Σημειώσεις Μαθηματικών Μεθόδων

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

1 Μαρτίου 2023

Κεφάλαιο 1

Το Μιγαδικό Εκθετικό

Είναι γνωστό ότι η εκθετική συνάρτηση e^x έχει το ανάπτυγμα Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots . \tag{1.1}$$

Επίσης, οι τριγωνομετρικές συναρτήσης έχουν αναπτύγματα Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots , \tag{1.2}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots . \tag{1.3}$$

Οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν $\forall x \in \mathbb{R}$. Η άπειρη σειρά (1.1) μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς αριθμούς ως εξής: Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ *ορίζουμε*

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots . \tag{1.4}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Πράγματι

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{z_1}e^{z_2}. \end{aligned}$$

Η σειρά (1.4) μας επιτρέπει να δώσουμε νόημα και στην ποσότητα e^{ix} όπου $x \in \mathbb{R}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$i = i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots , \qquad -1 = i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots , \qquad -i = i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots ,$$
$$1 = i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots$$

έχουμε

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^8x^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε την θεμελιώδη σχέση

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x \tag{1.5}$$

που ονομάζεται τύπος του Euler. Θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Παρόμοια βλέπουμε για παράδειγμα ότι $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Παρατηρείστε από τον τύπο του Euler ότι ο e^{ix} είναι (για $x \in \mathbb{R}$) πάντα μιγαδικός αριθμός μοναδιαίου μέτρου εφ΄ όσον

$$|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Επίσης, για $k \in \mathbb{Z}$, από τον τύπο του Euler βλέπουμε ότι $e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix}e^{2k\pi i} = e^{ix}(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^{ix}$.

Πολική Μορφή των Μιγαδικών Αριθμών. Εστω $z = a + ib$ ένας μιγαδικός αριθμός ($a, b \in \mathbb{R}$). Το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ και επομένως

$$z = |z|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|e^{i\theta}. \tag{1.6}$$

θ είναι η μοναδική γωνία στο διάστημα $[0, 2\pi)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Αν $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, $r_i \geq 0$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2$, τότε

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

n-οστές Ρίζες της Μονάδας. Η εξίσωση $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, έχει n ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$:

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Για παράδειγμα, όταν $n = 3$, οι ρίζες είναι

$$e^0 = 1, \qquad e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Για $n = 4$ οι ρίζες είναι

$$e^0 = 1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i.$$

Τύπος του de Moivre. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in \mathbb{R}$. Από τον τύπο του Euler έχουμε

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

Για παράδειγμα από τον τύπο του de Moivre παίρνουμε

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Πίνακες και Ορίζουσες

2.1 Πίνακες ως Αναπαραστάσεις Γραμμικών μετασχηματισμών ως προς Συγκεκριμένες Βάσεις

Έστω U, V δύο γραμμικοί χώροι με βαθμωτά μεγέθη στο $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f : U \to V$ ονομάζεται γραμμική αν για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{w}).$$

Έστω ότι η διάσταση του U είναι n και η διάσταση του V είναι m. Έστω επίσης ότι $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ είναι μια βάση του U και $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ μια βάση του V. Έστω $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j$ και $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Τότε, λόγω της γραμμικότητας της f,

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j). \tag{2.1}$$

Αφού $f(\mathbf{e}_j) \in V$, ισχύει ότι $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij}\mathbf{f}_i$ για $j = 1, 2, \ldots, n$. Συνεπώς αντικαθιστώντας στην (2.1) έχουμε

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m b_{ij}\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_i \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j. \tag{2.2}$$

Αν η αναπαράσταση του $\mathbf{y}$ ως προς την βάση του V είναι

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i\mathbf{f}_i \tag{2.3}$$

τότε συγκρίνοντας τα δεξιά μέρη της (2.2) και της (2.3) έχουμε

$$\sum_{i=1}^m y_i\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_i \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$y_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j. \tag{2.4}$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των πινάκων μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Αν με $\mathbf{b}_j$ συμβολίσουμε την j–στήλη του ανωτέρω $m \times n$ πίνακα, δηλαδή

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix},$$

τότε η εξίσωση (2.5) γράφεται και ως

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{b}_j.$$

Ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

εκφράζει την αναπαράσταση του γραμμικού μετασχηματισμού $f : U \to V$ ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{e}_j; j = 1, \ldots, n\}$ του V και $\{\mathbf{f}_i; i = 1, \ldots, m\}$ του V.

2.2 Πίνακες Αλλαγής Βάσης

Έστω U ένας γραμμικός χώρος διάστασης n με βαθμωτά μεγέθη στους πραγματικούς αριθμούς και $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ μια βάση του χώρου αυτού. Κάθε $\mathbf{x} \in U$ εκφράζεται τότε με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης: $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$. Τα x_j, $j = 1, \ldots, n$, είναι οι συνιστώσες του $\mathbf{x}$ ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Έστω τώρα $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ μια άλλη βαση του U και έστω

$$\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathbf{e}_k, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

η αναπαράσταση του $\mathbf{a}_j$ ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Εφόσον τα $\{\mathbf{a}_j\}$ αποτελούν βάση του U μπορούμε αντίστροφα να εκφράσουμε με μοναδικό τρόπο τα στοιχεία της αρχικής βάσης, $\{\mathbf{e}_j\}$, ως προς την νέα βάση και συνεπώς υπάρχουν $\{c_{ji}\}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{e}_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{ji} \mathbf{a}_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην (2.7) παίρνουμε

$$\mathbf{e}_i = \textstyle\sum_{j=1}^n c_{ji} \sum_{k=1}^n a_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^n a_{kj}c_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

απ΄ όπου προκύπτει, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\{\mathbf{e}_j\}$, ότι

$$\textstyle\sum_{j=1}^n a_{kj}c_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = i \\ 0 & \text{αν } k \neq i \end{cases}.$$

Επομένως, αν $A = [a_{ij}]$ και $C = [c_{ij}]$, τότε $AB = I$ ή ισοδύναμα

$$C = A^{-1}. \tag{2.8}$$

Έστω $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k\mathbf{e}_k$ και $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \xi_j\mathbf{a}_j$ η αναπαράσταση του $\mathbf{x} \in V$ ως προς τις δύο βάσεις. Χρησιμοποιώντας την (2.6) έχουμε

$$\mathbf{x} = \textstyle\sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^n a_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n x_k\mathbf{e}_k$$

ή, ισοδύναμα,

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^n \xi_j a_{kj} = \sum_{k=1}^n x_k\mathbf{e}_k$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$x_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}\xi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ή

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Ισοδύναμα, αφού $A^{-1} = C$,

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

2.3 Αλλαγή Βάσης σε Γραμμικούς Μετασχηματισμούς

Ας υποθέσουμε τώρα ότι U είναι ένας γραμμικός χώρος διάστασης n με βαθμωτά μεγέθη στον $\mathbb{R}$ και $f : U \to U$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός στον U. Έστω $\{\mathbf{e}_j; j = 1, \ldots, n\}$

μια βάση του U και B ο πίνακας $n \times n$ ο οποίος εκφράζει τον μετασχηματισμό f ως προς αυτή την βάση. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία του πίνακα B είναι οι συντεταγμένες των $f(\mathbf{e}_j)$ ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_j\}$, δηλαδή

$$f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Λέμε ότι ο πίνακας B είναι η αναπαράσταση του γραμμικού μετασχηματισμού f ως προς την βάση $\{\mathbf{e}_j\}$. Με παρόμοιο τρόπο, ο πίνακας B' είναι η αναπαράσταση του ίδιου γραμμικού μετασχηματισμού ως προς την βάση $\{\mathbf{a}_j\}$ και

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} b'_{ij}\mathbf{a}_i, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Χρησιμοποιώντας την $\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}_k$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} b'_{ij}\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} b'_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b'_{ij} \tag{2.12}$$

και

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ki}. \tag{2.13}$$

Από τις (2.11), (2.12) και (2.13) προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b'_{ij} \qquad \text{για κάθε } k, j$$

ή ισοδύναμα $BA = AB'$. Επομένως οι πινακες B και B' που αναπαριστούν τον γραμμικό μετασχηματισμό f ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{e}_j\}$ και $\{\mathbf{a}_j\}$ συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση

$$B' = A^{-1}BA \tag{2.14}$$

όπου ο πίνακας A είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης (δείτε τις σχέσεις (2.9), (2.10)). Δύο πίνακες B και B' οι οποίοι συνδέονται με μια σχέση της μορφής (2.14) ονομάζονται *όμοιοι*.

Κεφάλαιο 3

Μεταθέσεις

Μια μετάθεση σ n διατεταγμέων στοιχείων είναι μια 'αναδιάταξη' των στοιχείων αυτών. Ένας πιο αυστηρός ορισμός είναι ο εξής. Μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου αυτού στον εαυτό του, δηλαδή μια συνάρτηση σ με πεδίο ορισμού το $\{1, 2, \ldots, n\}$ και πεδίο τιμών το ίδιο σύνολο τέτοια ώστε $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ όταν $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Την μετάθεση σ αναπαριστάνουμε σχηματικά ως

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Το σύνολο των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ στον εαυτό του συμβολίζεται με S_n και είναι εύκολο να δούμε ότι έχει $n!$ στοιχεία. Αν ϕ, ψ, είναι δύο στοιχεία του S_n τότε συμβολίζουμε την σύνθεσή τους ως $\psi\phi = \psi \circ \phi$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύνθεση των δύο συναρτήσεων είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δηλαδή στοιχείο του S_n. Επίσης, επειδή η σύνθεση συναρτήσεων έχει την προσετεριστική ιδιότητα, $\phi(\psi\sigma) = (\phi\psi)\sigma$. (Αυτό απλά σημαίνει ότι, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(\psi\sigma(i)) = \phi(\psi(\sigma(i))) = \phi\psi(\sigma(i))$) Η ταυτοτική συνάρτηση e για την οποία ισχύει ότι $e(i) = i$ για κάθε i είναι το ουδέτερο στοιχείο. Επίσης, για κάθε ϕ στο S_n υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση ϕ^{-1} για την οποία ισχύει $\phi\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi = e$. Για παράδειγμα αν

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad \phi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Παρατηρείστε ότι $\phi\psi(1) = \phi(\psi(1)) = \phi(3) = 1$, $\phi\psi(2) = \phi(\psi(2)) = \phi(2) = 4$.) Επίσης,

$$\text{αν} \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \phi\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ονομάζεται *αντιμετάθεση* μια μετάθεση η οποία εναλλάσει μόνο δύο στοιχεία και κρατά όλα τα άλλα σταθερά δηλαδή η $\tau \in S_n$ είναι αντιμετάθεση αν, για κάποια $i, j \in I_n := \{1, \ldots, n\}$, $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, και $\tau(l) = l$ για κάθε $l \in I_n \setminus \{i, j\}$.

Κάθε μετάθεση μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο ανεξάρτητων κύκλων. Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Το σταθερό σημείο 4 το οποίο αντιστοιχεί σε κύκλο μήκους 1 μπορεί να παραληφθεί.

