0^t e^{-As}b(s)ds$$

και επομένως

$$x(t) = e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds. \tag{7.92}$$

Όταν $b(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$ το σύστημα ονομάζεται ομογενές και η λύση του είναι

$$x(t) = e^{At}c. \tag{7.93}$$

Πρακτικά, η δυσκολία επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος έγκειται στον υπολογισμό του εκθετικού e^{At}.

Παράδειγμα 1. Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$.

Εδώ, ο πίνακας A είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 4 = (\lambda-1)(\lambda+3) = 0.$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\lambda_1 = 1 : \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{ιδιοδιάνυσμα} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 : \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{ιδιοδιάνυσμα} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα και ο αντίστροφός του είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Me^{\Lambda t}M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{-3t} & e^t - e^{-3t} \\ e^t - e^{-3t} & e^t + e^{-3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{-3t} & e^t - e^{-3t} \\ e^t - e^{-3t} & e^t + e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}.$$

7.16.1 Ένα Παράδειγμα Διαφορικού Συστήματος

Έστω τρεις δεξαμενές που περιέχουν αλμυρό νερο με πυκνότητα αλατιού (σε gr/m^3), x_i, $i = 1, 2, 3$. Καθαρό νερό εισρέει στην πρώτη δεξαμενή με ρυθμό r (m^3/sec).

Έστω ότι ο όγκος της δεξαμενής i είναι V_i (m^3) και η αρχική μάζα αλατιού στην δεξαμενή i είναι m_i (gr) και επομένως $x_i(0) = m_i/V_i$. Θέλουμε να βρούμε τις πυκνότητες του αλατιού στις τρεις δεξαμενές ως συνάρτηση του χρόνου. Προκειμένου να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την μεταβολή των πυκονοτήτων παρατηρούμε ότι

$$m_1(t + \Delta t) = x_1(t)(V_1 - r\Delta t)$$

και συνεπώς

$$x_1(t + \Delta t) - x_1(t) = x_1(t)\left(1 - \frac{r}{V_1}\Delta t\right) - x_1(t).$$

Θέτοντας

$$\alpha_i := \frac{r}{V_i} \tag{7.94}$$

έχουμε

$$\frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} = -\alpha_i x_1(t)$$

και αφήνοντας $\Delta t \to 0$ στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$x_1'(t) = -\alpha_1 x_1(t). \tag{7.95}$$

Για την δεξαμενή $i = 2, 3$ έχουμε

$$m_i(t + \Delta) = x_i(t)\,(V_i - r\Delta t) + x_{i-1}(t) r\Delta t.$$

Διαιρώντας με τον όγκο της δεξαμενής, V_i, έχουμε

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) - \alpha_i x_i(t)\Delta t + \alpha_i x_{i-1}(t)$$

απ΄ όπου παίρνουμε

$$\frac{x_i(t + \Delta) - x_i(t)}{\Delta t} = -\alpha_i x_i(t) + \alpha_i x_{i-1}(t).$$

Αφήνοντας πάλι $\Delta t \to 0$ έχουμε

$$x_i'(t) = -\alpha_i x_i(t) + \alpha_i x_{i-1}(t). \tag{7.96}$$

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις γράφονται ως σύστημα

$$X'(t) = AX(t)$$

με

$$A := \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & \\ \alpha_2 & -\alpha_2 & \\ & \alpha_3 & -\alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός και οι ιδιοτιμές του φαίνονται στην διαγώνιο και είναι οι α_i, $i = 1, 2, 3$.

7.17 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ως γραμμικά διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης

Ας εξετάσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = r(t), \quad x(0) = c_1, \ x'(0) = c_2. \tag{7.97}$$

Θέτοντας $x_1(t) = x(t)$ και $x_2(t) = x'(t)$ έχουμε ότι $x''(t) = x_2'(t)$ και επομένως η (7.97) γράφεται ως

$$x_2'(t) + ax_2(t) + bx_1(t) = r(t).$$

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι η (7.97) γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

και επομένως έχουμε ένα διαφορικό σύστημα της μορφής (7.91). Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα του συστήματος θα είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda a + b = 0 \tag{7.98}$$

(δηλαδή ίδια με την χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης). Αν λ_1, λ_2 είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής αυτής εξίσωσης τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν ως

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & -1 \\ b & \lambda_1 + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u - v \\ bu + v(\lambda_1 + a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Διαλέγοντας $u = 1$, $v = \lambda_1$ βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση ικανοποιείται. Ικανοποιείται επίσης και η δεύτερη γιατί $b + \lambda_1^2 + \lambda_1 a = 0$. Επομένως το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 είναι το $[1, \lambda_1]^T$ και, παρομοίως, εκείνο που αντιστοιχεί στην λ_2 είναι το $[1, \lambda_2]^T$. Άρα, ο πίνακας M του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα, καθώς και ο M^{-1} είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την σχέση (7.93), έχουμε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$x(t) \;=\; c_1\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}-\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}+c_2\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Συγκρίνατε την σχέση αυτή με την ανάλυση της παραγράφου 7.10.2.

7.17.1 Υπολογισμός του e^{At} μέσω της λύσης ενός διαφορικού συστήματος

Έστω ο πίνακας

$$J=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το e^{Jt} μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $e^{Jt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}J^n$ και να υπολογίσουμε τις δυνάμεις

$$J^n=\begin{bmatrix}2^n&n2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}$$

ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα

$$e^{Jt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}J^n=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}2^n & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}n2^{n-1}\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}2^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}. \tag{7.99}$$

Στην τελευταία εξίσωση, εκτός από την σειρά για την εκθετική συνάρτηση, χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}n2^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}2^{n-1}=te^{2t}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το διαφορικο σύστημα

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

πρώτα με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ προκειμένου να προσδιορίσουμε την πρώτη στήλη του πίνακα e^{Jt} και στη συνέχεια με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ώστε να προσδιορίσουμε την δεύτερη στήλη. Το σύστημα γράφεται ως

$$x_1'(t) \;=\; 2x_1(t)+x_2(t) \tag{7.100}$$

$$x_2'(t) \;=\; 2x_2(t) \tag{7.101}$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $x_2(t)=x_2(0)e^{2t}$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη παίρνουμε

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 2x_1(t)+x_2(0)e^{2t} \;\Rightarrow\; e^{-2t}x_1'(t)-2e^{-2t}x_1'(t)=x_2(0) \;\Rightarrow\; \left(e^{-2t}x_1(t)\right)'=x_2(0)\\ &\Rightarrow\; e^{-2t}x_1(t)-x_1(0)=x_2(0)t\end{aligned}$$

ή

$$x_1(t) = x_1(0)e^{2t} + x_2(0)te^{2t}.$$

Αντικαθιστώντας τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες $x_1(0)$, $x_2(0)$, προκύπτουν τα στοιχεία του πίνακα (7.99).

Κεφάλαιο 8

Κυρτότητα στον $\mathbb{R}^n$

8.1 Κλειστά Σύνολα

8.2 Κυρτά Σύνολα

Ένα υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται *κυρτό* αν, για κάθε $x, y \in C$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$.

