Προβλήματα Μεγιστοποίησης με Ανισοτικούς Περιορισμούς.

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: συνεχώς παραγωγίσιμες.
$i: 1, 2, \dots, m$.

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m \}$$

Εφικτή περιοχή

<u>Πρόβλημα Μεγιστοποίησης:</u>

$$(\Pi) \quad \begin{array}{|c|} \max f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{array}$$

Λαγκρανζιανή:

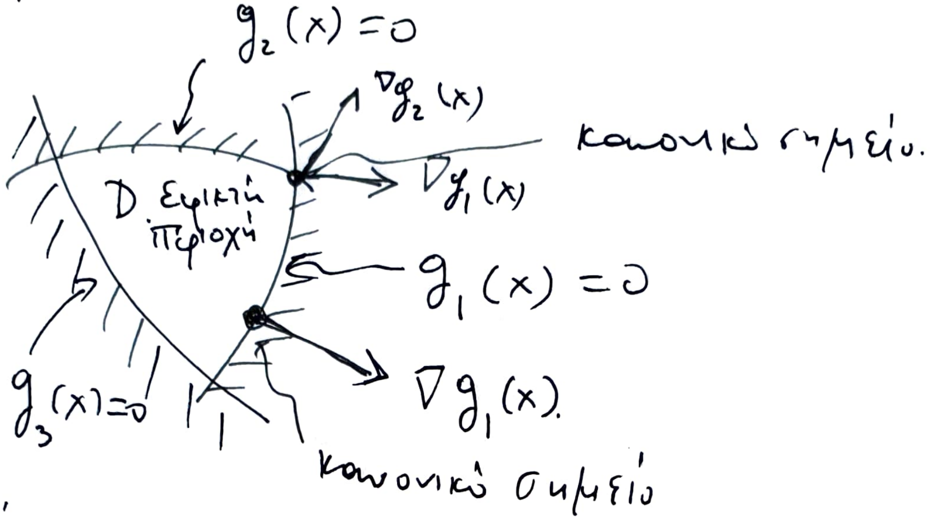
$$L(x, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x)$$

$A(x)$: σύνολο των ενεργών περιορισμών στο σημείο $x \in D$

$$A(x) = \{ i \in \{1, 2, \dots, m\} : g_i(x) = 0, \quad x \in D \}.$$

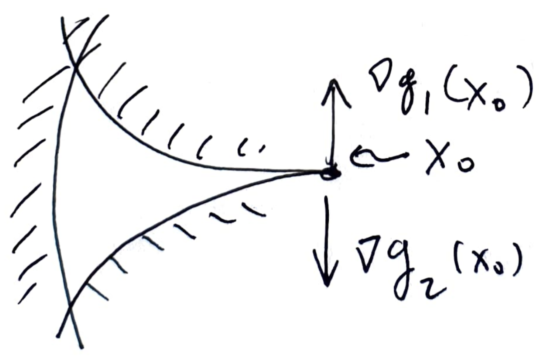
<u>Ορισμός</u> Το σημείο $x \in D$ ονομάζεται κανονικό αν $A(x) = \emptyset$ ή αν τα διανύσματα $\nabla g_i(x)$, $i \in A(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα



Όλα τα σημεία της D είναι κανονικά.

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει μια περίπτωση με μη κανονικά σημεία



Το σημείο x_0 είναι μη κανονικό γιατί τα $\nabla g_1(x_0)$, $\nabla g_2(x_0)$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

<u>Θεώρημα</u>. Αναγκαίες Συνθήκες Πρώτης Τάξης (Kuhn - Tucker).

Έστω $x^* \in D$, x^* κανονικό σημείο και σημείο τοπικού μεγίστου της f. (Πρόβλημα Π)

Τότε $\exists\ \mu^* \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε

(i) $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \mu^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n$

(ii) $\mu_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$

(iii) $\mu_i^* g_i^*(x^*) = 0$ για $i = 1, \dots, m$.

Πρόβλημα 1 Να ευρεθούν τα σημεία που ικανοποιούν τις Αναγκαίες Συνθήκες Kuhn-Tucker για τοπικά μέγιστα στο πρόβλημα.

$$\max f(x,y) = -2x^2 - y^2$$

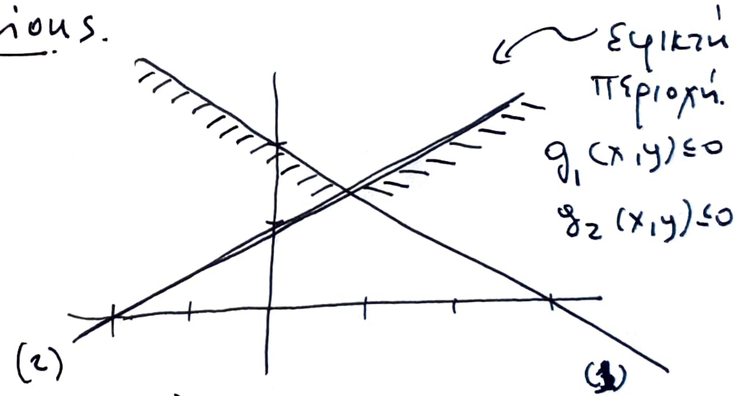
υπό τους περιορισμούς $g_1(x,y) = -2x - 3y + 6 \le 0$ (1)

$g_2(x,y) = x - 2y + 2 \le 0$ (2)

$$L = -2x^2 - y^2 - \mu_1(-2x-3y+6) - \mu_2(x-2y+2)$$

Kuhn-Tucker Conditions.