Κάθε κύκλος μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων. Για παράδειγμα $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$. Γενικά, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε,

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_{k-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, αν ψ είναι μια μετάθεση στο S_n, ισχύει ότι $\{\psi\phi : \phi \in S_n\} = S_n = \{\phi\psi : \phi \in S_n\}$.

Ορισμός 1. *Έστω $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ μια μετάθεση του συνόλου $(1, 2, \ldots, n)$. Θα λέμε ότι η μετάθεση έχει μια αντιστροφή θέσης (r, s) με $1 \leq r < s \leq n$ αν $i_r > i_s$. Μια μετάθεση που έχει περιττό αριθμό αντιστροφών ονομάζεται* περιττή *ενώ μια μετάθεση που έχει άρτιο αριθμό αντιστροφών ονομάζεται* άρτια.

Για παράδειγμα η $(4, 3, 5, 2, 1)$ έχει 3 αντιστροφές ως προς το πρώτο στοιχείο της, 2 ως προς το δεύτερο, 2 ως προς το τρίτο και 1 ως προς το τέταρτο. Συνεπώς έχει συνολικά 8 αντιστροφές και είναι άρτια.

Ορισμός 2. *Μια εναλλαγή της θέσης δύο στοιχείων, i_r, i_s, μιας μετάθεσης $(i_1, \ldots, i_n)$ ονομάζεται* αντιμετάθεση*: Με την αντιμετάθεση αυτή, η $(i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_s, \ldots, i_n)$ γίνεται $(i_1, \ldots, i_s, \ldots, i_r, \ldots, i_n)$. Τα στοιχεία i_r και i_s εναλλάσουν τις θέσεις τους ενώ όλα τα υπόλοιπα τις διατηρούν. Μια αντιμετάθεση δύο γειτονικών στοιχείων ονομάζεται* γειτονική αντιμετάθεση.

Θεώρημα 1. *Μια αντιμετάθεση μετατρέπει μια περιττή μετάθεση σε άρτια και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Έστω $(i_1, \ldots, i_n)$ μια μετάθεση n στοιχείων. Μια γειτονική αντιμετάθεση των στοιχείων i_r και i_{r+1} δεν επηρρεάζει σε τίποτε τον αριθμό των αντιστροφών των στοιχείων $i_1, \ldots, i_{r-1}$ όπως και των στοιχείων $i_{r+2}, \ldots, i_n$. Αν $i_r < i_{r+1}$ τότε η αντιμετάθεση τους αυξάνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_{r+1} κατά 1 ενώ αφήνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_r αναλλοίωτο. Αν $i_r > i_{r+1}$ τότε η αντιμετάθεσή τους μειώνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_r κατά 1 ενώ αφήνει τον αριθμό των αντιστροφών του i_{r+1} αναλλοίωτο. Και στις δύο περιπτώσεις ο συνολικός αριθμός αντιστροφών όλων των στοιχείων μεταβάλλεται κατά μία μονάδα, είτε αυξάνεται είτε μειώνεται. Συνεπώς μια άρτια μετάθεση θα γίνει περιττή και αντίστροφα.

Στην γενική περίπτωση τα στοιχεία i_r, i_s δεν είναι γειτονικά και έστω ότι μεσολαβούν m στοιχεία μεταξύ τους. Χρειάζονται τότε $m+1$ γειτονικές αντιμεταθέσεις για να προχωρήσουμε το i_r μέχρι τη θέση s που κατείχε αρχικά το i_s. Στη συνέχεια χρειαζόμαστε m γειτονικές αντιμεταθέσεις για να πάμε πίσω το i_s στη θέση r που κατείχε το i_r. Συνεπώς συνολικά χρειάζονται $2m+1$ γειτονικές αντιμεταθέσεις για να αντιμεταθέσουμε τα i_r, i_s. Αν k από αυτές αυξάνουν τον αριθμό των αντιστροφών κατά 1 και l από αυτές μειώνουν τον συνολικό αριθμό των αντιστροφών κατά 1 τότε η συνολική μεταβολή του αριθμού των αντιστροφών είναι $k-l$. Ισχύει ότι $k+l=2m+1$ και συνεπώς $k-l=2m-2l+1$. Επομένως βλέπουμε ότι η συνολική μεταβολή του αριθμού των αντιστροφών είναι περιττός αριθμός και κατά συνέπεια, αν η μετάθεση ήταν αρχικά άρτια θα γίνει περιττή και αντίστροφα. $\square$

Κεφάλαιο 4

Ορίζουσες

Ορισμός 3. *Η ορίζουσα ενός πίνακα A, $n \times n$ ορίζεται ως*

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{4.1}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις, σ, του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ και $\operatorname{sign}(\sigma) = +1$ *αν η μετάθεση είναι άρτια ενώ* $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ *αν είναι περιττή.*

4.1 Αλγεβρικά συμπληρώματα, Αντίστροφοι πίνακες και το θεώρημα του Cramér

Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία (a_{ij}). Θα συμβολίσουμε με M_{ij} τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την γραμμή i και την στήλη j. Θέτουμε $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$. Ο πίνακας με στοιχεία A_{ij} ονομάζεται *κλασσικός συζυγής* (adjoint) του πίνακα A και συμβολίζεται ως $\operatorname{adj}(A)$.

Η ορίζουσα του πίνακα A υπολογίζεται ως

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \tag{4.2}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ισχύει ότι

$$A \operatorname{adj}(A)^T = \det(A)\, I. \tag{4.3}$$

Πράγματι, το στοιχείο ij του γινομένου των δύο πινάκων δίνεται από την σχέση

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det(A) & \text{αν } i = j \\ \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{4.4}$$

Αν $i \neq j$ τότε η έκφραση (4.4) είναι ίση με την ορίζουσα ενός πίνακα που προκύπτει αν η γραμμή j του A αντικατασταθεί από την γραμμή i. Συνεπώς αφού πρόκειται για ένα πίνακα με δύο ίδιες γραμμές η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι μηδέν. Αν $i = j$ τότε η έκφραση (4.4) είναι ίση με $\det(A)$.

Η σχέση (4.3) σημαίνει ότι, αν $\det(A) \neq 0$ τότε ο A^{-1} υπάρχει και δίδεται από την

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, \mathrm{adj}(A)^T. \tag{4.5}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι $\det(A) \neq 0$ το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση $x = A^{-1}b$ ή

$$x = \frac{1}{\det(A)}\, \mathrm{adj}(A)^T b. \tag{4.6}$$

4.1.1 Συμπαράγοντες και ορίζουσες

Έστω A πίνακας $n \times n$ και

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε

$$\begin{aligned} \det A \;=\; & a_{11} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} & 1 & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ & + a_{1j} \begin{vmatrix} & & 1 & \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{vmatrix} & & & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

και επομένως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή κατάλληλα και αφαιρώντας από τις υπόλοιπες παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} & 1 & & \\ a_{21} & & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & & a_{ij} & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
&\quad + a_{1j}\begin{vmatrix} & & 1 & \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{vmatrix} & & & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & \end{vmatrix} \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Η τυπική ορίζουσα στην παραπάνω εξίσωση, όπου η j στήλη έχει 1 στην πρώτη θέση και 0 στις άλλες γράφεται, μετά από εναλλαγές στηλών, ως

$$
\begin{vmatrix} & & 1 & \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}\det M_{1j}
$$

όπου M_{1j} είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A όταν διαγράψουμε την γραμμή 1 και την στήλη j. Γενικά, ο πίνακας που προκύπτει από τον A όταν διαγράφουμε την γραμμή i και την στήλη j συμβολίζεται με M_{ij}. Η ποσότητα $A_{ij} := (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ ονομάζεται *συμπαράγοντας* του στοιχείου a_{ij}. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις η (4.8) γίνεται

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (4.8)$$

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται ανάπτυγμα της ορίζουσας σε συμπαράγοντες ως προς την πρώτη γραμμή. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να δώσει το ανάπτυγμα της ορίζουσας σε συμπαράγοντες ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή και στήλη. Ισχύει επομένως ότι

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.9) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Θεώρημα 2. *Έστω A μη ιδιόμορφος πίνακας $n\times n$. Ο αντίστροφος πίνακας εκφράζεται ως προς τους συμπαράγοντες με τον ακόλουθο τρόπο. Αν $A^{-1} = C$ τότε $c_{ij} = (\det A)^{-1}A_{ji}$,* *δηλαδή*

$$A^{-1} = C = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{i1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{i2} & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1j} & A_{2j} & A_{ij} & A_{nj} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{in} & A_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Παρατηρείστε ότι το στοιχείο ij του γινομένου CA είναι το

$$[CA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj} = (\det A)^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}. \tag{4.12}$$

Όταν $i = j$ η παραπάνω έφραση δίνει

$$(\det A)^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{ki} = 1 \tag{4.13}$$

λόγω της (4.10). Όταν $i \neq j$ η έκφραση

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni}$$

ισούται με το μηδέν επειδή εκφράζει την ορίζουσα ενός πίνακα που προκύπει από τον πίνακα A αν αντικαταστήσουμε την στήλη i με την στήλη j έτσι ώστε η στήλη j να εμφανίζεται δύο φορές ενώ η στήλη i καμμία. ∎

Θεώρημα 3 (Cramér). *Έστω A μη ιδιόμορφος πίνακας $n \times n$ και b διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ ή*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση της οποίας η συνιστώσα i δίδεται από το ακόλουθο πηλίκο οριζουσών

$$x_j = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & a_{2n} \\ & & & & \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & b_i & a_{i,i+1} & a_{in} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^T$ το διάνυσμα στήλης υπ' αριθμόν $i = 1, \ldots, n$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$. Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_i x_i + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}.$$

Αν $A = [\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n]$ είναι ο πίνακας του συστήματος, $\det A = \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n]$. Εξετάζουμε τώρα την ορίζουσα $\det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{a}_n]$ η οποία προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την στήλη $\mathbf{a}_i$ με την στήλη $\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}
\det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{a}_n] &= \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_i x_i + \cdots + \mathbf{a}_n x_n, \cdots, \mathbf{a}_n] \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n] = x_i \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n]
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$x_i \det[a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n] = \det[a_1, \cdots, b, \cdots, a_n].$$

□

4.2 Ορίζουσες Vandermonde

Έστω x_i, $i = 1, 2, \ldots, x_n$ πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί. Η ορίζουσα

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

ονομάζεται ορίζουσα Vandermonde. Η τιμή της υπολογίζεται εύκολα από το ακόλουθο επιχείρημα. Ας θέσουμε στη θέση του x_n την μεταβλητή x.

