<u>Πρόβλημα 1.</u> Η Χ.Ε. της $x_{n+3}-3x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0$ είναι $\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+1=0$. Η ρίζα $\lambda=1$ είναι προφανής. Διαιρώντας έχουμε

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+1 & \lambda-1 \\ \cline{2-2}
\lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2-2\lambda-1 \\ \cline{1-1}
\quad -2\lambda^2+\lambda+1 & \\
\quad -2\lambda^2+2\lambda & \\ \cline{1-1}
\qquad -\lambda+1 & \\
\qquad -\lambda+1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Συνεπώς

$$\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+1=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-1)$$

Οι ρίζες της $\lambda^2-2\lambda-1=0$ είναι

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

Επομένως οι ρίζες είναι $1,\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$. Η γενική λύση είναι

α) $$x_n=c_1+c_2(1-\sqrt{2})^n+c_3(1+\sqrt{2})^n \quad n=0,1,2,\dots$$

Οι σταθερές c_1, c_2, c_3 επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

$$\left.\begin{array}{l}
c_1+c_2+c_3=1 \\
c_1+c_2(1-\sqrt{2})+c_3(1+\sqrt{2})=0 \\
c_1+c_2(1-\sqrt{2})^2+c_3(1+\sqrt{2})^2=0
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
c_1=1/2 \\
c_2=\dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \\
c_3=\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}
\end{array}$$

β) Προκειμένου η $\{x_n\}$ να είναι φραγμένη θα πρέπει οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε ρίζες με μέτρο >1 να είναι 0. Στην περίπτωσή μας $|\lambda_3|=|1+\sqrt{2}|>1$ άρα θα πρέπει $c_3=0$

Αφού $c_3 = 0$ θα έχουμε

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad (1)$$

$$c_1 + (1-\sqrt{2})\cdot c_2 = x_1 . \qquad (2)$$

$$c_1 + (1-\sqrt{2})^2 c_2 = x_2 \qquad (3)$$

ή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Για δεδομένα x_1, x_2, το παραπάνω σύστημα έχει λύση μόνο αν το $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Αυτό περιγράφουν και οι εξισώσεις (1), (2), (3).

(2) − (1) δίνει: $-\sqrt{2}\, c_2 = x_1 - 1$

(3) − (2) δίνει $(2-\sqrt{2})\, c_2 = x_2$

$$c_2 = \frac{x_1 - 1}{-\sqrt{2}} = \frac{x_2}{2-\sqrt{2}}.$$

δηλαδή τα x_1, x_2 πρέπει να ικανοποιούν την σχέση $x_1 - 1 = \dfrac{x_2}{1-\sqrt{2}}$.

ή x_1 ελεύθερο, $x_2 = (\sqrt{2}-1)(1-x_1)$.

<u>Πρόβλημα 2.</u> (Χάριν σαφηνείας θα δείξουμε την περίπτωση $n=6$.

$$\Delta_6 := \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\Delta_6 = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}}_{\Delta_5} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Η δεύτερη ορίζουσα στην παραπάνω εξίσωση είναι (αν αναπτύξουμε ως προς την πρώτη στήλη)

$$-2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Άρα $\Delta_6 = 3\Delta_5 - 2\cdot(-2)\Delta_4$

$\Delta_6 = 3\Delta_5 + 4\Delta_4.$

Από ισχύει γενικά: $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} + 4\Delta_n$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$\lambda^2 = 3\lambda + 4.$ $\qquad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$\Delta_n = C_1 \, 4^n + C_2 \, (-1)^n.$

$\Delta_1 = C_1 \cdot 4 + C_2 \cdot (-1) = 3$

$\Delta_2 = C_1 \cdot 16 + C_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9+4 = 13$

$20 C_1 = 16 . \quad C_1 = \frac{4}{5}, \quad C_2 = \frac{16}{5} - 3 = \frac{1}{5}.$

$\Delta_n = \frac{4}{5} \cdot 4^n + (-1)^n \frac{1}{5} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta_n = \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{5}}$$

έτσι έχουμε $\Delta_1 = \frac{16-1}{5} = 3$

$\Delta_2 = \frac{64+1}{5} = 13$

$\Delta_3 = \frac{256-1}{5} = 51$ κλπ..