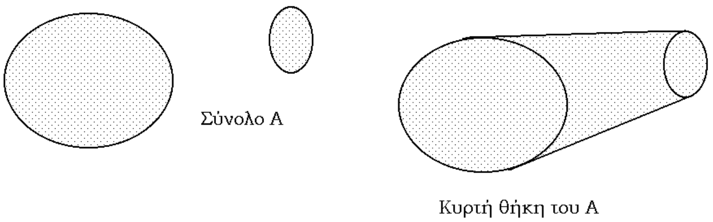
Αν a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ ονομάζεται *κυρτός συνδυασμός* των a_i αν $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Αν $\{A_i; i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από κυρτά σύνολα, τότε $\bigcap_{i\in I} A_i$ είναι επίσης κυρτό σύνολο. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς αφού για $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ θα έχουμε $x, y \in A_i$ για κάθε $i \in I$ και αφού τα A_i είναι κυρτά $\lambda x + (1-\lambda)y \in A_i$ για κάθε i άρα $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Η *κυρτή θήκη* του συνόλου $A \in \mathbb{R}^n$ την οποία συμβολίζουμε ως $\mathrm{conv}A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A δηλαδή η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το A. (Η τομή αυτή είναι κυρτή με βάση την προηγούμενη παρατήρηση.)

Κάθε κυρτός συνδυασμός στοιχείων ενός κυρτού συνόλου A ανήκει στο σύνολο A. Αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:

Θεώρημα 23. *Έστω $a_1, \ldots, a_m$ σημεία ενός κυρτού συνόλου $A \in \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ με $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. Τότε $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \in A$.*



Σχήμα 8.1: Η κυρτή θήκη

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m. Το θεώρημα ισχύει τετριμμένα για $m = 1$ και από τον ορισμό της κυρτότητας για $m = 2$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $m = k \geq 2$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $m = k + 1$, δηλαδή ότι $x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j a_j \in A$. Αν $\mu := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ τότε ασφαλώς $x = a_{k+1} \in A$. Έστω λοιπόν $\mu > 0$. Ορίζουμε $y = \frac{\lambda_1}{\mu} a_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\mu} a_k$. Θα ισχύει ότι $y \in A$ από την επαγωγική υπόθεση. Αλλά $x = \mu y + (1 - \mu) a_{k+1} \in A$ από την κυρτότητα του A. ☐

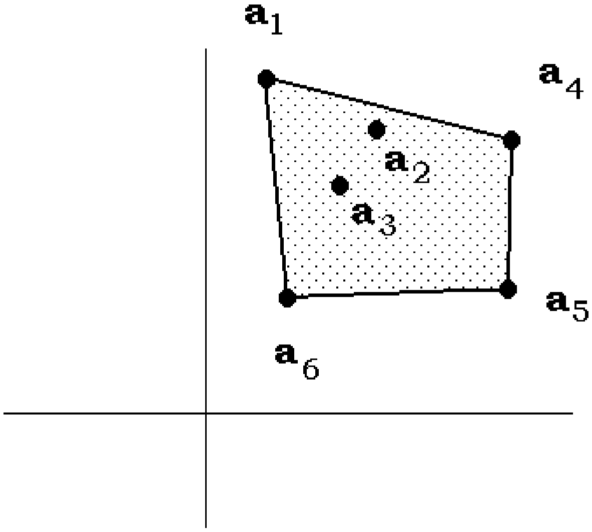
Θεώρημα 24. *Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε conv A είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του A.*

Απόδειξη. Έστω B το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του A δηλαδή $B = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i ; m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύνολο B είναι κυρτό. Πράγματι, αν $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{m'} \lambda'_i a'_i$ είναι δύο κυρτοί συνδυασμοί στοιχείων του A και $\mu \in [0, 1]$, $\mu' := 1 - \mu$, τότε $\mu x + \mu' y = \mu\lambda_1 a_1 + \cdots + \mu\lambda_m a_m + \mu'\lambda'_1 a'_1 + \cdots + \mu'\lambda'_{m'} a'_{m'}$ είναι επίσης κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A και επομένως ανήκει στο B. Επίσης ισχύει προφανώς ότι $A \subset B$. Συνεπώς αφού $\mathrm{conv}A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A ισχύει ότι $\mathrm{conv}A \subset B$. Αντίστροφα, κάθε στοιχείο του B είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A και επομένως ανήκει σε κάθε κυρτό σύνολο που περιέχει το A, επομένως και στην τομή τους, δηλαδή το $\mathrm{conv}A$. ☐

Από το παραπάνω έχουμε και τα εξής προφανή πορίσματα:

Πόρισμα 4. *Αν ένα σημείο x ανήκει στην κυρτή θήκη του A τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και σημεία $a_1, \ldots, a_m$ του A τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, δηλαδή το x μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A.*

Πόρισμα 5. *Η κυρτή θήκη του συνόλου $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ είναι το σύνολο $\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$.*



Σχήμα 8.2: Η κυρτή θήκη του συνόλου $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

8.3 Κυρτές Συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 13. *Μια συνάρτηση* $f : C \to \mathbb{R}$ *ορισμένη πάνω σ' ένα κυρτό σύνολο* $C \subset \mathbb{R}^n$ *ονομάζεται* κυρτή *(convex) αν, για κάθε* $x, y \in C$ *και κάθε* $\theta \in [0, 1]$

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \tag{8.1}$$

Θα ονομάζεται κοίλη *(concave) αν*

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \tag{8.2}$$

Αν οι (8.1), (8.2) ισχύουν ως ανισότητες τότε η f *ονομάζεται* αυστηρώς κυρτή ή κοίλη *αντιστοίχως.*

Από τον παραπάνω ορισμό είναι σαφές ότι αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο C τότε η $-f$ είναι κοίλη. Παρατηρήστε επίσης ότι είναι σκόπιμο να ορίσουμε μια κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση είτε σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$ ή σε ένα κυρτό υποσύνολό του, μια και στον ορισμό, αν τα x και y είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα πρέπει και το $\theta x + (1 - \theta)y$ να ανήκει επίσης στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η f είναι κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση τότε δεν μπορεί να είναι ασυνεχής στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Τυχόν ασυνέχειες, αν υπάρχουν, πρέπει να βρίσκονται στο σύνορο του πεδίου ορισμού.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει την σχέση ανάμεσα στην κυρτότητα και τις μερικές παραγώγους των κυρτών και κοίλων συναρτήσεων.