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x^2 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} \tag{4.16}$$

Αναπτύσοντας την ορίζουσα ως προς την τελευταία στήλη βλέπουμε ότι η $V_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς x βαθμού (το πολύ) $n-1$. Βλέπουμε επίσης ότι, για $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, η ορίζουσα (4.16) μηδενίζεται και επομένως πρέπει να έχει την μορφή

$$V_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = C(x_1, \ldots, x_{n-1})(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \tag{4.17}$$

Για να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς $C(x_1, \ldots, x_{n-1})$ θέτουμε $x = 0$ στην (4.17) και την (4.16) και έχουμε

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1}C(x_1, \ldots, x_{n-1})x_1 \cdots x_{n-1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}x_1 \cdots x_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} \\ & & & \cdots & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}x_1 \cdots x_{n-1}V_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$C(x_1, \ldots, x_{n-1}) = V_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Επομένως, θέτοντας $x = n_n$ στην (4.17) και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τα παραπάνω έχουμε

$$V_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = V_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i). \tag{4.18}$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα αναδρομικά έχουμε

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \tag{4.19}$$

Επομένως βλέπουμε ότι η ορίζουσα Vandermonde είναι μηδέν αν και μόνο αν $x_i = x_j$ για κάποιο $i \neq j$.

Κεφάλαιο 5

Γραμμικές Αναδρομικές Εξισώσεις

5.1 Εισαγωγή

Μια εξίσωση της μορφής

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.1}$$

ονομάζεται *γραμμική αναδρομική σχέση τάξης* k. Οι συντελεστές a_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι δεδομένες συναρτήσεις του n και το δεξί σκέλος, b_n, είναι μια δεδομένη συνάρτηση του n. Τυπικά, οι αρχικές συνθήκες $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ είναι δεδομένες και από αυτές και την (5.22) οι τιμές $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ προσδιορίζονται αναδρομικά.

Αν η b_n είναι μηδέν για κάθε n η εξίσωση (5.22) ονομάζεται *ομογενής* άλλως ονομάζεται *μη ομογενής*. Αν οι συντελεστές a_i δεν εξαρτώνται από το n τότε έχουμε μια *γραμμική αναδρομική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*. Αυτές είναι οι εξισώσεις που, όπως θα δούμε, επιλύονται εύκολα σε κλειστή μορφή.

5.1.1 Ομογενείς γραμμικές αναδρομικές σχέσεις τάξης k με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε την ομογενή γραμμική αναδρομική σχέση τάξης k

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x_0,\ x_1,\ \ldots, x_{k-1} \quad \text{δεδομένα.} \tag{5.3}$$

Οι συντελεστές a_i, $i = 1, \dots, k$ είναι πραγματικές (ή μιγαδικές). Αν $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, $\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$ είναι δύο ακολουθίες που ικανοποιούν την (5.23) (αλλά όχι υποχρεωτικά τις αρχικές συνθήκες) τότε εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\{rx_n + sy_n; n \in \mathbb{N}\}$, όπου $r, s \in \mathbb{R}$, επίσης ικανοποιεί την (5.23), λόγω γραμμικότητας. Πράγματι, αρκεί να γράψουμε

$$\begin{aligned} x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \cdots + c_k x_n &= 0, \\ y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \cdots + c_k y_n &= 0, \end{aligned}$$

να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με r, την δεύτερη με s και να προσθέσουμε κατά μέλη για να πάρουμε

$$rx_{n+k} + sy_{n+k} + c_1(rx_{n+k-1} + sy_{n+k-1}) + \cdots + c_k(rx_n + sy_n) = 0.$$

Βλέπουμε κατά συνέπεια ότι το σύνολο των ακολουθιών που είναι λύσεις της αναδρομικής σχέσης (5.23) αποτελούν ένα γραμμικό υπόχωρο του συνόλου όλων των ακολουθιών. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο υπόχωρος αυτός έχει πεπερασμένη διάσταση και θα βρούμε μια βάση γι΄ αυτόν.

Πράγματι, παρατηρείστε ότι οποιαδήποτε λύση $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ της (5.23) προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις πρώτες n αρχικές τιμές $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. Κατά συνέπεια, λόγω της γραμμικότητας των λύσεων αρκεί να εξετάσουμε τις k *θεμελιώδεις λύσεις*, $\{\xi_n^i\}$, που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες $\xi_j^i = 0$ για $j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k$, $\xi_i^i = 1$, για $i = 0, 1, \dots, k-1$. Η λύση της (5.23) με αρχικές συνθήκες (5.3) δίνεται τότε ως ο γραμμικός συνδιασμός των θεμελιωδών λύσεων

$$x_n = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \xi_n^i, \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{5.4}$$

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι ο γραμμικός χώρος των λύσεων της (5.23) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος διάστασης k του γραμμικού χώρου όλων των ακολουθιών με μιγαδικά στοιχεία και ότι οι ακολουθίες $\{\xi_n^i\}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, αποτελούν μια βάση γι΄ αυτό τον υπόχωρο.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να βρούμε λύσεις της (5.23) που να έχουν την μορφή

$$x_n = \lambda^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου λ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός κατάλληλα επιλεγμένος. Για να είναι η x_n όπως την ορίσαμε λύση θα πρέπει

$$\lambda^{n+k} + a_1 \lambda^{n+k-1} + \cdots + a_k \lambda^n = 0.$$

Αφού δεν μας ενδιαφέρει η τετριμμένη λύση που αντιστοιχεί στην επιλογή $\lambda = 0$, διαιρώντας με λ^n παίρνουμε την

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \cdots + a_k = 0. \tag{5.5}$$

Η (5.5) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της αναδρομικής σχέσης (5.23) και είναι βαθμού k. Συνεπώς έχει k ρίζες, πραγματικές ή μιγαδικές. Οι μιγαδικές ρίζες βεβαίως, αν υπάρχουν, εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών αριθμών όταν οι συντελεστές του πολυωνύμου στην (5.5) είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ είναι οι k ρίζες της (5.5) τότε η γενική λύση της (5.23) δίδεται από την

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.6}$$

όπου c_i είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιορισθούν έτσι ώστε η $\{x_n\}$ να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό τα c_i θα πρέπει να επιλεγού έτσι ώστε να ισχύουν οι

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + \cdots c_k & = & x_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_k\lambda_k & = & x_1 \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 + \cdots + c_k\lambda_k^2 & = & x_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda_2^{k-1} + \cdots + c_k\lambda_k^{k-1} & = & x_{k-1}, \end{array}$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Παρατηρείστε ότι η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα είναι ακριβώς η ορίζουσα Vandermonde που είναι διαφορετική από το 0 υπό την προϋπόθεση ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$ και κατά συνέπεια το σύστημα (5.7) έχει μοναδική λύση. Συνεπώς υπάρχει μια μοναδική λύση της (5.23) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (5.3) και αυτή δίνεται από την (5.6) με τιμές των σταθερών c_i που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος (5.7).

5.2 Πολλαπλές Ρίζες

Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.5) δεν είναι όλες διακριτές. Ας θεωρήσουμε κατ΄ αρχή την αναδρομική σχέση

$$x_{n+2} - 2\rho x_{n+1} + \rho^2 x_n = 0, \qquad x_0, x_1 \text{ δεδομένα}, \tag{5.8}$$

$\rho \in \mathbb{R}$. (Η (5.8) είναι ουσιαστικά η γενική περίπτωση μιας αναδρομικής σχέσης που έχει χαρακτηριστική εξίσωση με διπλή ρίζα, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δύο διαφορετικές λύσεις στην περίπτωση αυτή είναι οι ρ^n και $n\rho^n$. Πράγματι

$$(n + 2)\rho^{n+2} - 2\rho(n + 1)\rho^{n+1} + \rho^2 n\rho^n = \rho^{n+2} \left((n + 2) - 2(n + 1) + n\rho\right) = 0.$$

Η γενική λύση είναι $x_n = C_1\rho^n + C_2 n\rho^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Οι σταθερές C_1, C_2 προσδιορίζονται από το σύστημα

$$x_0 = C_1, \qquad x_1 = \rho(C_1 + C_2).$$

Γενικά, αν η εξίσωση (5.5) έχει την $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ m–πλή ρίζα ($m \leq k$) τότε στην ρίζα αυτή αντιστοιχούν οι εξής m ανεξάρτητες λύσεις:

$$\rho^n, \qquad n\rho^n, \qquad n^2\rho^n, \qquad \cdots, \qquad n^{m-1}\rho^n.$$

Παράδειγμα: Έστω η αναδρομική σχέση $x_{n+4} - 5x_{n+3} + 9x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$ με x_0, x_1, x_2, x_3 δεδομένα. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2) = 0$. Η γενική λύση είναι $x_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, και οι σταθερες προσδιορίζονται από το σύστημα

$$x_0 = C_1 + C_4, \quad x_1 = C_1 + C_2 + C_3 + 2C_4, \quad x_2 = C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 4C_4, \quad x_3 = C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 8C_4.$$

5.3 Οι αριθμοί Fibonacci

Μια από τις διασημότερες αναδρομικές σχέσεις είναι αυτή που δίνει τους αριθμούς Fibonacci. Η σχέση αυτή είναι η

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{5.9}$$

μαζί με τις *αρχικές συνθήκες*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1. \tag{5.10}$$

Στην παραπάνω σχέση F_n είναι ο n–οστός αριθμός Fibonacci και ο τρόπος που οι αριθμοί αυτή προσδιορίζονται αναδρομικά είναι σαφής: $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ κ.ο.κ. Παρότι ο διαδοχικός υπολογισμός είναι απλούστατος μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε αν υπάρχει μια έκφραση, σαν συνάρτηση του n η οποία να προσδιορίζει απ΄ ευθείας τον n–οστό αριθμό Fibonacci. Μια τέτοια έκφραση θα μας έδινε για παράδειγμα μια σαφή εικόνα για τον ρυθμό αύξησης των αριθμών αυτών. Ας ξαναγράψουμε την (5.9) στη μορφή

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0. \tag{5.11}$$

Θα ονομάζουμε μια τέτοια σχέση *ομογενή γραμμική αναδρομική σχέση δεύτερης τάξης με γραμμικούς συντελεστές.* Η λέξη ομογενής αναφέρεται στο γεγονός ότι το δεξί σκέλος της αναδρομικής σχέσης, όταν είναι γραμμένη μ΄ αυτό τον τρόπο, είναι 0. Αντίθετα η αναδρομική σχέση

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = n \tag{5.12}$$

είναι μη ομογενής. Αν $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, είναι δυο ακολουθίες που ικανοποιούν μια ομογενή γραμμική αναδρομική σχέση όπως η (5.11) τότε κάθε γραμμικός συνδιασμός τους, όπως για παράδειγμα ο $z_n := ax_n + by_n$ επίσης ικανοποιεί την αναδρομική σχέση.

Μια μέθοδος που μας επιτρέπει να βρούμε τις λύσεις μια ομογενούς γραμμικής αναδρομικής σχέσης με σταθερούς συντελεστές όπως η (5.9) είναι να δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής λ^n όπου το λ θα προσδιορισθεί κατάλληλα. Αντικαθιστώντας την προτεινόμενη λύση στην (5.11) έχουμε

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0$$

ή

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Η γενική λύση είναι

$$F_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{5.13}$$

και οι δύο σταθερές, C_1, C_2, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Θέτοντας $n = 0$ και $n = 1$ στην (5.13) και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \end{aligned}$$

ή

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1$$

απ΄ όπου έχουμε

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

και συνεπώς

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{5.14}$$

Παρατηρείστε ότι για μεγάλες τιμές του n μόνο ο πρώτος όρος μέσα στην παρένθεση είναι σημαντικός. Ο δεύτερος τείνει γρήγορα στο μηδέν αφού κατ΄ απόλυτη τιμή είναι μικρότερος της μονάδας.