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = -4x + 2\mu_1 - \mu_2 = 0$



(4) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + 3\mu_1 + 2\mu_2 = 0.$

(5) $\mu_1 \cdot (-2x-3y+6) = 0$, $\mu_2 \cdot (x-2y+2) = 0$

(6) $\mu_1 \ge 0$, $\mu_2 \ge 0$

+ (1), (2).

Σημεία που ικανοποιούν τις (1) ως (6)

Λόγω της (5) διακρίνουμε 4 περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $\mu_1 = \mu_2 = 0$. (αυτό σημαίνει ότι $g_1(x) < 0$, $g_2(x) < 0$ δηλαδή και οι δύο περιορισμοί είναι ανενεργοί.)

Από τις (3), (4) έχουμε

τότε $x = y = 0$. Τότε όμως $g_1(x,y) = +6 > 0$

άρα οι (1), (2) δεν ισχύουν $g_2(x,y) = 2 > 0$

και το (0,0) δεν ανήκει στην εφικτή περιοχή.

Περίπτωση 2. $\mu_1 = 0, \quad g_2(x) = 0 \Rightarrow x = 2y - 2.$

Από αυτή την σχέση και τις (3), (4):

$$\left.\begin{array}{l} -4x - \mu_2 = 0 \\ -x - 2 + 2\mu_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{2}{9} \\ y = \frac{8}{9} \end{array}$$

$$\mu_2 = -4 \cdot x = -4 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{8}{9} > 0.$$

Άρα ικανοποιείται η (6).

Όμως δεν ικανοποιείται η (1).

$$-2\left(-\frac{2}{9}\right) - 3\left(\frac{8}{9}\right) + 6 = \frac{4-24}{9} + 6 = -\frac{20}{9} + 6 > 0$$

Άρα το $\left(-\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)$ δεν ανήκει στην εφικτή περιοχή.

Περίπτωση 3. $\mu_2 = 0, \quad g_1(x) = -2x - 3y + 6 = 0$

Άρα $2x = 6 - 3y$ Επομένως από τις (3), (4)

$$\left.\begin{array}{l} -4x + 2\mu_1 = 0 \\ -2y + 3\mu_1 = 0 \\ 2x = 6 - 3y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{18}{11} \\ x = \frac{6}{11} \\ \mu_1 = \frac{12}{11} > 0 \end{array}$$

$$g_2\left(\frac{6}{11}, \frac{18}{11}\right) = \frac{6}{11} - 2 \cdot \frac{18}{11} + 2 = \frac{6 - 36 + 22}{11} = -\frac{8}{11} < 0.$$

άρα το σημείο $\boxed{x^* = \frac{6}{11}, \ y^* = \frac{18}{11}, \ \mu_1^* = \frac{12}{11}, \ \mu_2^* = 0}$

ικανοποιεί τις συνθήκες Κ-Τ.

Περίπτωση 4.

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y)=0 \\ g_2(x,y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=6 \\ -2x+4y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=\frac{6}{7} \\ y=\frac{10}{7} \end{array}}$$

Από τις (3), (4)

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu_1-\mu_2=\frac{24}{7} \\ 3\mu_1+2\mu_2=\frac{20}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1=\frac{68}{7}>0 \\ \mu_2=-\frac{32}{7}<0 \end{array}$$

Δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες.

Άρα το σημείο $x^*=\frac{6}{11}$, $y^*=\frac{18}{11}$, $\mu_1^*=\frac{12}{11}$, $\mu_2^*=0$ είναι το μοναδικό που ικανοποιεί τις συνθήκες KT πρώτης τάξης.

Πρόβλημα 2 Να ευρεθούν τα σημεία που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες K-T πρώτης τάξης στο πρόβλημα

$$\max f(x,y) = -(x^2+1)^2 - y^2$$

υπό τον περιορισμό $g(x,y) = -x-y+5 \leq 0$. (1)

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = -(x^2+1)^2 - y^2 - \mu(-x-y+5)$$

Οι συνθήκες K-T είναι.

(2) $\frac{\partial L}{\partial x} = -4x(x^2+1) + \mu = 0$

(3) $\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \mu = 0$

(4) $\mu(-x-y+5) = 0$

(5) $\mu \geq 0$.

Βάσει της (4) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $\mu = 0$. $(2) \Rightarrow x = 0$
$(3) \Rightarrow y = 0$.

Αλλά τότε δεν ικανοποιείται ο περιορισμός (1).
$-0-0+5 \leq 0$ ∴ δεν ισχύει

Περίπτωση 2. $x + y = 5. \Rightarrow y = 5 - x$.
$-2y + \mu = 0. \Rightarrow \mu = 10 - 2x$.

Από την (2) $\Rightarrow -4x(x^2+1) + 10 - 2x = 0$

$4x^3 + 6x - 10 = 0$ ή $\boxed{2x^3 + 3x - 5 = 0}$ $x=1$ είναι προφανώς μία ρίζα.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+3x-5 & x-1 \\
\underline{2x^3-2x^2} & 2x^2+2x+5 \\
2x^2+3x-5 & \\
\underline{2x^2-2x} & \\
5x-5 & \\
\underline{5x-5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Άρα $2x^3+3x-5=(x-1)(2x^2+2x+5)$

Η διακρίνουσα της $2x^2+2x+5$ είναι $\Delta=4-40=-36<0$ άρα η $2x^2+2x+5$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Η μοναδική λύση είναι

$x=1$

$y=5-x=4$

$\mu=10-2x=18>0.$

Το σημείο $\boxed{x^*=1,\ y^*=4,\ \mu^*=18}$ είναι το μοναδικό που ικανοποιεί τις συνθήκες K-T.