Θεώρημα 25. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}^n$ κυρτή συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους στο C. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν, για κάθε x_0 στο εσωτερικό του C*

$$f(x) - f(x^0) \;\geq\; \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0). \tag{8.3}$$

Ομοίως, η f είναι κοίλη αν και μόνο αν,

$$f(x) - f(x^0) \;\leq\; \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0). \tag{8.4}$$

Η f είναι αυστηρώς κυρτή αν και μόνο η ανισότητα (8.3) είναι αυστηρή. Παρομοίως, η f είναι αυστηρώς κοίλη αν και μόνο αν η ανισότητα (8.4) είναι αυστηρή.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι αν η f είναι κυρτή τότε ισχύει η (8.3). Αφού η f είναι κυρτή, $f(\lambda x + (1-\lambda)x^0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^0)$ ή, ισοδύναμα,

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{f(x^0 + \lambda(x - x^0)) - f(x^0)}{\lambda}.$$

Αφήνοντας το $\lambda \to 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε την (8.3). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η (8.4).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (8.3) ισχύει. Θα αποδείξουμε τότε ότι η f είναι κυρτή. Αν $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)x^0$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\;\geq\; \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}), \\ f(x^0) - f(\bar{x}) &\;\geq\; \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^0 - \bar{x}). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με λ και την δεύτερη με $1 - \lambda$ παίρνουμε

$$\lambda f(x) - \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(x^0) - (1-\lambda) f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x}) \cdot (\lambda x - \lambda \bar{x} + (1-\lambda)x^0 - (1-\lambda)\bar{x})$$

ή

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^0) - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Η τελευταία σχέση αυτή συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή. □

Αν η f είναι ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} \mathrm{epi}(f) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in C,\, y \leq f(x)\}, \\ \mathrm{hyp}(f) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in C,\, y \geq f(x)\}. \end{aligned}$$

Πρόταση 11. *Η f είναι κυρτή συνάρτηση αν και μόνο αν το σύνολο epi(f) είναι κυρτό. Η f είναι κοίλη αν και μόνο αν το σύνολο hyp(f) είναι κυρτό.*

Στην περίπτωση που η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, αν $H(x)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας των δευτέρων παραγώγων στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$,

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 26. *Έστω C ένα ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : C \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο C. Τότε*

1. *Η f είναι κυρτή στο C αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας $H(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε $x \in C$.*
2. *Η f είναι κοίλη στο C αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας $H(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος για κάθε $x \in C$.*

Επίσης η f είναι αυστηρώς κυρτή αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος. *Παρομοίως, η f είναι αυστηρώς κοίλη αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας είναι* αρνητικά ορισμένος.

Απόδειξη. Έστω f κυρτή στο C. Αφού το C είναι ανοικτό, για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in (-a, a)$, $x + th \in C$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x + th) - f(x) - t\nabla f(x) \cdot h.$$

Ισχύει ότι $g(t) \leq 0$ λόγω του ότι η f είναι κοίλη. Επίσης, $g(0) = 0$ και συνεπώς η g έχει τοπικό σημείο μεγίστου για $t = 0$. Συνεπώς

$$g''(0) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(x) h_i h_j \leq 0 \quad \text{για κάθε } h \in \mathbb{R}^n.$$

Συνεπώς, αν η f είναι κοίλη, η Εσσιανή είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $x \in C$.

Αντίστροφα, έστω ότι η Εσσιανή της f είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $x \in C$. Για $x^0, x \in C$ από το θεώρημα του Taylor ισχύει ότι

$$f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^{m} f'_i(x^0)(x_i - x_i^0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(\bar{x})(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \qquad (8.5)$$

όπου $\bar{x} = x^0 + \theta(x - x^0) = \theta x + (1 - \theta)x^0$ για κάποιο $\theta \in [0, 1]$. Αφού το C είναι κυρτό σύνολο, $\bar{x} \in C$. Δεδομένου ότι η Εσσιανή είναι αρνητικά ημιορισμένη στο $\bar{x}$, το δεξί μέλος της (8.5) είναι μη αρνητικό, και επομένως η f είναι κυρτή. □

Κεφάλαιο 9

Βελτιστοποίηση

9.1 Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$ και το θεώρημα του Taylor

Ορισμός 14. *Έστω*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

συμμετρικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στους πραγματικούς αριθμούς. Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\psi(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{9.1}$$

ονομάζεται τετραγωνική μορφή.

Για παράδειγμα, η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι η $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

Ορισμός 15. *Ένας συμμετρικός πίνακας A, $n \times n$ ονομάζεται*

Θετικά ορισμένος *αν $x^T A x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,*

Θετικά ημιορισμένος *αν $x^T A x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με την ισότητα να ισχύει για κάποιο $x \neq 0$,* αρνητικά ορισμένος *αν* $x^T Ax < 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,

αρνητικά ημιορισμένος *αν* $x^T Ax \leq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *με την ισότητα να ισχύει για κάποιο* $x \neq 0$.

Θεώρημα 27. *Έστω συμμετρικός πίνακας* A, $n \times n$ *με πραγματικά στοιχεία. Οι εξής τέσσερεις προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(1) Ο πίνακας A *είναι θετικά ορισμένος.*

(2) Όλες οι ιδιοτιμές του A *είναι θετικές.*

(3) Οι ορίζουσες όλων των άνω αριστερά υποπινάκων του A *είναι θετικές.*

(4) Όλοι οι οδηγοί d_i, $i = 1, \ldots, n$ *στην απαλοιφή κατά Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών είναι θετικοί*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι (1) $\Leftrightarrow$ (2). Δεδομένου ότι ο A είναι συμμετρικός, έχει n πραγματικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $q_1, \ldots, q_n$ τα οποία μπορούν να ληφθούν ως ορθογώνια και μοναδιαίου μήκους, δηλαδή $q_i^T q_j = \delta_{ij}$ όπου $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$. Συνεπώς, $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i q_i^T$ (φασματικό θεώρημα) και επομένως

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^T q_i q_i^T x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (q_i^T x)^2. \tag{9.2}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος, τότε $x^T Ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Διαλέγοντας $x = q_j$ έχουμε $q_j^T A q_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i (q_i^T q_j) = \lambda_j > 0$. Συνεπώς (1) $\leftrightarrow$ (2). Αντίστροφα, αν όλες οι ιδιοτιμές είναι αυστηρά θετικές από την (9.2) προκύπτει ότι $x^T Ax \geq 0$. Η μόνη περίπτωση να ισχύει ισότητα είναι να έχουμε $q_i^T x = 0$ για όλα τα i. Όμως τα $(q_i), i = 1, \ldots, n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ και συνεπώς αυτό σημαίνει ότι $x = 0$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $(1,2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (1,2)$.

$(1,2) \Leftrightarrow (3)$. Ονομάζουμε A_k τον άνω αριστερά $k \times k$ υποπίνακα του A, όπου $1 \leq k \leq n$. Έστω x_k ένα διάνυσμα στήλης στον $\mathbb{R}^k$. Αν το διάνυσμα x έχει την μορφή $x^T = [x_k^T, 0]$ (δηλαδή τα τελευταία $n-k$ στοιχεία ίσα με το μηδέν,

$$x^T Ax = [x_k^T, 0] \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = x_k^T A_k x_k > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, υπό την προϋπόθεση ότι $x_k \neq 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο $k \times k$ πίνακας είναι επίσης θετικά ορισμένος.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του A_k πρέπει να είναι αυστηρά θετικές (αυτές οι ιδιοτιμές δεν ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα βεβαίως) και επομένως η ορίζουσα του A_k πρέπει να είναι επίσης θετική, ως γινόμενο των θετικών ιδιοτιμών του.