5.4 Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Η αναδρομική σχέση (5.22) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \\ x_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

ή, ισοδύναμα

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \mathbf{x}_0 \text{ δεδομένο} \tag{5.16}$$

όπου

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_n := \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-2} \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix}, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Επομένως η λύση προκύπτει αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1 &= A^2\mathbf{x}_0 + A\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_3 &= A^3\mathbf{x}_0 + A^2\mathbf{b}_0 + A\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= A^n\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}\mathbf{b}_i. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Στην περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης, $\mathbf{b}_n = 0$ για κάθε n και συνεπώς

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.18}$$

5.5 Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων με την βοήθεια γεννητριών συναρτησεων

Έστω $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η *γεννήτρια συνάρτηση* που αντιστοιχεί στην ακολουθία είναι η συνάρτηση που ορίζεται μέσω της εξής δυναμοσειράς:

$$A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{5.19}$$

Είναι προφανές ότι σε κάθε ακολουθία αντιστοιχεί μια και μοναδική πιθανογεννήτρια. Ισχύει όμως και το αντίστοιχο: Σε κάθε πιθανογεννήτρια συνάρτηση αντιστοιχεί μια και μοναδική ακολουθία $\{a_n\}$. Αυτό προκύπτει παραγωγίζοντας k φορές την πιθανογεννήτρια και υπολογίζοντας την παράγωγο που προκύπτει για $z = 0$. Πράγματι, $\frac{d^k}{dz^k}A(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k}a_n$ και $\frac{d^k}{dz^k}A(z)\Big|_{z=0} = k!a_k$. Συνεπώς

$$a_k := \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}A(z)\Big|_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.20}$$

Η παραπάνω σχέση προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο την ακολουθία $\{a_n\}$ από την πιθανογεννήτρια.

Γενικά, η δυναμοσειρά της εξίσωσης (5.19) θεωρείται ως *συμβολική έκφραση* το οποίο σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με ζητήματα σύγκλισης. Για τους σκοπούς μας όμως είναι απλούστερο να την θεωρήσουμε ως μια δυναμοσειρά με συντελεστές στους πραγματικούς αριθμούς η οποία συγκλίνει σε ένα διάστημα γύρω από το μηδέν (ή ενδεχομένως για όλους τους πραγματικούς αριθμούς) και ορίζει μια πραγματική συνάρτηση.

Ας δούμε τα ακόλουθα παραδείγματα:

1. Αν $a_n = c^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου c δεδομένος πραγματικός αριθμός,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n = \frac{1}{1-cz}. \quad \text{Η σειρά συγκλίνει για } |z| < \frac{1}{|c|}.$$

2. Αν $a_n = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}. \quad \text{Η σειρά συγκλίνει για } |z| < 1.$$

3. Αν $A(z) = \frac{z}{z^2-z-2}$ να βρεθεί η ακολουθία στην οποία η γεννήτρια συνάρτηση αντιστοιχεί. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (5.20). Είναι όμως ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα και την πιθανογεννήτρια του παραδείγματος 1 ως εξής: Ο παρονομαστής της $A(z)$ γράφεται ως $(z-2)(z+1)$ και επομένως έχουμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{z}{(z-2)(z+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1}.$$

Συνεπώς $A(z+1)+B(z-2)=z$ (για κάθε z) και επομένως $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$. Επομένως

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{2}{3}\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-2^{-n}}{3}\right)z^n. \end{aligned}$$

Συνεπώς $a_n=\frac{(-1)^n-2^{-n}}{3}$, $n=1,2,\ldots$. Παρατηρείστε ότι στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 1 με $c=-1$ και $c=1/2$.

5.6 Γραμμικές αναδρομικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Η ακολουθία $\{x_n; n\in\mathbb{N}\}$ ικανοποιεί μια *ομογενή γραμμική αναδρομική εξίσωση τάξης k με σταθερούς συντελεστές* αν υπάρχουν k πραγματικοί αριθμοί $a_1,\ldots,a_k$, με $a_k\neq 0$, τέτοιοι ώστε

$$x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_kx_{n-k}=0,\qquad n=k,k+1,\ldots. \tag{5.21}$$

Προκειμένου να προσδιοριστούν τα μέλη της ακολουθίας απαιτείται επιπλέον να δοθούν οι k πρώτοι όροι της ακολουθίας, $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}$.

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε ως επί το πλείστον σε γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Προκειμένου να λύσουμε την ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}=0 \tag{5.22}$$

θα δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $x_n=\lambda^n$, $n=0,1,2,\ldots$. Για να είναι μια τέτοια ακολουθία λύση της (5.22) θα πρέπει να ισχύει $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}=0$ το οποίο σημαίνει ότι το λ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0. \tag{5.23}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και εν γένει έχει δυο διαφορετικές ρίζες (ενδεχομένως συζυγείς μιγαδικές, αφού $a_1,a_2\in\mathbb{R}$).

Πρόταση 1. *Η γενική λύση της εξίσωσης (5.22) δίνεται από την*

$$C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n \tag{5.24}$$

όπου C_1,C_2 αυθαίρετες σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν πάντα να προσδιορισθούν μονοσήμαντα έτσι ώστε η λύση της (5.22) να ικανοποιεί δεδομένες αρχικές συνθήκες, x_0, x_1 ή συνοριακές συνθήκες της μορφής x_0, x_N, όπου $N\in\mathbb{N}$. Αν $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ τότε η γενική λύση της (5.22) δίνεται από την

$$C_1\lambda^n+C_2n\lambda^n. \tag{5.25}$$

Αν $\{b_n\}$ είναι μια δεδομένη ακολουθία, η αναδρομική σχέση

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} = b_n \qquad n = 0, 1, 2 \dots \tag{5.26}$$

ονομάζεται *μη ομογενής γραμμική αναδρομική σχέση δεύτερης τάξης*. Μια ακολουθία $\{y_n\}$ η οποία ικανοποιεί την (5.26) ονομάζεται *ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης*.

Πρόταση 2. *Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (5.21) δίνεται από την*

$$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.27}$$

όπου λ_1, λ_2 είναι οι δύο διαφορετικές ρίζες της (5.23) και $\{y_n\}$ μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ τότε η γενική λύση είναι $C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n + y_n$.

5.7 Αριθμοί Catalan

Έστω C_n ο αριθμός των παραστάσεων που μπορούμε να φτιάξουμε με n ζεύγη παρενθέσεων. Έτσι έχουμε

Με 1 ζεύγος 1 παράσταση: ()

Με 2 ζεύγη 2 παραστάσεις: (()), ()()

Με 3 ζεύγη 5 παραστάστεις: ()(()), ()()(), (())(), ((())), (()()).

Γενικά, αν έχουμε $n+1$ ζεύγη παρενθέσεων, ξεκινάμε ανοίγοντας μια παρένθεση που σε κάποιο σημείο θα κλείσει. Έστω ότι περιέχονται k ζεύγη παρενθέσεων μέσα σ' αυτό το πρώτο ζεύγος ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Μπορούμε να φτιάξουμε C_k διαφορετικές εκφράσεις με αυτά τα k ζεύγη και C_{n-k} εκφράσεις με τα $n-k$ ζεύγη που είναι έξω από την πρώτη παρένθεση. Συνεπώς οι συνολικές εκφράσεις που μπορούμε να φτιάξουμε με $n+1$ ζεύγη παρενθέσεων αν η παρένθεση που ανοίγει πρώτη περιέχει k ζεύγη είναι $C_k C_{n-k}$. Αθροίζοντας για όλα τα k έχουμε

$$C_{n+1} = C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_2 + C_{n-1}C_1 + C_n.$$

Αν θέσουμε $C_0 = 1$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}. \tag{5.28}$$

Ο αναδρομικός τύπος (5.28) δεν είναι γραμμικός, προσφέρονται όμως για τον αριθμητικό υπολογισμό της ακολουθίας C_n. Για παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0C_0 = 1\cdot 1 = 1\\
C_2 &= C_0C_1 + C_1C_0 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2\\
C_3 &= C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5\\
C_4 &= C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 14\\
C_5 &= C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 1\cdot 14 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + 5\cdot 1 + 14\cdot 1 = 42.
\end{aligned}$$

Προκειμένου να βρούμε μια έκφραση σε κλειστή μορφή θα χρησιμοποιούμε την γεννήτρια συνάρτηση

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \tag{5.29}$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (5.28) με z^{n+1} και αθροίζοντας ως πρός n

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} z \sum_{k=0}^{n} z^k C_k z^{n-k} C_{n-k} \\
&= z \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^k C_k z^{n-k} C_{n-k} \\
&= z \sum_{k=0}^{\infty} z^k C_k \sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k} C_{n-k} \\
&= zC(z) \cdot C(z)
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^{n+1} = C(z) - 1$ καταλήγουμε στη σχέση $C(z) - 1 = zC^2(z)$ ή

$$zC^2(z) - C(z) + 1 = 0. \tag{5.30}$$

Λύνοτας την δευτεροβάθμια εξίσωση έχουμε τις λύσεις

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{5.31}$$

Προκειμένου να επιλέξουμε το σωστό πρόσημο στον παραπάνω τύπο παρατηρούμε ότι, θέτωντας $z = 0$ στην (5.29) έχουμε $C(0) = C_0 = 1$. Αν εξετάσουμε την συμπεριφορά της έκφρασης (5.31) όταν $z \to 0$ βλέπουμε ότι ο τύπος με το θετικό πρόσημο τείνει στο άπειρο, ενώ για τον τύπο με αρνητικό πρόσημο ισχύει ότι $\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \to 1$ όταν $z \to 0$ όπως βλέπουμε εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l'Hôpital. 'ρα

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{5.32}$$

Για να βρούμε την ακολουθία $\{C_n\}$ από την γεννήτρια συνάρτηση της, $C(z)$, θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό θεώρημα:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{5.33}$$

όπου

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \tag{5.34}$$

(Όταν το α είναι θετικός ακέραιος όλοι οι όροι της σειράς (5.33) για $n > \alpha$ μηδενίζονται. Π.χ. $\binom{3}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{5!} = 0$. Έτσι η άπειρη σειρά γίνεται σ' αυτή την περίπτωση ένα πεπερασμένο άθροισμα.)