Πρόβλημα 3. $x_{n+1} = \frac{x_n-1}{x_n+1}, \quad x_0 = 2.$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ ή $\lambda^2=-1$

$$\boxed{\lambda = \pm i}$$

$$x_{n+1} - i = \frac{x_n-1}{x_n+1} - \left(\frac{i-1}{i+1}\right)$$

$$x_{n+1}-i = \frac{2(x_n-i)}{(x_n+1)(i+1)} \qquad (1)$$

$$x_{n+1}+i = \frac{x_n-1}{x_n+1} - \frac{-i-1}{-i+1} = \frac{2(x_n+i)}{(x_n+1)(1-i)} \qquad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) παίρνουμε

$$\frac{x_{n+1}-i}{x_{n+1}+i} = \frac{2(x_n-i)}{(x_n+1)(i+1)}\cdot\frac{(x_n+1)(1-i)}{2(x_n+i)}$$

$$\frac{x_{n+1}-i}{x_{n+1}+i} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{x_n-i}{x_n+i} \qquad n=0,1,2,\dots$$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

$\frac{1-i}{1+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$$\frac{x_n-i}{x_n+i} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n \cdot \frac{x_0-i}{x_0+i}$$

$\cancel{\frac{x_n-i}{x_n+i} = (-i)^n \cdot 2}$

$$\cancel{\boxed{x_n = i\,\frac{1+2(-i)^n}{1-2(-i)^n}}}$$

$$\frac{x_n - i}{x_n + i} = \frac{2-i}{2+i}(-i)^n \Rightarrow$$

$$x_n = i \, \frac{1 + \frac{2-i}{2+i}(-i)^n}{1 - \frac{2-i}{2+i}(-i)^n} \Rightarrow$$

$$x_n = i \, \frac{2+i + (2-i)(-i)^n}{2+i - (2-i)(-i)^n}$$

η $(-i)^n$ είναι περιοδική με περίοδο 4.

$\boxed{n=0}$, $x_0 = i \, \frac{2+i + (2-i)\cdot 1}{2+i-(2-i)} = i \, \frac{4}{2i} = 2$

$\boxed{n=1}$, $x_1 = i \, \frac{2+i+(2-i)\cdot(-i)}{2+i-(2-i)(-i)} = i \, \frac{1-i}{3i+3} =$

$= \frac{i}{3}\cdot(-i) = \frac{1}{3}$

$\boxed{n=2}$, $x_2 = i \cdot \frac{2+i+(2-i)(-1)}{2+i-(2-i)(-1)} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{n=3}$, $x_3 = i \, \frac{2+i+(2-i)\cdot i}{2+i-(2-i)\cdot i} = \frac{3+3i}{-i+1} i$

$= 3 \, \frac{1+i}{1-i} \cdot i = 3 \, \frac{i-1}{1-i} = -3$

$\boxed{n=4}$, $x_4 = x_0$.

Οι τιμές της x_n είναι

n	0	1	2	3	4	5	
x_n	2	$1/3$	$-\frac{1}{2}$	-3	2	$1/3$	...

<u>Πρόβλημα 4.</u> Οι ιδιοτιμές του P δίνονται από την

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ -1/3 & \lambda-1/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{7}{12}\lambda - \frac{1}{12} = 0$$

$$12\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 1 = 0.$$

$\lambda = 1$ πρέπει να είναι ρίζα. (αλυσίδα Markov)

$$\begin{array}{l|l} 12\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \hline 12\lambda^3 - 12\lambda^2 & 12\lambda^2 + 8\lambda + 1 \\ \hline 8\lambda^2 - 7\lambda - 1 & \\ 8\lambda^2 - 8\lambda & \\ \hline \lambda - 1 & \\ \lambda - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$12\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 1 = (\lambda-1)(12\lambda^2 + 8\lambda + 1)$$

Οι ρίζες της $12\lambda^2 + 8\lambda + 1$ είναι

$$\frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{24} = \begin{cases} -1/2 \\ -1/6 \end{cases}$$