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Ξεκινάμε με την διάσπαση $A = LDU$ όπου ο L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο, D άνω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο, και D ο διαγώνιος πίνακας που περιέχει τους οδηγούς της διαδικασίας απαλοιφής κατά Gauss. Δεδομένου ότι ο A είναι συμμετρικός, θα πρέπει να ισχύει ότι $A = A^T = U^T D L^T$. Δεδομένου ότι η διάσπαση LDU είναι μοναδική και ότι ο U^T είναι κάτω τριγωνικός, θα πρέπει να ισχύει ότι $U = L^T$. Συνεπώς, η διάσπαση στην περίπτωσή μας γίνεται $A = LDL^T$. Λόγω του αλγορίθμου όμως, βάσει του οποίου επιτυγχάνουμε την διάσπαση LDU, αν συμβολίσουμε με L_k καιD_k τους άνω αριστερά υποπίνακες των L και D αντίστοιχα, ισχύει ότι $A_k = L_k D_k L_k^T$. Συνεπώς

$$\det(A_k) = \det(L_k)\det(D_k)\det(L_k^T) = 1 \cdot \det(D_k) \cdot 1 = d_1 d_2 \cdots d_k > 0 \tag{9.3}$$

όπου, στην παραπάνω εξίσωση λάβαμε υπ′ όψιν μας ότι η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα L_k είναι μονάδα αφού τα διαγώνια στοιχεία του είναι όλα ίσα με 1 και ότι ο πίνακας D είναι ο διαγώνιος πίνακας των οδηγών d_i. Εφ′ όσον η (9.3) ισχύει για $k = 1, 2, \ldots, n$ συμπεραίνουμε ότι $d_i > 0$ για $i = 1, \ldots, n$.

(4) $\Leftrightarrow$ (1, 2). Από την σχέση $x^T A x = x^T L D L^T x$, θέτοντας $c_i := (L^T x)_i$, έχουμε $x^T A x = \sum_{i=1}^n d_i c_i^2 \geq 0$ δεδομένου ότι οι οδηγοί d_i είναι όλοι θετικοί. Η περίπτωση $x^T A x = 0$ ισχύει μόνο όταν $c_i = 0$ για κάθε i. Αυτό όμως σημαίνει ότι $L^T x = 0$. Δεδομένου ότι ο L είναι τριγωνικός, χωρίς μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο, αυτό σημαίνει με την σειρά του ότι $x = 0$ και επομένως ότι ο A είναι θετικά ορισμένος. ☐

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι η τετραγωνική μορφή (9.1) παίρνει αυστηρά θετικές τιμές για κάθε $x \neq 0$ αν και μόνο αν ο αντίστοιχος πίνακας A είναι θετικά ορισμένος. Αντίστοιχα η τετραγωνική μορφή παίρνει αυστηρά αρνητικές τιμές για κάθε $x \neq 0$ αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αρνητικά ορισμένος.

Ένα αντίστοιχο θεώρημα ισχύει για αρνητικά ορισμένους πίνακες. Συγκεκριμένα, όλες οι ιδιοτιμές του A στην περίπτωση αυτή είναι αρνητικές. Σε ότι αφορά τις ορίζουσες των άνω αριστερά υποπινάκων τα πρόσημα εναλλάσσονται ως εξής:

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{για } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ασκηση 9.1.1. Θεωρήστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Είναι ο A θετικά ορισμένος;
β) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές;
γ) Να διαγωνιοποιήσετε τον A.

Θεώρημα 28. *(Θεώρημα Taylor) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Τότε*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(||h||^2)$$

Σημείωση: Γενικά θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Ο όρος $o(||h||^2)$, το λεγόμενο υπόλοιπο του Taylor, τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από το $||h||^2$ όταν $h \to 0$. Το θεώρημα του Taylor γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H(x) h + o(||h||^2)$$

όπου ο Εσσιανός πίνακας (Hessian)

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός δεδομένου ότι, όταν οι δεύτερες παράγωγοι είναι συνεχείς (σε ένα ανοικτό χωρίο), $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Ορισμός 16. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Το σημείο x^0 θα ονομάζεται* κρίσιμο *αν*

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

Θεώρημα 29. *Έστω x^0 κρίσιμο σημείο της f. Αν ο πίνακας $H(x^0)$ είναι θετικά ορισμένος τότε το σημείο αυτό θα είναι σημείο τοπικού ελαχίστου ενώ αν είναι αρνητικά ορισμένος θα είναι σημείο τοπικού μεγίστου.*

(Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Taylor και μας επιτρέπει να βρούμε τα σημεία τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου.)

Παρατήρηση: Όταν η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) τότε ένα κρίσιμο σημείο είναι σημείο ολικού ελαχίστου (αντίστοιχα μεγίστου). Αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος (25) αν θέσουμε $\nabla f(x^0) = 0$ στις εξισώσεις (8.3), (8.4).

9.1.1. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 y^2 e^{-(x+y)^2}$ για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9.2 Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς ισότητας

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κάτω από τους περιορισμούς $g(\mathbf{x}) = 0$ όπου $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $m < n$. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ όπου $m > n$ και f, g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\text{υπό τους περιορισμούς} \\ &g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Έστω $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Λαγκρανζιανή. Βρίσκουμε τα κρίσημα σημεία υπό περιορισμούς ως λύσεις των εξισώσεων

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Τα σημεία μεγίστου βρίσκονται ανάμεσα σ' αυτά τα σημεία.

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned} &\min x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &\text{υπό τους περιορισμούς} \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{aligned}$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3) - \lambda_2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1)$$

και τα στάσιμα σημεία δίνονται από το σύστημα $\partial L/\partial x_j = 0$, $\partial L/\partial \lambda_i = 0$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$.

$$\begin{array}{cccccccc} -2x_1 & & & -\lambda_1 & -\lambda_2 & = & 0 \\ & -2x_2 & & -\lambda_1 & -2\lambda_2 & = & 0 \\ & & -2x_3 & -\lambda_1 & -3\lambda_2 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση $x_1 = -1/2, x_2 = 0, x_3 = 1/2$ και $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Η γεωμετρική σημασία του θεωρήματος του Lagrange είναι ότι, προκειμένου να είναι το σημείο $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ κρίσιμο σημείο θα πρέπει η κλίση της f στο σημείο αυτό, $\nabla f(x^*)$ να είναι είναι κάθετη στην υπερεπιφάνεια που ορίζουν οι περιορισμοί g στο ίδιο σημείο. Ο κάθετος αυτός υπόχωρος είναι είναι ο χώρος που δημιουργείται από τα διανύσματα $\nabla g_i(x^*)$, $i = 1, \ldots, m$. Οι γραμμικοί αυτοί συνδυασμοί είναι ο υπόχωρος $\{\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$.