Στην περίπτωσή μας $\alpha = 1/2$ και

$$
\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}2^{-n}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}2^{-2n}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot(2n)}{(n!)^2} \\
&= (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{4^{-n}}{2n-1}
\end{aligned}
$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
(1-4z)^{\frac{1}{2}} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n(4z)^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{z^n}{2n-1} \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

και κατά συνέπεια

$$
\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{z^{n-1}}{2(2n-1)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{2m+2}{m+1}\frac{z^m}{2(2m+1)} \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Ισχύει όμως ότι $\binom{2m+2}{m+1} = \binom{2m}{m}\frac{2(2m+1)}{m+1}$ και αντικαθιστώντας στην (5.36) έχουμε

$$C(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}z^m. \qquad (5.37)$$

Συνεπώς, οι αριθμοί Catalan δίνονται από την σχέση

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \qquad (5.38)$$

5.8 Παραδείγματα Γραμμικών Αναδρομικών Σχέσεων

5.8.1 Αριθμοί Pell

Θεωρούμε τρια ήδη πλακιδίων: Κόκκινα και μπλε τα οποία είναι τετράγωνα, 1×1, και λευκά ορθογώνια 1×2, με το ίδιο πλάτος αλλά διπλό μήκος. Τα πλακίδια τοποθετούνται στην σειρά σε μια γραμμή. Μας ενδιαφέρει να απαριθμήσουμε τον αριθμό διαφορετικών διατάξεων συνολικού μήκους n, έστω u_n. Είναι σαφές ότι $u_1 = 2$, διότι, υπάρχουν δύο διατάξεις μήκους 1, (κόκκινο ή μπλε πλακίδιο) και $u_2 = 5$ (ΚΚ, ΚΜ, ΜΚ, ΜΜ, και Λ, όπου Κ=κόκκινο, Μ=μπλε, Λ=λευκό). Γενικά,

$$u_n \;=\; 2u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad n = 3, 4, \ldots . \tag{5.39}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει αν ξεκινήσουμε με το πρώτο πλακίδιο. Αν είναι κόκκινο ή μπλε, μετά ακολοθούν σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις πλακίδια συνολικού μήκους $n-1$, τα οποία μπορούν να επιλεγούν με u_{n-1}. Αν το πρώτο είναι λευκό τότε ακολουθούν πλακίδια συνολικού μήκους $n-2$, τα οποία μπορούν να επιλεγούν με u_{n-2} τρόπους.

Η χαρακτηριστική εξίσωση που ανιστοιχεί στην (5.39) είναι η $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ με ρίζες

$$\lambda_1 \;=\; \frac{2+\sqrt{8}}{2} \;=\; 1+\sqrt{2}, \qquad \lambda_1 \;=\; \frac{2-\sqrt{8}}{2} \;=\; 1-\sqrt{2}.$$

Συνεπώς

$$u_n \;=\; C_1\left(1+\sqrt{2}\right)^n + C_2\left(1-\sqrt{2}\right)^n,$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπ′ όψιν τις αρχικές συνθήκες,

$$\begin{aligned} 2 &= C_1\left(1+\sqrt{2}\right) + C_2\left(1-\sqrt{2}\right), \quad (n=1), \\ 5 &= C_1\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + C_2\left(1-\sqrt{2}\right)^2, \quad (n=2). \end{aligned} \tag{5.40}$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό παίρνουμε $C_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $C_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, και επομένως

$$u_n \;=\; \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n \;+\; \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^n . \tag{5.41}$$

Το σύστημα (5.40) από τό οποίο προκύπτουν οι τιμές των σταθερών C_1, C_2, μπορεί να απλοποιηθεί αν παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να θέσουμε $u_0 = 1$: Υπάρχει ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε 0 πλακίδια στη σειρά! Αν αυτό δεν είναι αρκετά ικανοποιητικό, παρατηρούμε απλώς ότι με $u_0 = 1$ και $u_1 = 2$, η αναδρομική σχέση (5.39) δίνει $u_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Αντί για το σύστημα (5.40) έχουμε τότε

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \quad (n=0), \\ 2 &= C_1\left(1+\sqrt{2}\right) + C_2\left(1-\sqrt{2}\right), \quad (n=1). \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό είναι απλούστερο από το (5.40) και βεβαίως δίνει την ίδια λύση για τα C_1, C_2.

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών $1, 2, 5, 12, 70, 169, \ldots$ η οποία προκύπτει από την αναδρομική σχέση (5.39), είναι γνωστή ως αριθμοί Pell στην θεωρία αριθμών.

5.8.2 Ροές Επιτυχιών

Σε ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία, Ε, και αποτυχία, Α, θεωρούμε ανεξάρτητες δοκιμές. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα επιτυχίας είναι p και η πιθανότητα αποτυχίας $q := 1 - p$, μας ενδιαφέρει να βρούμε την πιθανότητα να χρειαστούν ακριβώς n πειράματα μέχρι να έχουμε k *διαδοχικές επιτυχίες*. Θα εξετάσουμε την περίπτωση $k = 2$,

$n = 2:$ $\quad EE$ με πιθανότητα p^2

$n = 3:$ $\quad AEE$ με πιθανότητα qp^2

$n = 4:$ $\quad AAEE$ ή $EAEE$ με πιθανότητα $qp^3 + q^2p^2 = qp^2$

$n = 4:$ $\quad AAAEE$ ή $EAAEE$ ή $AEAEE$ με πιθανότητα $q^3p^2 + q^2p^3 + q^2p^3 = (1 + p)q^2p^2$.

Έστω λοιπόν, για $k = 2$, f_n η πιθανότητα να χρειαστούν ακριβώς n δοκιμές μέχρι να έχουμε 2 *διαδοχικές* επιτυχίες ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$f_n = qf_{n-1} + pqf_{n-2}. \tag{5.42}$$

Για την συνέχεια θα υποθέσουμε ότι $p = q = 1/2$ για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς. Η *χαρακτηριστική εξίσωση* της (5.42) είναι, στην περίπτωση αυτή,

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Συνεπώς

$$f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n. \tag{5.43}$$

Οι σταθερές C_1, C_2, μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_3 = \frac{1}{8}$. Συνεπώς έχουμε τελικά

$$f_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{5.44}$$

5.8.3 Αριθμός Λέξεων Μήκους n με Τρια Ψηφία

Μας ενδιαφέρει ο αριθμός διαφορετικών λέξεων μήκους n που μπορεί να σχηματισχούν με τα ψηφία 0, 1, 2 αν το ψηφίο 2 δεν μπορεί να ακολουθείται ποτέ από ένα δεύτερο ψηφίο 2. Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός που αναφέρεται στο ψηφίο 2 ο συνολικός αριθμός λέξεων προφανώς θα ήταν 3^n. Ας συμβολίσουμε με f_n το πλήθος των λέξεων. Ισχύει ότι

$$f_1 = 3, \ (\text{λέξεις } 0,\ 1, \text{ και } 2), \quad f_2 = 8, \ (\text{λέξεις } 00,\ 11,\ 01,\ 10,\ 20,\ 02,\ 21,\ 12). \tag{5.45}$$

Γενικά, αν $\mathbf{f}_n$ είναι τό σύνολο των λέξεων μήκους n τότε $\mathbf{f}_n = \{0,1\} \times \mathbf{f}_{n-1} \cup \{20,21\} \times \mathbf{f}_{n-2}$ δηλαδή

$$f_n = 2f_{n-1} + 2f_{n-2}. \tag{5.46}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την (5.45) μπορούμε να πάρουμε ως αρχικές συνθήκες $f_0 = 1$, $f_2 = 3$. (Η κενή λέξη μηδενικού μήκους φτιάχνεται με έναν μόνο τρόπο. Επίσης $f_2 = 2f_0 + 2f_1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$.) Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (5.46) είναι η

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

Επομένως η γενική λύση της (5.46) είναι η

$$f_n = C_1 \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + C_2 \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

με

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 3 &= C_1 \left(1 + \sqrt{3}\right) + C_2 \left(1 - \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$f_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(1 + \sqrt{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(1 - \sqrt{3}\right)^n . \tag{5.47}$$

5.9 Ρητογραμμικές Αναδρομικές Εξισώσεις

Ρητογραμμικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}.$$

Ψποθέτουμε ότι $ad - bc \neq 0$ (άλλως η συνάρτηση f είναι σταθερά).

Ρητογραμμικές ονομάζονται οι αναδρομικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0\text{: δεδομένη αρχική συνθήκη.} \tag{5.48}$$

Οι αναδρομικές αυτές εξισώσεις λύνονται σε κλειστή μορφή ως εξής. Η *χαρακτηριστική εξίσωση* της (5.48) είναι η

$$\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad \Leftrightarrow \quad c\lambda^2 + (d - a)\lambda - b = 0. \tag{5.49}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Η (5.49) έχει δύο διακριτές ρίζες $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ισχύει ότι

$$\lambda_i \;=\; \frac{a\lambda_i + b}{c\lambda_i + d}, \quad i = 1, 2,$$

και, από τις (5.48), (5.49),

$$x_{n+1} - \lambda_i \;=\; \frac{ax_n + b}{cx_n + d} - \frac{a\lambda_i + b}{c\lambda_i + d} = \frac{(ad - bc)(x_n - \lambda_i)}{(cx_n + d)(c\lambda_i + d)}, \quad i = 1, 2. \tag{5.50}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.51) για $i = 1, 2$, παίρνουμε

$$\frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} \;=\; \frac{c\lambda_2 + d}{c\lambda_1 + d}\,\frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2}. \tag{5.51}$$

Θέτουμε

$$u_n = \frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \quad \mu \;=\; \frac{c\lambda_2 + d}{c\lambda_1 + d}\,.$$

Με τους ορισμούς αυτούς η (5.48) μετασχηματίζεται στην πολύ απλούστερη

$$u_{n+1} \;=\; \mu u_n$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$u_n \;=\; \mu^n u_0$$

όπου το

$$u_0 = \frac{x_0 - \lambda_1}{x_0 - \lambda_2},$$

είναι δεδομένο αφού γνωρίζουμε την αρχική τιμή x_0. Από τον ορισμό του u_n προκύπτει επομένως ότι

$$x_n \;=\; \frac{\lambda_2 u_0 \mu^n - \lambda_1}{u_0 \mu^n - 1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.52}$$

Η (5.49) έχει μια διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Από την εξίσωση $c\lambda^2 + (d - a)\,\lambda - b = 0$,

$$\lambda \;=\; \frac{d\lambda - b}{a - c\lambda}\,. \tag{5.53}$$

Επίσης, επειδή η λ είναι *διπλή ρίζα* της δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης,

$$\lambda \;=\; \frac{a - d}{2c}. \tag{5.54}$$

$$x_{n+1} - \lambda \;=\; \frac{ax_n + b}{cx_n + d} - \lambda \;=\; \frac{(a - c\lambda)x_n - (d\lambda - b)}{cx_n + d} \;=\; \frac{(a - c\lambda)x_n - \lambda\,(a - c\lambda)}{cx_n - 2c\lambda + a}. \tag{5.55}$$