Ιδιοδιανύσματα: $1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $-\frac{1}{6} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^n = 1^n \cdot \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(-\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(-\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Sylvester.

$$P^n = 1^n \cdot \frac{1}{(1-(-\frac{1}{2}))(1-(-\frac{1}{6}))} \cdot (P+\tfrac{1}{2}I)(P+\tfrac{1}{6}I)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{6}))} \cdot (P-I)(P+\tfrac{1}{6}I)$$

$$+ \left(-\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{(-\frac{1}{6}-1)(-\frac{1}{6}-(-\frac{1}{2}))} \cdot (P-I)(P+\tfrac{1}{2}I)$$

$$\left(P+\tfrac{1}{2}I\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 5/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (P-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(P+\tfrac{1}{6}I\right) = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{2})}\frac{1}{(1+\frac{1}{6})}\left(P+\tfrac{1}{2}I\right)\left(P+\tfrac{1}{6}I\right) = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}\cdot(P-I)\left(P+\frac{1}{6}\right)=\begin{bmatrix}1/8 & 0 & -1/8\\ 0 & 0 & 0\\ -1/8 & 0 & 1/8\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{6}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)}(P-I)\left(P+\frac{1}{2}I\right)=\begin{bmatrix}\frac{3}{14} & -\frac{6}{14} & \frac{3}{14}\\ -2/7 & 4/7 & -2/7\\ 3/14 & -6/14 & 3/14\end{bmatrix}$$

Συνεπώς $P^n=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\begin{bmatrix}1/8 & 0 & -1/8\\ 0 & 0 & 0\\ -1/8 & 0 & 1/8\end{bmatrix}$

$$+\left(-\frac{1}{6}\right)^n\begin{bmatrix}\frac{3}{14} & -\frac{6}{14} & \frac{3}{14}\\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{3}{14} & -\frac{6}{14} & \frac{3}{14}\end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 5 (α).

$$y' + \frac{x}{x+1} y = x+1. \qquad (1)$$

(Γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης)

Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\exp\left(\int \frac{x}{x+1} dx \right)$

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln(x+1).$$

$$e^{x - \ln(x+1)} = \frac{e^x}{1+x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με αυτό τον παράγοντα την (1) έχουμε

$$\frac{e^x}{1+x} y' + \frac{e^x \cdot x}{(1+x)^2} y = e^x \Rightarrow$$

$$\left(y \frac{e^x}{1+x} \right)' = e^x \Rightarrow y \frac{e^x}{1+x} = e^x + c.$$

$$y(x) = (1+x) + (1+x) e^{-x} \cdot c$$

$$y(0) = 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1.$$

Η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι: $\boxed{y(x) = (1+x)(1+e^{-x})}$

β). $y'' + x y' = \ln x.$ Θέτουμε $u = y'$

$u' + x u = \ln x$ γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης.

ολοκληρωτικός παράγων. $\exp(\int x\,dx) = \exp(\frac{x^2}{2})$

$e^{x^2/2} u' + e^{x^2/2} x\, u = e^{x^2/2} \ln x$

$(u e^{x^2/2})' = e^{x^2/2} \ln x.$

$u(x) e^{x^2/2} - u(1) e^{1/2} = \int_1^x e^{t^2/2} \ln t \, dt.$

$u(1) = y'(1) = 1.$

$u(x) = e^{1/2} \cdot e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \int_1^x e^{t^2/2} \ln t \, dt.$

$\underset{\overset{\|}{1}}{y(x) - y(0)} = e^{1/2} \int_1^x e^{-s^2/2} ds + \int_1^x e^{-s^2/2} \int_1^s e^{t^2/2} \ln(t)\, dt\, ds$

Δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή.