9.3 Ένα παράδειγμα που εξηγεί τη φυσική σημασία των συνθηκών

Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις συνεχώς παραγωγίσιμες. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την $f(x, y)$ κάτω από τον περιορισμό $g(x, y) = c$. Μια απλή σκέψη είναι η εξής: η σχέση $g(x, y) = c$ επιτρέπει, τουλάχιστον 'τοπικά', να λύσουμε ως προς y και να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x και της σταθεράς c. Αυτό δικαιολογείται από το θεώρημα της 'πεπλεγμένης συναρτήσεως'. Υποθέτοντας ότι υπάρχει συνάρτηση ϕ (η οποία εξαρτάται από την τιμή του c) τέτοια ώστε $g(x, \phi(x)) = c$ και παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\phi'(x) = 0.$$

Η αναγκαία συνθήκη για να έχει το f τοπικό ακρότατο στο σημείο x είναι

$$\frac{df(x, \phi(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\phi'(x) = 0.$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις, υπό την προϋπόθεση ότι $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq 0$ και $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \phi'(x)$$

ή, ισοδύναμα, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \nabla g(x) = \lambda \nabla f(x).$$

Η παραπάνω σχέση εννοείται ότι ισχύει για τα σημεία εκείνα που είναι δεσμευμένα ακρότατα.

9.4 Η οικονομική σημασία των συντελεστών Lagrange

Ας γράψουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης (9.4) στη μορφή

$$\begin{array}{l} \max f(\mathbf{x}) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ g_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{array} \tag{9.5}$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(\mathbf{x}) - b_i)$$

και οι εξισώσεις για τα κρίσιμα σημεία είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{9.6}$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{9.7}$$

Έστω $\mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$, οι τιμές που μεγιστοποιούν το κριτήριο f και $f(\mathbf{x}^*)$ η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου. Όλες αυτές οι ποσότητες εξαρτώνται βέβαια από τα b_i, $i = 1, \ldots, m$. Το ερώτημα που θέτουμε εδώ είναι πώς αλλάζει η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου όταν μεταβληθούν λίγο τα b_i. Για το σκοπό αυτό αυτό υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial b_i} \tag{9.8}$$

$$\frac{\partial g_k(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = \delta_{ki} \tag{9.9}$$

όπου

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = i, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τέλος, από την (9.6), στις βέλτιστες τιμές $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \frac{\partial g_l(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k}. \tag{9.10}$$

Από τις (9.8), (9.10), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \frac{\partial g_l(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k^*}{\partial b_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_l(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial b_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \delta_{li} \\ &= \lambda_i^*. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Συνεπώς, οι τιμές των πολλαπλασιαστών του Lagrange στο βέλτιστο σημείο δείχνουν πόσο θα μεταβαλλόταν οριακά η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου αν μεταβαλλόταν οριακά το δεξί μέλος του αντίστοιχου περιορισμού. Αν υποθέσουμε ότι αυξάνουμε το b_i σε $b_i + h$ όπου h μια μικρή ποσότητα, η νέα βέλτιστη τιμή του κριτηρίου θα είναι $f(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} h = f(\mathbf{x}^*) + \lambda_i^* h$. Για το λόγο αυτό οι συντελεστές Lagrange υπολογισμένοι στο βέλτιστο ονομάζονται και 'σκιώδεις τιμες' (shadow prices).

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα που δείχνει την σημασία των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Θέλουμε να βρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει μέγιστο όγκο V για δεδομένη επιφάνεια S. Πρακτικά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε S τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας με την οποία θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κλειστό ντεπόζιτο μεγίστου όγκου. Αν x, y και z είναι οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου, τότε η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι

$$\max V := xyz \qquad \text{υπό τον περιορισμό } 2xy + 2yz + 2zx = S \tag{9.12}$$

όπου S είναι η δεδομένη επιφάνεια. Η Λαγκρανζιανή είναι $L = xyz - \lambda(2xy + 2yz + 2zx - S)$ και επομένως τα κρίσιμα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2\lambda(y+z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= zx - 2\lambda(z+x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= zy - 2\lambda(x+y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -2(xy+yz+zx) + S = 0 \end{aligned} \tag{9.13}$$

Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με x, την δεύτερη με y και την τρίτη με z:

$$xyz = 2\lambda x(y+z), \quad xyz = 2\lambda y(z+x), \quad xyz = 2\lambda z(x+y)$$

και συνεπώς $x(y+z) = y(z+x) = z(x+y)$ απ΄ όπου έχουμε

$$x = y = z. \tag{9.14}$$

Με βάση το γεγονός αυτό, η τέταρτη εξίσωση στις σχέσεις (9.13) δίνει $6x^2 = S$ ή

$$x = \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}. \tag{9.15}$$

Συνεπώς, ο μέγιστος δυνατός όγκος για δεδομένη επιφάνεια S είναι

$$V = xyz = \frac{S^{3/2}}{6\sqrt{6}} \tag{9.16}$$

και επιτυγχάνεται όταν το παραλληλεπίπεδο είναι κύβος, όπως προέκυψε από την (9.14). Τέλος χρησιμοποιώντας τις (9.14) και (9.15) στην πρώτη εξίσωση από τις (9.13) παίρνουμε

$$\frac{S}{6} - 4\lambda\frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{S^{1/2}}{4\sqrt{6}}. \tag{9.17}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να απαντήσουμε την εξής ερώτηση: Πόσο θα άλλαζε ο μέγιστο όγκος αν άλλαζε λίγο η διαθέσιμη επιφάνεια· Με άλλα λόγια, αν είχαμε διαθέσιμο ένα επιπλέον τετραγωνικό εκατοστό επιφάνειας, πόσα κυβικά εκατοστά θα αυξανόταν ο όγκος· Η απάντηση δίδεται από την παράγωγο του μέγιστου όγκου ως προς S:

$$\frac{dV}{dS} = \frac{d}{dS}\frac{S^{3/2}}{6\sqrt{6}} = \frac{S^{1/2}}{4\sqrt{6}}.$$

Παρατηρείστε ότι η τιμή αυτή είναι βεβαίως η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange σύμφωνα με την (9.17). Αυτό βεβαίως προκύπτει από το θεώρημα που αποδείξαμε σ′ αυτή την παράγραφο.

9.5 Ικανές συνθήκες για βέλτιστο με περιορισμούς ισότητας

Θεώρημα 30. *Έστω A συμμετρικός πίνακας $n \times n$ και B πίνακας $k \times n$, τέτοιος ώστε* $\operatorname{rank}(B) = k$ *και* $\det B_k \neq 0$.