(Στον αριθμητή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(d\lambda - b) = \lambda(a - c\lambda)$ (λόγω της (5.53)) ενώ στον παρονομαστή το γεγονός ότι $d = a - 2\lambda c$ (λόγω της (5.54)). Επομένως, από την (5.55),

$$x_{n+1} - \lambda = \frac{(a-c\lambda)x_n - \lambda(a-c\lambda)}{c(x_n-\lambda) + a - c\lambda} = \frac{x_n - \lambda}{\frac{c}{a-c\lambda}(x_n-\lambda)+1}. \tag{5.56}$$

Θέτουμε τώρα $u_n = (x_n - \lambda)^{-1}$. Συνεπώς

$$u_{n+1} = \nu + u_n$$

όπου $\nu = \frac{c}{a-c\lambda} = \frac{c}{a-c\frac{a-d}{2c}} = \frac{2c}{a+d}$. Επομένως

$$u_n = u_0 + n\nu$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας ότι $u_0 = \frac{1}{x_0-\lambda}$,

$$x_n = \lambda + \frac{x_0 - \lambda}{1 + n(x_0-\lambda)\nu}.$$

5.9.1 Παράδειγματα

Διακριτές Ρίζες. Έστω η ρητογραμμική αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 6}{x_n + 1}, \quad x_0 = 1.$$

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση είναι

$$\lambda = \frac{2\lambda + 6}{\lambda + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Οι ρίζες της είναι οι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ και επομένως

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 3 &= \frac{2x_n+6}{x_n+1} - 3 = \frac{3 - x_n}{x_n + 1} \\ x_{n+1} + 2 &= \frac{2x_n+6}{x_n+1} + 2 = \frac{4x_n + 8}{x_n + 1} \end{aligned}$$

Διαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη

$$\frac{x_{n+1} - 3}{x_{n+1} + 2} = -\frac{1}{4}\frac{x_n - 3}{x_n + 2}.$$

Θέτουμε

$$u_n := \frac{x_n - 3}{x_n + 2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad u_0 = \frac{x_0 - 3}{x_0 + 2} = \frac{1-3}{1+2} = -\frac{2}{3}.$$

Επομένως έχουμε

$$u_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $x_n = \frac{3+2u_n}{1-u_n}$ έχουμε

$$x_n \;=\; \frac{9+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{3+2\left(-\frac{1}{4}\right)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Διπλή Ρίζα. Έστω η ρητογραμμική αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} \;=\; \frac{3x_n - 1}{4x_n - 1}, \quad x_0 = 3.$$

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση είναι

$$\lambda \;=\; \frac{3\lambda - 1}{4\lambda - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

η οποία έχει την διπλή ρίζα $\lambda = \frac{1}{2}$. Επομένως

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} \;=\; \frac{3x_n - 1}{4x_n - 1} - \frac{1}{2} \;=\; \frac{2x_n - 1}{2(4x_n - 1)} \;=\; \frac{2x_n - 1}{2(4x_n - 2 + 1)} \;=\; \frac{2x_n - 1}{4(2x_n - 1) + 2} \;=\; \frac{1}{4 + \frac{1}{x_n - \frac{1}{2}}}$$

ή

$$\frac{1}{x_{n+1} - \frac{1}{2}} \;=\; 4 + \frac{1}{x_n - \frac{1}{2}}.$$

Θέτουμε $u_n = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επίσης $u_0 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}$, και

$$u_{n+1} \;=\; 4 + u_n.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$u_n = \frac{2}{5} + 4n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{3 + 5n}{1 + 10n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

5.9.2 Παραδείγματα

1.

$$x_{n+1} + a x_n = 0, \qquad x_0 \text{ δεδομένο.}$$

Αυτή είναι μια ομογενής γραμμική αναδρομική σχέση πρώτης τάξης που μπορεί να λυθεί άμεσα. Παρ΄ όλα αυτά είναι ενδιαφέρον να εφαρμόσουμε τη γενική μεθοδολογία. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda+a = 0$ και επομένως η γενική λύση είναι $x_n = c_1(-a)^n$. Έχουμε ακόμη $x_0 = c_1(-a)^0$ και επομένως $c_1 = x_0$. Συνεπώς η λύση της αναδρομικής σχέσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι η $x_n = x_0(-a)^n$.

2. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε την γενική μεθοδολογία ως εξής: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ με ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Η γενική λύση θα έχει επομένως την μορφή $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ όπου οι σταθερές c_1, c_2, προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &= c_1 + c_2 \\ x_1 = 1 &= c_1\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + c_2\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

από τις οποίες έχουμε ότι

$$c_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = c_1 i\sqrt{3} = 1 \quad \text{και συνεπώς } c_1 = -i\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ c_2 = i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως $x_n = i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αν λάβουμε υπ΄ όψιν μας ότι $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Επομένως $x_n = i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i\frac{4n\pi}{3}} - e^{i\frac{2n\pi}{3}}\right)$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το υπόλοιπο του n όταν τον διαιρέσουμε με το 3.

$$\begin{aligned} n = 3k: &\quad x_{3k} &= i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i4k\pi} - e^{i2k\pi}\right) &= 0, \\ n = 3k+1: &\quad x_{3k} &= i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i4k\pi+i\frac{4\pi}{3}} - e^{i2k\pi+i\frac{2\pi}{3}}\right) &= 1, \\ n = 3k+2: &\quad x_{3k} &= i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(e^{i4k\pi+i\frac{8\pi}{3}} - e^{i2k\pi+i\frac{4\pi}{3}}\right) &= -1. \end{aligned}$$

5.10 Ασκήσεις

Ασκηση 5.10.1. Χρησιμοποιείστε τις βασικές ιδιότητες της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις

$$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Η τελευταία ορίζουσα μπορεί να υπολογισθεί μετασχηματίζοντας τον πίνακα σε άνω τριγωνικό.)

Ασκηση 5.10.2. Θεωρήστε την αναδρομική σχέση $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Να υπολογίσετε τον γενικό όρο της ακολουθίας.

Κεφάλαιο 6

Ιδιοδιανύσματα και Ιδιοτιμές

6.1 Ερμιτιανοί Πίνακες

Η πλήρης μελέτη του προβλήματος των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοτιμών μπορεί να γίνει με τον πιο φυσικό τρόπο στον γραμμικό χώρο $\mathbb{C}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι αν x, y είναι δύο διανύσματα σ′ αυτό τον χώρο, το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ως $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$. Αν $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&(x + y, z) = (x, z) + (y, z),\\
&(x, y) = \overline{(y, x)},\\
&(\alpha x, y) = \alpha(x, y).
\end{aligned}$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει επίσης εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
&(x, y + z) = (x, z) + (y, z),\\
&(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y).
\end{aligned}$$

Η νόρμα ενός διανύσματος ορίζεται ως $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$. Επίσης, με $\Re(z)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z ενώ με $\Im(z)$ το φανταστικό. Έτσι έχουμε $z = \Re(z) + i\Im(z)$.

Θεώρημα 4. *Το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την εξής ταυτότητα, γνωστή και ως νόμο του συνημιτόνου*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(x, y) + \|y\|^2.$$

Απόδειξη Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y)\\
&= \|x\|^2 + \left(\overline{(x, y)} + (x, y)\right) + \|y\|^2\\
&= \|x\|^2 + 2\Re(x, y) + \|y\|^2,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το γενογός ότι για οποιοδήποτε $z \in \mathbb{C}$ $z + \bar{z} = 2\Re(z)$. ∎

Έστω ο $n \times n$ πίνακας $A = [a_{ij}]$ με στοιχεία στον $\mathbb{C}$. Ο *συζυγής ανάστροφος* του πίνακα A είναι ο πίνακας

$$A^* = \overline{(A^T)} \tag{6.1}$$

με στοιχεία $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Αν ο A είναι πραγματικός τότε $A^* = A^T$. Αν ισχύει ότι $A = A^*$ τότε ο A ονομάζεται *ερμιτιανός* (hermitian, προς τιμήν του Γάλλου μαθηματικού Hermite).

Η σκοπιμότης του παραπάνω ορισμού φαίνεται από το γεγονός ότι ο συζυγής ανάστροφος είναι εκείνος ο πίνακας για τον οποίο

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \qquad \text{για κάθε } x, y, \text{ στο } \mathbb{C}^n. \tag{6.2}$$

Πράγματι, αν ισχύει η (6.1) τότε

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \sum_{i=1}^n (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \bar{y}_i = \sum_{j=1}^n x_j \overline{\left(\sum_{i=1}^n y_i \bar{a}_{ij} \right)} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \overline{(A^*y)_j} = (x, A^*y). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η (6.2) διαλέγουμε $x = e_i$, $y = e_j$ όπου $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση i, και έχουμε ότι $(Ae_i, e_j) = a_{ji}$ ενώ $(e_i, A^*e_j) = \overline{(a^*_{ij})}$. Από αυτό συνάγουμε ότι $a^*_{ij} = \overline{(a_{ji})}$.

Ένας πίνακας B ονομάζεται *αντιερμιτιανός* αν $B^* = -B$. Κάθε τετραγωνικός πίνακας C μπορεί να γραφεί ως $C = A + iB$ όπου ο A είναι ερμιτιανός και ο B αντιερμιτιανός. Για να διαπιστώσουμε αυτή την πρόταση αρκεί αν θέσουμε $A = \frac{1}{2}(C + C^*)$ και $B = \frac{1}{2i}(C - C^*)$.

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός τετραγωνικού, $n \times n$ πίνακα A, είναι το πολυώνυμο $\det(\lambda I - A)$ το οποίο εύκολα (με επαγωγή) μπορεί να δει κανείς ότι είναι n–οστού βαθμού. Ένας μιγαδικός αριθμός λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα A αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε

$$Ax = \lambda x. \tag{6.3}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι προφανώς οι ιδιοτιμές του A αφού $\det(\lambda I - A) = 0$ αν και μόνο αν ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι ιδιόμορφος, αν δηλαδή υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $(A - \lambda I)x = 0$. Δεδομένου ότι, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, κάθε πολυώνυμο βαθμού n στο $\mathbb{C}$ έχει ακριβώς n ρίζες, μετρώντας και την πολλαπλότητα, συμπεραίνουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται ώς

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$$

όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$ και r_i είναι φυσικοί τέτοιοι ώστε $r_1 + \cdots + r_k = n$. Ο r_i ονομάζεται *αλγεβρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_i.