γ). $y'' - 4y' - 4y = 0.$ Χ.Ε. $\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0.$

$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$

$y(x) = c_1 e^{x\, 2(1+\sqrt{2})} + c_2 e^{x\, 2(1-\sqrt{2})}.$

$y'(x) = c_1 2(1+\sqrt{2}) e^{x\, 2(1+\sqrt{2})} + c_2 2(1-\sqrt{2}) e^{x\, 2(1-\sqrt{2})}$

$y(0) = c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = 2c_1(1+\sqrt{2}) + 2c_2(1-\sqrt{2}) = 2.$

$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1(1+\sqrt{2}) + c_2(1-\sqrt{2}) = 1 \end{array}\right\}$ $(c_1 - c_2)\sqrt{2} = 0$ $\Rightarrow c_1 = c_2.$

$\boxed{c_1 = 1/2, \ c_2 = 1/2}.$

Πρόβλημα 6. $y'' - y' - 2y = 0$

Η Χ.Ε. είναι $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ή $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$$\lambda = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

Προκειμένου να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς $y'' - y' - 2y = x$

δοκιμάζουμε την $y_s(x) = Ax + B$.

$$y_s'(x) = A, \quad y_s''(x) = 0.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $0 - A - 2(Ax+B) = x$

$$-2Ax - (A+2B) = x.$$

Άρα $-2A = 1$

$-(A+2B) = 0$

$A = -\frac{1}{2}$

$B = -\frac{A}{2} = \frac{1}{4}$

$$y_s(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Οι αρχικές συνθήκες χρησιμοποιούνται για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2.

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \tfrac{1}{4} = 1 \\ y'(0) &= -c_1 + 2c_2 - \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1/3 \\ c_2 &= 5/12. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 7.

a) $y = Ce^x$. Η οικογένεια καμπυλών περιγράφεται από την Δ.Ε. $y' = Ce^x$

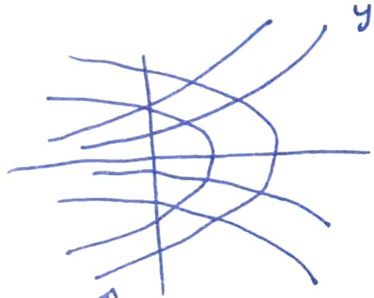
$$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \boxed{y' = y}$$

Οι ορθογώνιες τροχιές είναι από την ΔΕ $y' = -\frac{1}{y}$.

ή $yy' = -1$ ή $y\,dy = -dx$.

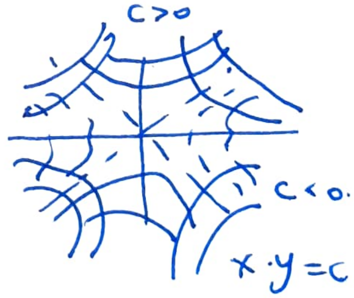
$$\int y\,dy = -\int dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -x + C.$$

$$\frac{1}{2}y^2 + x = C$$



β) $y^2 - x^2 = C$

οικογένεια υπερβολών



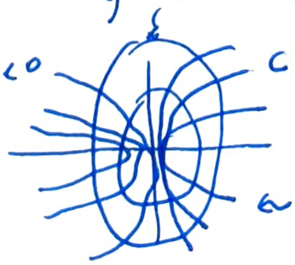
Δ.Ε. $2yy' - 2x = 0$

$y' = \frac{x}{y}$. Ορθογώνιες τροχιές $y' = -\frac{y}{x}$.

ή $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ $\ln y + \ln x = C$

$xy = C$.

ορθογώνια οικογένεια υπερβολών



γ) $y^2 = Cx$

$2yy' = C$

$$\frac{2yy'}{y^2} = \frac{C}{Cx} \Rightarrow y' = \frac{y}{2x}$$

ορθογώνιες τροχιές $y' = -\frac{2x}{y} \Rightarrow yy' = -2x$

$\frac{1}{2}y\,dy = -x\,dx$ $y^2 = -2x^2 + K$

ελλείψεις $\boxed{y^2 + 2x^2 = K}$ $K > 0$

Πρόβλημα 8. Εξισώσεις της μορφής $M\,dx + N\,dy = 0$.