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{matrix}}_{B_k} & \begin{matrix} \cdots & b_{1n} \\ \cdots & b_{2n} \\ & \vdots \\ \cdots & b_{kn} \end{matrix} \end{array}\right]$$

Ορίζουμε τον πίνακα $(n+k) \times (n+k)$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccccc|} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k1} & \cdots & b_{kk} & \cdots & b_{kn} \\ \cline{4-8} b_{11} & \cdots & b_{k1} & a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1k} & \cdots & b_{kk} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{kn} & a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \\ \cline{4-8} \end{array}\right].$$

Αν C_r είναι ο άνω αριστερά τετραγωνικός υποπίνακας του C του οποίου το κάτω δεξιά στοιχείο είναι το a_{rr} (και επομένως έχει διάσταση $k+r$) δηλαδή

$$C_r = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k1} & \cdots & b_{kr} \\ b_{11} & \cdots & b_{k1} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1r} & \cdots & b_{kr} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

τότε

1. *$x^\top Ax > 0 \forall x \neq 0 : Bx = 0$ αν και μόνο αν για $r = k+1, k+2, \ldots, n$, $(-1)^k \det C_r > 0$.*
2. *$x^\top Ax < 0 \forall x \neq 0 : Bx = 0$ αν και μόνο αν για $r = k+1, k+2, \ldots, n$, $(-1)^r \det C_r > 0$.*

Παράδειγμα 1: Έστω ότι μας ενδιαφέρει να δούμε κατά πόσον η τετραγωνική μορφή

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

υπό τον γραμμικό περιορισμό $x_1 b_1 + x_2 b_2 = 0$ είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη. (Ο πίνακας μπορεί να θεωρηθεί συμμετρικός με $a_{12} = a_{21}$.) Ο γραμμικός περιορισμός μπορεί να εκφραστεί παραμετρικά ως $x_1 = tb_2$, $x_2 = -tb_1$, $t \in \mathbb{R}$ και επομένως η τετραγωνική μορφή γράφεται ως

$$\begin{aligned} t^2[b_2, -b_1] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{bmatrix} &= t^2(b_2^2 a_{11} + b_1^2 a_{22} - 2b_1 b_2 a_{12}) &= -t^2 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ & &= (-1)t^2 \det C_2 \end{aligned}$$

αφού στην περίπτωση αυτή

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Δεδομένου ότι $k = 1$ και $r = 2$ βλέπουμε ότι ανάλογα με το αν η $\det C_2$ είναι θετική ή αρνητική η τετραγωνική μορφή υπό τον γραμμικό περιορισμό είναι αντίστοιχα αρνητικά ή θετικά ορισμένη.

Παράδειγμα 2: Παρομοίως, έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε αν η τετραγωνική μορφή

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

υπό τους γραμμικούς περιορισμούς

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε $k = 2$, $n = 4$, και

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{12} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{12} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{13} & b_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{14} & b_{24} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Αν $\det C_3 < 0$, και $\det C_4 < 0$ τότε η τετραγωνική μορφή υπό τους δεδομένους περιορισμούς είναι *θετικά ορισμένη*. Αν $\det C_3 < 0$, και $\det C_4 > 0$ τότε η τετραγωνική μορφή υπό τους δεδομένους περιορισμούς είναι *αρνητικά ορισμένη*.

Απόδειξη στην περίπτωση που $k = 1$

Εξετάζουμε εδώ κατά πόσον $x^T A x > 0$ για κάθε $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $b^T x = 0$, όπου $b^T = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\theta > 0$ αρκετά μεγάλο, $x^T A x + \theta \left(b^T x\right)\right)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Με άλλα λόγια ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \theta b_1^2 & a_{12} + \theta b_1 b_2 & \cdots & a_{1n} + \theta b_1 b_n \\ a_{21} + \theta b_2 b_1 & a_{22} + \theta b_2^2 & \cdots & a_{2n} + \theta b_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \theta b_n b_1 & a_{n2} + \theta b_n b_2 & \cdots & a_{nn} + \theta b_n^2 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος. Αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_{11} + \theta b_1^2 & a_{12} + \theta b_1 b_2 & \cdots & a_{1k} + \theta b_1 b_k \\ a_{21} + \theta b_2 b_1 & a_{22} + \theta b_2^2 & \cdots & a_{2k} + \theta b_2 b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} + \theta b_k b_1 & a_{k2} + \theta b_k b_2 & \cdots & a_{kk} + \theta b_k^2 \end{vmatrix} > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$M_k := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta b_1 & a_{11} + \theta b_1^2 & a_{12} + \theta b_1 b_2 & \cdots & a_{1k} + \theta b_1 b_k \\ \theta b_2 & a_{21} + \theta b_2 b_1 & a_{22} + \theta b_2^2 & \cdots & a_{2k} + \theta b_2 b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} + \theta b_k b_1 & a_{k2} + \theta b_k b_2 & \cdots & a_{kk} + \theta b_k^2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι $\det M_k = -\Delta_k$. Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$M_k = \begin{bmatrix} -1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Παίρνοντας ορίζουσες στο παραπάνω γινόμενο πινάκων και παρατηρώντας ότι η ορίζουσα του δεύτερου πίνακα είναι 1 έχουμε

$$\det M_k = \begin{vmatrix} -1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $\det M_k = -\Delta_k$,

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} - \theta \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Επομένως, για να είναι ο πίνακας θετικά ορισμένος για μεγάλες τιμές του θ, θα πρέπει να ισχύει ότι $\Delta_k > 0$ για $k = 1, 2, \ldots, n$ το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} < 0.$$

Ας εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα

$$\max\,(\min)\, f(x) \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad g_i(x) = 0, \ \ i = 1, \ldots, m. \tag{9.18}$$

Θεώρημα 31. *Έστω f, και g_i, $i = 1, \ldots, m$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε μία ανοικτή περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$. Έστω $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ η Λαγκρανζιανή του προβλήματος. Επίσης $(x^*, \lambda^*) = (x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ ένα σημείο που ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \ \ j = 1, \ldots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0, \ \ i = 1, \ldots, m. \tag{9.19}$$

Ορίζουμε τον πίνακα $(n+m)\times(n+m)$

$$C = \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_m g_1 & \cdots & \partial_n g_m \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_m & \cdots & \partial_m g_m & \cdots & \partial_n g_m \\ \cline{4-8}
\partial_1 g_1 & \cdots & \partial_1 g_m & \multicolumn{1}{|c}{\partial^2_{11} L} & \cdots & \partial^2_{1k} L & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{\partial^2_{1n} L} \\
\vdots & & \vdots & \multicolumn{1}{|c}{\vdots} & & \vdots & & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\
\partial_1 g_m & \cdots & \partial_m g_m & \multicolumn{1}{|c}{\partial^2_{m1} L} & \cdots & \partial^2_{mm} & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{\partial^2_{kn} L} \\
\vdots & & \vdots & \multicolumn{1}{|c}{\vdots} & & \vdots & & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\
\partial_n g_1 & \cdots & \partial_n g_m & \multicolumn{1}{|c}{\partial^2_{n1} L} & \cdots & \partial^2_{nm} L & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{\partial^2_{nn} L} \\ \cline{4-8}
\end{array}\right].$$

9.6 Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου για προβλήματα με περιορισμούς ισότητας

Θεώρημα 32. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *και* $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ *δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με* $m < n$. *Έστω* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, *και* $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(\mathbf{x}) - b_i)$. *Έστω* $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *ένα σημείο για το οποίο*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9.21}$$

Ορίζουμε τον πίνακα $(n+m)\times(n+m)$

$$C(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_m^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_m \partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}
\end{bmatrix}$$

όπου

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j}.$$

Αν C_r είναι ο άνω αριστερά τετραγωνικός υποπίνακας του C του οποίου το κάτω δεξιά στοιχείο είναι το $\frac{\partial^2 L}{\partial x_r^2}$ (και επομένως έχει διάσταση $m + r$) δηλαδή

$$C_r = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_r} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_r} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_r \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_r^2} \end{bmatrix}$$

τότε, για το πρόβλημα $\max(\min) f(x_1, \ldots, x_n)$ υπό τους περιορισμούς $g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i$, $i = 1, \ldots, m$:

1. *Το $\mathbf{x}^*$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου (υπό τους δεδομένους περιορισμούς) αν και μόνο αν για $r = m+1, m+2, \ldots, n$, $(-1)^m \det C_r > 0$.*
2. *Το $\mathbf{x}^*$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου (υπό τους δεδομένους περιορισμούς) αν και μόνο αν για $r = m+1, m+2, \ldots, n$ $(-1)^r \det C_r > 0$.*

Ολικά Ελάχιστα και Μέγιστα για Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις

Θεώρημα 33. *Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και το x^* είναι κρίσιμο σημείο της, τότε είναι και σημείο* ολικού ελαχίστου. *Ομοίως, αν η f είναι κοίλη και το x^* είναι κρίσιμο σημείο της, τότε είναι και σημείο* ολικού μεγίστου.