Θεώρημα 5. *Αν $x_1, \ldots, x_k$ είναι k ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (με $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$) τότε τα x_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη Θα προχωρήσουμε με απαγωγή εις άτοπον. Έστω ότι τα k ιδιοδιανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε υπάρχει φυσικός $m \leq k - 1$ τέτοιος ώστε τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *να είναι* γραμμικά ανεξάρτητα αλλά τα $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$ να μην είναι. (Ενδέχεται βέβαια το m να είναι ίσο με 1.) Επομένως, υπάρχουν c_i, όχι όλα ίσα με το μηδέν, τέτοια ώστε

$$c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} = 0. \tag{6.4}$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε επίσης ότι

$$0 = A(c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1}) = c_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + c_m \lambda_m x_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1}. \tag{6.5}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (6.4) με λ_{m+1} και αφαιρώντας από την (6.5) παίρνουμε

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) x_1 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) x_m.$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους, $\lambda_i - \lambda_{m+1} \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, m$, και συνεπώς τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, όπερ άτοπον. ∎

̓μεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι αν ένας πίνακας $n \times n$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε έχει και n γραμμικά αναξέρτητα ιδιοδιανύσματα, $x_1, \ldots, x_n$. Αν $M = [x_1 | \cdots | x_n]$ ο πίνακας που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα αυτά, τότε

$$AM = [Ax_1 | \cdots | Ax_n] = [\lambda_1 x_1 | \cdots | \lambda_n x_n] = M\Lambda$$

όπου

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A. Αφού τα n ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ο πίνακας M είναι αναστρέψιμος και η παραπάνω σχέση γράφεται επίσης ως

$$A = M\Lambda M^{-1} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad M^{-1}AM = \Lambda.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 6. *Αν ο A είναι ερμιτιανός τότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Αυτό ισχύει φυσικά και στην ειδική περίπτωση που ο A είναι πραγματικός, συμμετρικός πίνακας.*

Απόδειξη Έστω λ μια ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x. Τότε $Ax = \lambda x$. Επομένως $x^*Ax = \lambda x^*x$ ή

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{||x||^2}.$$

Αρκει να δείξουμε ότι $\lambda = \bar{\lambda}$ το οποίο ισχύει αφού $\overline{x^*Ax} = x^*A^*x = x^*Ax$ και συνεπώς τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής είναι πραγματικοί αριθμοί. ∎

Όπως είδαμε, για έναν οποιοδήποτε πίνακα, ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν ο πίνακας είναι ερμιτιανός (ή συμμετρικός, στην πραγματική περίπτωση) τότε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Θεώρημα 7. *Αν ο A είναι ερμιτιανός και x_i, x_j, είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j τότε $(x_i, x_j) = 0$.*

Απόδειξη Ισχύει ότι $Ax_i = \lambda_i x_i$ και επομένως $x_i^*A = \lambda_i x_i^*$ (όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $A = A^*$ και οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές). Πολλαπλασιάζοντας με x_j έχουμε $x_i^*Ax_j = \lambda_i x_i^* x_j$. Δεδομένου ότι $Ax_j = \lambda_j x_j$ έχουμε επίσης ότι $x_i^*Ax_j = \lambda_j x_i^* x_j$. Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $(\lambda_i - \lambda_j)x_i^* x_j = 0$ και αφού $\lambda_i \neq \lambda_j$ τα δύο ιδιοδιανύσματα πρέπει να είναι ορθογώνια. ∎

Πόρισμα 1. *Αν ο A είναι ερμιτιανός και έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $AU = U\Lambda$ και επομένως $A = U\Lambda U^*$.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας U ονομάζεται *ορθομοναδιαίος* αν $U^*U = I$. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει επίσης ότι $UU^* = I$ καθώς και ότι $U^* = U^{-1}$.

Λήμμα 1. *Ένας $n \times n$ πίνακας U διατηρεί αναλοίωτα τα μήκη αν και μόνο αν διατηρεί αναλλοίωτα τα εσωτερικά γινόμενα δηλαδή $||Ux|| = ||x||$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ αν και μόνο αν $(Ux, Uy) = (x, y)\ \forall x, y$.*

Απόδειξη Αν $(Ux, Uy) = (x, y)\ \forall x, y$, τότε θέτωντας $y = x$ έχουμε $||Ux||^2 = ||x||^2$. Για να δείξουμε το αντίστροφο επισημαίνουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Re(x,y) \\ ||x+iy||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Im(x,y) \end{aligned}$$

$$\Re(x,y) = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right), \tag{6.6}$$

$$\Im(x,y) = \frac{1}{2}\left(||x+iy||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right). \tag{6.7}$$

Η σχέση (6.6) προκύπτει κατ΄ ευθείαν από τον νόμο του συνημιτόνου ενώ η (6.7) από τον νόμο του συνημιτόνου για το διάνυσμα $x+iy$ λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\Re(x,iy) = \Re(-i(x,y)) = \Re(-i(\Re(x,y)+i\Im(x,y))) = \Re(-i\Re(x,y)+\Im(x,y)) = \Im(x,y)$. Παρόμοια έχουμε και τις σχέσεις

$$\Re(Ux,Uy) = \frac{1}{2}\left(\|U(x+y)\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2\right), \tag{6.8}$$

$$\Im(Ux,Uy) = \frac{1}{2}\left(\|U(x+iy)\|^2 - \|Ux\|^2 - \|Uy\|^2\right). \tag{6.9}$$

Εφ΄ όσον ο U διατηρεί τα μήκη, το δεξί μέλος της (6.6) είναι ίσο με το δεξί μέλος της (6.8) και το δεξί μέλος της (6.7) ίσο με το δεξί της (6.9). Αλλά αυτό σημαίνει ότι $\Re(Ux,Uy) = \Re(x,y)$ και $\Im(Ux,Uy) = \Im(x,y)$ που σημαίνει ότι $(Ux,Uy) = (x,y)$. ∎

6.2 Κανονικοί Πίνακες

Όπως θα αποδειξουμε λίγο πιο κάτω, όλοι οι ερμιτιανοί πίνακες έχουν διάσπαση της μορφής

$$A = U\Lambda U^* \tag{6.10}$$

όπου U ορθομοναδιαίος πίνακας και Λ διαγώνιος. Υπάρχουν βεβαίως και άλλοι πίνακες, μη ερμιτιανοί, για τους οποίους ισχύει η παραπάνω διάσπαση. Θέλουμε να βρούμε ένα χαρακτηρισμό για την κλάση των πινάκων για τη οποία ισχύει η διάσπαση της μορφής (6.10). Παρατηρείστε ότι η (6.10) γράφεται και ως $Au_i = \lambda_i u_i$ όπου $U = [u_1|\cdots|u_n]$, $u_i^* u_j = \delta_{ij}$ και οι ιδιοτιμές λ_i δεν είναι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους.[1] Συνεπώς, η κλάση που ζητάμε είναι *η κλάση των πινάκων για τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ένα πλήρες σετ από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα.* Ο λόγος για την προσεκτική αυτή διατύπωση οφείλεται στο γεγονός ότι, όταν ο πίνακας έχει ιδιοτιμές με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας τότε η διάσταση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες ιδιοτιμές μπορεί να είνα μεγαλύτερη της μονάδας. Σ΄ αυτή την περίπτωση η ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων είναι και ζήτημα επιλογής. Για παράδειγμα για τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

μπορούμε να επιλέξουμε τρία ορθογώνια ιδιοδιανύσματα, τα $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ και $(0,0,1)^T$. Δεν είναι όμως τα μόνα. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε και τα $(1,0,0)^T$, $(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^T$ και $(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})^T$ τα οποία είναι επίσης ορθογώνια ή ακόμη και τα $(1,0,0)^T$, $(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^T$ και $(0,0,1)^T$ τα οποία είναι μεν γραμμικά ανεξάρτητα δεν είναι όμως ορθογώνια.

[1]Ο συμβολισμός δ_{ij} το οποίο είναι 1 αν $i=j$ και 0 αν $i \neq j$ ονομάζεται δέλτα του Kroneker.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι

Θεώρημα 8. *Έστω H ένας $n{\times}n$ ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους). Τότε ο H έχει ιδιοδιανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ με $Hu_j = \lambda_j u_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ και $U^*HU = \Lambda$ όπου $U = [u_1 \mid \cdots \mid u_n]$ και $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής

Λήμμα 2. *Αν ένας πίνακας A απεικονίζει έναν υπόχωρο L_d του $\mathbb{C}^n$ με διάσταση $d \geq 1$ στον εαυτό του τότε ο A έχει ένα ιδιοδιάνυσμα στον L_d.*

Απόδειξη Αν ο L_d έχει διάσταση d, έστω $b_1, \ldots, b_d$ μια βάση του. Τα Ab_j είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $b_1, \ldots, b_d$ δηλαδή $Ab_j = m_{1j}b_1 + m_{2j}b_2 + \ldots + m_{dj}b_d$ ή $A[b_1 \mid \cdots \mid b_d] = BM$ όπου

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} m_{11} & m_{12} & & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{d1} & m_{d2} & & m_{dd} \end{array}\right].$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(\lambda I - M) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα (από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας) και συνεπώς ο πίνακας M έχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $My = \lambda y$, $y \neq 0$. Αφού $AB = BM$,

$$A(By) = BMy = B(\lambda y) = \lambda By.$$

Η τελευταία σειρά από ισότητες δείχνει ότι το By είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ. Επίσης το By προφανώς ανήκει στον L_d αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα B. Τέλος, $By \neq 0$ αφού $y \neq 0$ και οι στήλες του B είναι γραμμικά ανεξάρτητες. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος Από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, ο πίνακας H έχει ιδιοδιάνυσμα u_1 που αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή λ_1. Έστω ότι έχουμε βρεί k ορθογώνια μοναδιαία ιδιοδιανύσματα $u_1, \ldots, u_k$ με $1 \leq k \leq n$. Ορίζουμε L_{n-k} τον γραμμικό υπόχωρο που είναι ορθογώνιος στα $u_1, \ldots, u_k$. Αφού ο H είναι ερμιτιανός, θα δούμε ότι απεικονίζει τον L_{n-k} στον εαυτό του: Αν $(x, u_j) = 0$ όπου $Hu_j = \lambda_j u_j$ τότε $(Hx, u_j) = (x, Hu_j) = (x, \lambda_j u_j) = \lambda_j (x, u_j) = 0$. Με βάση το λήμμα, ο H έχει ιδιοδιάνυσμα στον L_{n-k}, έστω u_{k+1} το οποίο εξ ορισμού είναι ορθογώνιο στα $u_1, \ldots, u_k$ και το οποίο μπορούμε να το επιλέξουμε ώστε να είναι μοναδιαίο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσο $k < n$. ∎

Ορισμός 4. *Ένας πίνακας N ονομάζεται κανονικός (normal) αν αντιμετατίθεται με τον συζυγή ανάστροφό του, αν δηλαδή $NN^* = N^*N$.*

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ένας πίνακας που ικανοποιεί την (6.10) είναι κανονικός αφού

$$AA^* = (U\Lambda U^*)(U\Lambda U^*)^* = U\Lambda U^* U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^*$$

ενώ

$$A^*A = (U\Lambda U^*)^*(U\Lambda U^*) = U\Lambda^* U^* U\Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^*.$$

Οι δύο εκφράσεις όμως είναι ίσες αφού

$$\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}.$$

Ποιό δύσκολο είναι να δειξουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν ένας πίνακας είναι κανονικός τότε διαγωνοποιείται με ένα ορθομοναδιαίο πίνακα δηλαδή ικανοποιεί την (6.10). Αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 9. *Ένας πίνακας N ικανοποιεί την (6.10) αν και μόνο αν είναι κανονικός.*