α) $y\,dx + \left(x + \frac{2}{y}\right)dy = 0 \quad (*)$

Είναι ακριβής διότι $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{2}{y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$

Η λύση της (*) θα είναι της μορφής

$\phi(x,y) = 0$. $M = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $N = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$y = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = \int y\,dx + C(y)$$

$$\phi = xy + C(y)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + C'(y) = x + \frac{2}{y}$. Άρα $c'(y) = \frac{2}{y}$

$$C(y) = \int \frac{2}{y}\,dy = 2\ln y + K.$$

Συνεπώς $\phi(x,y) = xy + 2\ln y + K = 0$

είναι η λύση της α)

β) $(e^y + \cos x \cos y)\,dx + (x e^y - \sin x \sin y)\,dy = 0$.

Η εξίσωση αυτή είναι επίσης ακριβής.

Η λύση θα είναι $\phi(x,y) = 0$ με

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^y + \cos x \cos y \Rightarrow$$

$$\phi(x,y) = x e^y + \cos y \int \cos x\,dx + C(y)$$

$$= x e^y + \sin x \cos y + C(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x e^y - \sin x \sin y + C'(y) = x e^y - \sin x \sin y.$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = x e^y + \sin x \cos y + C}$$

γ) $2xy\,dx + (y^2-3x^2)dy = 0.$

Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής
$M dx + N dy = 0$. Δεν είναι ακριβής διότι
$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με ένα ολοκληρωτικό παράγοντα μ:
$\mu M dx + \mu N dy$. Θέλουμε να ισχύει
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \quad (*)$$

Αν υποθέσουμε ότι η μ εξαρτάται μόνο από το x και όχι από το y. Θα πρέπει να ισχύει
$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu' N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}}_{\text{Θα πρέπει η παράσταση αυτή να μην εξαρτάται από το } y}.$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x-6x}{y^2-3x^2}.$$ Η παράσταση αυτή δεν είναι ανεξάρτητη από το y.

Άρα δεν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu(x)$.

Δοκιμάζουμε τώρα ολοκληρωτικό παράγοντα που να εξαρτάται μόνο από το y.
Η $(*)$ δίνει $\mu' M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-6x-2x}{2xy} = -\frac{4}{y}$$ που πράγματι εξαρτάται μόνο από το y.

Άρα $\frac{d\mu}{\mu} = -4\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln\mu + \ln y^4 = c$

$$\mu = \frac{c}{y^4}$$

Συνεπώς έχουμε (με τον παράγοντα $\mu(y) = y^{-4}$ αφού η σταθερά C δεν χρειάζεται εδώ).

$$y^{-4} \cdot 2xy\,dx + y^{-4}(y^2 - 3x^2)\,dy = 0$$

$$2xy^{-3}\,dx + y^{-2} - 3x^2y^{-4}\,dy = 0$$

Η Δ.Ε. αυτή είναι βεβαίως ακριβής:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^{-3}) = \frac{\partial}{\partial x}(y^{-2} - 3x^2y^{-4}).$$

Αν $\phi(x,y) = 0$ είναι η λύση τότε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^{-3} \Rightarrow \phi = x^2y^{-3} + C(y).$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -3x^2y^{-4} + C'(y) = y^{-2} - 3x^2y^{-4}$$

$$\Rightarrow C'(y) = y^{-2} \Rightarrow C(y) = \int y^{-2}dy =$$

$$= \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + K.$$

$$C(y) = -y^{-1} + K.$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = x^2y^{-3} - y^{-1} + K.}$$ λύση της Δ.Ε.

δ). $(xy - 1)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$

Η $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x - 2x + y}{x^2 - xy} = \frac{y - x}{x(x-y)} = -\frac{1}{x}$$

Εξαρτάται μόνο από το x άρα $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1}{x}$ δίνει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\mu + \ln x = c.$$

$$\mu(x) = \frac{c}{x}.$$

Διαλέγοντας $c=1$ έχουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}(xy-1)\,dx + \frac{1}{x}(x^2-xy)\,dy = 0$$

$$\left(y-\frac{1}{x}\right)dx + (x-y)\,dy = 0$$

Η λύση της ΔΕ αυτής, $\Phi(x,y)=0$, ικανοποιεί την $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y - \frac{1}{x}$. άρα $\Phi(x,y) = yx - \ln x + C(y)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + C'(y) = x - y \quad \text{άρα } C'(y) = -y$$

$$\Rightarrow C(y) = -\frac{y^2}{2} + K.$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = yx - \ln x - \frac{y^2}{2} + K = 0}$$

Πρόβλημα 9

a). $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. Αυτή είναι ομογενής ΔΕ.