Απόδειξη. Αφού το x^* είναι κρίσιμο σημείο της f, $\nabla f(x^*) = 0$. Από την (8.3) έχουμε ότι

$$f(x) - f(x^*) \;\geq\; \nabla f(x^*) \;=\; 0$$

και συνεπώς $f(x^*) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι το x^* είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Η περίπτωση που η f είναι κοίλη είναι παρόμοια και βασίζεται στην (8.4). □

Ασκήσεις

Πρόβλημα 1

Να εξετάσετε την τετραγωνική μορφή $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ υπό τους περιορισμούς $x_1+x_2=0$, $x_1+x_3=0$. (Βέβαια, εδώ μπορούμε να λύσουμε πολύ εύκολα: $x_2=-x_1$, $x_3=-x_1$ και επομένως η τετραγωνική μορφή γίνεται $3x_1^2+x_4^2$ που βέβαια είναι θετικά ορισμένη και επομένως το σημείο $(0,0,0,0)$ είναι σημείο τοπικού (και ολικού) ελαχίστου.)

Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$C=\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{1-5} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ισχύει ότι $\det C_2=3$ και $\det C_3=3$ και επομένως (με $k=2$) $(-1)^k \det C_r>0$ για $r=2,3$. Συνεπώς η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη και το σημείο $(0,0,0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τα σημεία τοπικού μεγίστου και ελαχίστου της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$ υπό τον περιορισμό $g(x,y)=x^2+4y^2-4=0$. Η Λαγκρανζιανή είναι $L=x^2+y^2-\lambda(x^2+4y^2-4)$ και, συμβολίζοντας τις μερικές παραγώγους με δείκτες (π.χ. $L_x=\frac{\partial L}{\partial x}$, $L_{xy}=\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}=L_{xy}$ κ.ο.κ.) βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία ως λύσεις του συστήματος

$$L_x = 2x-2\lambda x=0 \text{ ή } x(1-\lambda)=0 \tag{9.22}$$

$$L_y = 2y-8\lambda y=0 \text{ ή } y(1-4\lambda)=0 \tag{9.23}$$

$$L_\lambda = -(x^2-4y^2-4)=0. \tag{9.24}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις βλέπουμε ότι υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, δηλαδή (1): $x=0,\lambda=1/4$, (2): $y=0,\lambda=1$, και (3): $x=0,y=0$. Η τρίτη λύση, $x=y=0$ δεν ικανοποιεί την (9.24) και επομένως απορρίπτεται.

Η περίπτωση (1) χρησιμοποιώντας την (9.24) δίνει $4y^2-4=0$ ή $y=\pm 1$. Άρα δίνει τα κρίσιμα σημεία $(x^*,y^*,\lambda^*)=(0,1,1/4)$ και $(0,1,1/4)$.

Η περίπτωση (2) χρησιμοποιώντας την (9.24) δίνει $x^2-4=0$ ή $x=\pm 2$. Άρα δίνει τα κρίσιμα σημεία $(x^*,y^*,\lambda^*)=(2,0,1)$ και $(-2,0,1)$.

Προκειμένου να εξετάσουμε τα τέσσερα αυτά σημεία και να δούμε αν είναι σημεία τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$$C = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & x & 4y \\ x & (1-\lambda) & 0 \\ 4y & 0 & (1-4\lambda) \end{bmatrix}$$

Για το κρίσιμο σημείο $(0, 1, 1/4)$ ισχύει ότι (παραλείποντας τον θετικό παράγοντα 2 που πολλαπλασιάζει τον πίνακα και επειδή είναι θετικός δεν επιρρεάζει το αποτέλεσμα)

$$\det C(0, 1, 1/4) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Εφ' όσον $m = 1$ και $(-1)^m|C_2| > 0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $(0, 1, 1/4)$ είναι σημείο ελαχίστου. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο $(0, -1, 1/4)$.

Για το κρίσιμο σημείο $(2, 0, 1)$ ισχύει ότι (παραλείποντας τον θετικό παράγοντα 2 που πολλαπλασιάζει τον πίνακα και επειδή είναι θετικός δεν επιρρεάζει το αποτέλεσμα)

$$\det C(2, 0, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 12$$

Εφ' όσον $m = 1$ και $(-1)^2|C_2| > 0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $(2, 0, 1)$ είναι σημείο μεγίστου. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο $(-2, 0, 1)$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τα σημεία τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3$. Η Λαγκρανζιανή είναι $L = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - 3)$. Οι συνθήκες για τα κρίσημα σημεία είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - \lambda(2x + y) = 0 \tag{9.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 2y - \lambda(x + 2y) = 0 \tag{9.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \tag{9.27}$$

Οι εξισώσεις (9.25), (9.26) γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} 2(1-\lambda) & -\lambda \\ -\lambda & 2(\lambda - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αν η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα δεν είναι μηδέν, η μόνη λύση που έχει το σύστημα είναι $x = 0$, $y = 0$, που δεν ικανοποιεί την (9.27). Επομένως εξατάζουμε την περίπτωση $4(1-\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$ που δίνει τις λύσεις $\lambda = \frac{2}{3}$ και $\lambda = 2$.

α)$\lambda = \frac{2}{3}$**.** Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (9.25) παίρνουμε $x\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y = 0$ ή $x = y$. Αυτή η σχέση μαζί με την (9.27) δίνει $3x^2 = 3$ και επομένως έχουμε $x = \pm 1$. Έτσι έχουμε τα σημεία $(x, y, \lambda) = (1, 1, \frac{2}{3})$ και $(-1, -1, \frac{2}{3})$.

β) $\lambda = 2$**.** Η τιμή αυτή με την (9.25) δίνει $-2x - 2y = 0$ ή $y = -x$. Αυτή η σχέση μαζί με την (9.27) δίνει $x^2 = 3$ και επομένως έχουμε $x = \pm\sqrt{3}$. Έτσι έχουμε τα σημεία $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{2}{3})$ και $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{2}{3})$.

Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x+y & x+2y \\ 2x+y & 2(1-\lambda) & -\lambda \\ x+2y & -\lambda & 2(1-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Ισχύει $k = 1$ και επομένως $k+1 = 2$, άρα εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση μια μόνο ορίζουσα.

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (1, 1, \frac{2}{3})$**.** Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -24. \quad \text{Συνεπώς, } (-1)^1\Delta_2 > 0 \ \text{ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (-1, -1, \frac{2}{3})$**.** Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -24. \quad \text{Συνεπώς, } (-1)^1\Delta_2 > 0 \ \text{ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$**.** Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24. \quad \text{Συνεπώς, } (-1)^2\Delta_2 > 0 \ \text{ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$. Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24.$$ Συνεπώς, $(-1)^2\Delta_2 > 0$ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.

Πρόβλημα 4

Στο πρόβλημα αυτό αποδεικνύουμε ότι το κρίσιμο σημείο που βρήκαμε στο προβλημα (9.12) είναι σημείο μεγίστου. (Αυτό βέβαια είναι διαισθητικά προφανές.) Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$C = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2(y+z) & 2(z+x) & 2(x+y) \\ 2(y+z) & 0 & z-2\lambda & y-2\lambda \\ 2(x+y) & z-2\lambda & 0 & x-2\lambda \\ 2(y+x) & y-2\lambda & x-2\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας την πλαισιωμένη Εσσιανή στο κρίσιμο σημείο

$$(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = \left(\frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{4\sqrt{6}}\right)$$

παίρνουμε

$$C\left(\frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{4\sqrt{6}}\right) = \frac{S^{1/2}}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αγνωόντας τον θετικό παράγοντα $\frac{S^{1/2}}{2\sqrt{6}}$ ο οποίος δεν επηρρεάζει το πρόσημο των οριζουσών εξετάζουμε τις

$$|C_2| := \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad |C_3| := \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Βλέπουμε εύκολα ότι $|C_2| = 128$. Για τον υπολογισμό της $|C_3|$ προσθέτουμε τις τρείς τελευταίες γραμμές, πολλαπλασιάζουμε το άθροισμα με 4, και αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή. Οι πράξεις αυτές δεν αλλάζουν την τιμή της ορίζουσας, οπότε έχουμε

$$|C_3| := \begin{vmatrix} -96 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -96 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -192.$$

Συνεπώς, βάσει της ορολογίας, με $m = 1$, $n = 3$, $(-1)^{m+1}\det(C_{m+1}) = (-1)^2(128) > 0$ και $(-1)^3\det(C_{m+2}) = (-1)(-192) > 0$.

Πρόβλημα 5

Να βρείτε και να κατατάξετε τα ακρότατα της $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - 3 = 0$. Η Λαγκρανζιανή είναι $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) := f(x_1, x_2, x_3) - \lambda\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - 3)$ και τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \;=\; 2x_1 - \lambda(x_2 + x_3) \;=\; 0 \tag{9.28}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \;=\; 2x_2 - \lambda(x_3 + x_1) \;=\; 0 \tag{9.29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \;=\; 2x_3 - \lambda(x_2 + x_3) \;=\; 0 \tag{9.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \;=\; 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \;=\; 3 \tag{9.31}$$

Οι τρεις πρώτες εξισώσεις του συστήματος γράφοναι στην μορφή

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2 & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.32}$$

Αν η ορίζουσα του πίνακα αυτού είναι διάφορη του μηδενός η μοναδική λύση του συστήματος (9.32) είναι $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ η οποία όμως δεν ικανοποιεί την (9.31) και επομένως απορρίπτεται.

Αν η ορίζουσα του πίνακα είναι 0 τότε μη μηδενικές τιμές για τα x_1, x_2, x_3 είναι δυνατές. Στην περίπτωση αυτή

$$\Delta \;=\; 8 - 2\lambda^3 - 6\lambda^2 \;=\; 0.$$

Η τιμή $\lambda = 1$ είναι προφανώς ρίζα της παραπάνω τριτοβάθμιας εξίσωσης και συνεπώς διαιρώντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης με τον παράγοντα $(\lambda - 1)$ έχουμε

$$\Delta \;=\; -2(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \;=\; -2(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \;=\; 0.$$

Η ρίζα $\lambda = 1$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (9.31) γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις αυτού του συστήματος είναι ο (μονοδιάστατος) υπόχωρος $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$. Από την εξίσωση (9.31) θα πρέπει να έχουμε $3x_1^2 = 3$. Επομένως έχουμε τα κρίσιμα σημεία $(x_1, x_2, x_3, \lambda) \in \{(1, 1, 1, 1),\ (-1, -1, -1, 1)\}$.

Η ρίζα $\lambda = -2$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι ο (δισδιάστατος) υπόχωρος $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1+x_2+x_3 = 0\}$. Θέτοντας $x_3 = -(x_1 + x_2)$ στην εξίσωση (9.31) θα πρέπει να έχουμε $x_1x_2 - x_2(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)x_1 = 3$ ή, ισοδύναμα, ορίζοντας την συνάρτηση ϕ ως

$$\phi(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \tag{9.33}$$

θα πρέπει

$$\phi(x_1, x_2) := -3. \tag{9.34}$$

Η συνάρτηση ϕ έχει κρίσιμο σημείο $(0, 0)$ διότι αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= 2x_1 + x_2 = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= 2x_2 + x_1 = 0. \end{aligned}$$

Επίσης ο Εσσιανός πίνακας της ϕ είναι

$$\nabla^2\phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και είναι θετικά ορισμένος για κάθε (x_1, x_2) με βάση το κριτήριο των ελασσόνων οριζουσών διότι $2 > 0$ και $2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$. Επομένως το κρίσιμο σημείο είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Επειδή ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος στον $\mathbb{R}^2$ η ϕ είναι κυρτή συνάρτηση και επομένως το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο *ολικού ελαχίστου* και $\phi(x_1, x_2) \geq \phi(0, 0) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η εξίσωση (9.34) δεν έχει λύση και επομένως δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία της f για $\lambda = -2$.

Η πλαισιωμένη Εσσιανή της f είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & x_2 + x_3 & x_3 + x_1 & x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 & 2 & -\lambda & -\lambda \\ x_3 + x_1 & -\lambda & 2 & -\lambda \\ x_1 + x_2 & -\lambda & -\lambda & 2 \end{bmatrix}. \tag{9.35}$$

Για το κρίσιμο σημείο $(1, 1, 1, 1)$ η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c|} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ \cline{1-3} 2 & -1 & \multicolumn{1}{c}{-1} & 2 \\ \hline \end{array}\right]. \tag{9.36}$$

Άρα $\det(C_2) = -24 < 0$. Για να υπολογίσουμε την $\det(C_3)$ αφαιρούμε την δεύτερη γραμμή από την τρίτη και την τέταρτη και παίρνουμε

$$\det(C_3) \; = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \; = \; -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \; = \; -2\,54 \; = \; -108 \; < \; 0.$$

Αφού $(-1)^k C_2 > 0$, $(-1)^k C_3 > 0$, το σημείο $(1, 1, 1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το σημείο $(-1, -1, -1, 1)$ είναι επίσης σημείο τοπικού ελαχίστου.