$v := y/x \qquad y = xv.$

$y' = v + xv'$

$$v + xv' = \frac{1+v}{1-v} \qquad xv' = \frac{1+v}{1-v} - v$$

$$= \frac{1+v-v+v^2}{1-v}$$

$$dv \cdot \frac{1-v}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{1+v^2} - \int \frac{v\,dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\arctan v - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+v^2)}{1+v^2} = \ln x \qquad \left(\text{assume } x>0\right)$$

$$\arctan v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln x. + C$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln x + C$$

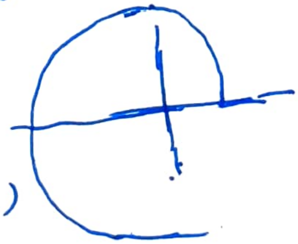
$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\ln x^2 = \ln x. + C$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\sqrt{x^2+y^2}. + C.$$

Η λύση αυτή γίνεται πιο κατανοητή σε πολικές συντεταγμένες $\sqrt{x^2+y^2} = r$, $\frac{y}{x} = \tan\theta$.

$r(\theta) = \cancel{e^{\theta}} \cdot r_0 e^{\theta}.$

(λογαριθμική σπείρα)



β) $y' = \frac{1}{3x} y + \frac{1}{3} x y^{-1}$

Αυτή είναι εξίσωση Bernoulli:

$$y' = P(x) y + Q(x) \cdot y^n$$

με $n = -1$

Θα χρησιμοποιήσουμε επομένως τον μετασχηματισμό

$$\boxed{z = y^{1-n} = y^2} \quad (n = -1)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y y' \Rightarrow y' = \frac{z'}{2y}$$

$$\frac{z'}{2y} = \frac{1}{3x} y + \frac{1}{3} x y^{-1} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{2}{3x} y^2 + \frac{2}{3} x \Rightarrow \boxed{z' - \frac{2}{3x} z = \frac{2}{3} x}$$

Γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης.

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\exp\left(-\int \frac{2}{3} \frac{1}{x} dx\right) = \exp\left(-\frac{2}{3} \ln x\right) = \exp\left(\ln x^{-2/3}\right) = x^{-2/3}$$

$$x^{-2/3} z' - \frac{2}{3} x^{-5/3} z = \frac{2}{3} x^{1/3}$$

$$\left(x^{-2/3} z\right)' = \frac{2}{3} x^{1/3}$$

$$z x^{-2/3} = \int \frac{2}{3} x^{1/3} dx + C = \frac{2}{3} \frac{1}{1/3 + 1} x^{4/3} + C$$

$$z x^{-2/3} = \frac{2}{3} \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} + C \qquad z = \frac{1}{2} x^2 + C x^{2/3}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C x^{2/3}}$$ ← Η λύση της ΔΕ

Πρόβλημα 10. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι (ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή)

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_3 & a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}$$

$$-(-1)\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_4 & a_3 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_3 + a_4 .$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του $\chi(\lambda)=0$.

Έστω λ_i μια ρίζα του $\chi(\lambda)$. Το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα που αντιστοιχεί στην λ_i είναι.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} s \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Διαλέγουμε $s=1$

(1) $u = \lambda_i s$

(2) $v = \lambda_i u$

(3) $w = \lambda_i v$

(4) $-a_4 s - a_3 u - a_2 v - a_1 w = \lambda_i w.$

Από τις (1), (2), (3) έχουμε

$$\lambda_i \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \end{bmatrix}$$

Η (4) ικανοποιείται διότι

$$\lambda_i^4 = -a_4 - a_3 \lambda_i - a_2 \lambda_i^2 - a_1 \lambda_i^3$$

ισχύει αφού η λ_i είναι ιδιοτιμή.

Για να υπάρχουν 4 γραμμικά ιδιοδιανύσματα θα πρέπει το $\chi(\lambda)$ να έχει 4 διαφορετικές ρίζες.