6.3 Κανονική Μορφή του Schur

Θεώρημα 10. *Κάθε τετραγωνικός πίνακας μπορεί να αναχθεί σε άνω τριγωνικό μέσω ενός ορθομοναδιαίου μετασχηματισμού: $P^*AP = T$, όπου $t_{ij} = 0$ όταν $1 \le j < i$. Οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται στη διαγώνιο του T. Η διάσπαση αυτή ονομάζεται διάσπαση κατά Schur. Αν ο A και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές, ό P είναι επίσης πραγματικός και επομένως το ίδιο είναι και ο T.*

Απόδειξη. Έστω λ_1 μια ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x_1. Θεωρούμε οτι $\|x_1\| = 1$ και συμπληρώνουμε με τα ορθομοναδιαία διανύσματα w_i, $i = 2, \ldots, n$ που τα επιλέγουμε έτσι ώστε μαζύ με το x_1 να αποτελούν μια βάση του χώρου και ο πίνακας με στήλες $Q = [x_1, w_1, \ldots, w_n]$ να είναι ορθομοναδιαίος: $Q^*Q = I$. Γράφουμε $Q = [x_1, W]$ (όπου W ο $n \times (n-1)$ πίνακας με στήλες w_i, $i = 2, \ldots, n$). Αφού $Ax_1 = \lambda x_1$, θα έχουμε ότι

$$Q^*AQ = \begin{bmatrix} x_1^* \\ W^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1, & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^*Ax_1 & x_1^*AW \\ W^*Ax_1 & W^*AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^*AW \\ 0 & W^*AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

όπου $b = W^*A^*x_1$ είναι διάνυσμα στήλης με $n-1$ συνιστώσες και $C = W^*AW$ είναι πίνακας $(n-1) \times (n-1)$. Αν ο A είναι πίνακας 2×2 έχουμε τελειώσει αφού ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικός.

Στη γενική περίπτωση έχουμε την ακόλουθη επαγωγική απόδειξη: Δείξαμε ότι η αναπαράσταση ισχύει για κάθε πίνακα 2×2 που είναι η βάση της επαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για κάθε πίνακα $(n-1)\times(n-1)$. Τότε για τον πίνακα C της (6.11) ισχύει ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος V διάστασης $(n-1)\times(n-1)$ τέτοιος ώστε $V^*CV = T_1$ όπου T_1 τριγωνικός πίνακας διάστασης $(n-1)\times(n-1)$. Θεωρούμε τώρα τον $n\times n$ πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $U^*U = I$ και συνεπώς ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος. Έχουμε επίσης ότι ο $P = QU$ είναι ορθομοναδιαίος ως γινόμενο ορθομοναδιαίων πινάκων και

$$\begin{aligned} P^*AP &= U^*Q^*AQU = U^* \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^* \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^*V \\ 0 & V^*CV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^*V \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός και επομένως έχουμε συμπληρώσει την απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι ο A και ο P^*AP έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αφού ο P^*AP είναι τριγωνικός, τα διαγώνια στοιχεία του θα είναι οι ιδιοτιμές του και άρα και οι ιδιοτιμές του A. Τέλος παρατηρούμε ότι αν ο A και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί, τότε το x_1 και λ_1 θα είναι πραγματικοί. Μπορούμε σ′ αυτή την περίπτωση να διαπιστώσουμε με ένα επαγωγικό επιχείρημα ότι οι P και T είναι πραγματικοί πίνακες. □

6.4 Κανονικοί Πίνακες

Ορισμός 5. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται κανονικός αν $AA^* = A^*A$.*

Παρατηρείστε ότι αν ο A είναι ερμιτιανός ή συμμετρικός τότε είναι και κανονικός. Οι κανονικοί πίνακες είναι ακριβώς εκείνοι που διαγωνιοποιούνται από ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς όπως θα δούμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11. *Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει $P^*AP = \Lambda$, όπου Λ διαγώνιος αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση: Αν ο A είναι ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος έχουμε $A = P\Lambda P^*$ και συνεπώς

$$AA^* = (P\Lambda P^*)(P\Lambda^* P^*) = P\Lambda\Lambda^* P^* = P\Lambda^*\Lambda P^* = (P\Lambda^* P^*)(P\Lambda P^*) = A^*A.$$

Στην παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι Λ και Λ^* αντιμετατίθενται αφού είναι διαγώνιοι πινακες.

Για να δείξουμε την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι ο A είναι κανονικός. Είναι ορθομοναδιαία άνω τριγωνοποιήσιμος λόγω του θεωρήματος του Schur, όπως κάθε τετραγωνικός πίνακας, και συνεπώς $P^*AP = T$. Συνεπώς

$$TT^* = (P^*AP)(P^*A^*P) = P^*AA^*P = P^*A^*AP = (P^*A^*P)(P^*AP) = T^*T. \tag{6.13}$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα TT^* δίνονται από την έκφραση

$$(TT^*)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}t_{ji}^* = \sum_{j=1}^{i} t_{ij}\bar{t}_{ij} = \sum_{j=1}^{i} |t_{ij}|^2 \tag{6.14}$$

όπου, στην παραπάνω σχέση λάβαμε υπ΄ όψη ότι $t_{ij} = 0$ όταν $j > i$ αφού ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός. Ομοίως

$$(T^*T)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^*t_{ji} = \sum_{j=i}^{n} \bar{t}_{ji}t_{ji} = \sum_{j=i}^{n} |t_{ji}|^2 \tag{6.15}$$

Από τις σχέσεις (6.14) και (6.15) έχουμε, για $i = 1$,

$$|t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2$$

από την οποία συμπεραίνουμε, αφού $|t_{1j}|^2 \geq 0$, ότι

$$|t_{1j}|^2 = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{6.16}$$

Για $i = 2$,

$$|t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 = |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \cdots + |t_{2n}|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την (6.16) και απλοποιώντας συμπεραίνουμε ότι

$$|t_{2j}|^2 = 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, n. \tag{6.17}$$

Παρομοίως, για $i = 3$,

$$|t_{13}|^2 + |t_{23}|^2 + |t_{33}|^2 = |t_{33}|^2 + |t_{34}|^2 + \cdots + |t_{3n}|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την (6.16) και την (6.17) και απλοποιώντας διαπιστώνουμε ότι

$$|t_{3j}|^2 = 0, \qquad j = 4, 5, \ldots, n. \tag{6.18}$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε επομένως ότι $t_{ij} = 0$ όταν $j > i$ και επομένως ο άνω τριγωνικός πίνακας T είναι στην ουσία διαγώνιος. □

6.5 Το θεώρημα Cayley-Hamilton

6.5.1 Δυνάμεις πινάκων

Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στους πραγματικούς αριθμούς. Η n–οστή δύναμη του πίνακα ορίζεται ως $A^n := A \cdot A^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, $A^1 = A$, $A^0 = I$. Αν ο πίνακας A είναι *αναστρέψιμος*, τότε ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται με τον προφανή τρόπο και στους αρνητικούς ακέραιους εκθέτες. Αν $p(x) := a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ είναι ένα πολυώνυμο (με πραγματικούς συντελεστές ή μιγαδικούς συντελεστές), τότε ο πίνακας $p(A)$ ορίζεται ως $p(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I$.

6.5.2 Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα

Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί ένα πολυώνυμο, που ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα και που ορίζεται ως $\chi(x) := \det(xI - A)$. Είναι εύκολο να δει κανείς (από τον ορισμό της ορίζουσας) ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει την μορφή $\chi(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. (Στην παραπάνω έκφραση επισημαίνουμε ότι ο συντελεστής του x^n είναι μονάδα, ενώ ο σταθερός όρος είναι $c_0 = (-1)^n \det(A)$.) Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα και αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζες $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (όχι υποχρεωτικά διακριτές), τότε

$$\chi(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n).$$

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα ορίζουμε A_{ij} την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε την γραμμή i και την στήλη j από τον αρχικό πίνακα. Θέτουμε $C_{ij} := (-1)^{i+j} A_{ji}$. Τότε, αν $C := (C_{ij})$, $AC = \det(A) I$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{kj} (-1)^{i+j} = \det(A) \delta_{ik}$$

όπου $\delta_{ik} = 0$ αν $i \neq k$ και 1 αν $i = k$.

Θεώρημα 12 (Cayley-Hamilton). *Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, ισχύει δηλαδή ότι*

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0. \tag{6.19}$$

Απόδειξη: Έστω C το αλγεβρικό συμπλήρωμα του πίνακα $xI - A$. Τότε

$$(xI - A)C = \det(xI - A) I. \tag{6.20}$$

Λόγω του τρόπου με τον οποίο ο C προκύπτει από τον $xI-A$, ισχύει ότι $C = x^{n-1}B_{n-1}+ x^{n-2}B_{n-2} + \cdots + x^1B_1 + B_0$. Συνεπώς, από την (6.20) προκύπτει ότι

$$(xI - A)(x^{n-1}B_{n-1} + x^{n-2}B_{n-2} + \cdots + x^1B_1 + B_0) = x^nI + c_{n-1}x^{n-1}I + \cdots + c_1xI + c_0I$$

ή ισοδύναμα

$$x^nB_{n-1} + x^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + x(B_0 - AB_1) - AB_0 = x^nI + c_{n-1}x^{n-1}I + \cdots + c_1xI + c_0I.$$

Συνεπώς έχουμε τις ισότητες

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= Ic_{n-1} \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= Ic_{n-2} \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1I \\ -AB_0 &= c_0I. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με A^n, την δεύτερη με A^{n-1}, και ούτω καθ′ εξής και προσθέτωντας όλες τις εξισώσεις βλέπουμε ότι ισχύει η (6.21). ∎

Παρατήρηση: Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε είναι ακόμη ευκολότερο να αποδείξουμε το θεώρημα Caley-Hamilton. Πράγματι, σ′ αυτή την περίπτωση, υπάρχει αναστρέψιμος πίνακας M τέτοιος ώστε $A = M\Lambda M^{-1}$. (Ο Λ είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία του τις ιδιοτιμές του A ενώ οι στήλες του M είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.) Τότε, αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $A^k = (M\Lambda M^{-1})^k = M\Lambda^k M^{-1}$,

$$\begin{aligned} & A^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1A + c_0I \\ = \; & M\Lambda^nM^{-1} + c_{n-1}M\Lambda^{n-1}M^{-1} + c_{n-2}M\Lambda^{n-2}M^{-1} + \cdots + c_1M\Lambda M^{-1} + c_0M\Lambda^0M^{-1} \\ = \; & M\left(\Lambda^n + c_{n-1}\Lambda^{n-1} + c_{n-2}\Lambda^{n-2} + \cdots + c_1\Lambda + c_0I\right)M^{-1}. \end{aligned}$$

Ο διαγώνιος πίνακας που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση είναι μηδενικός γιατί, για οποιοδήποτε διαγώνιο στοιχείο του, έστω λ_i, ισχύει ότι $\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + c_{n-2}\lambda_i^{n-2} + \cdots + c_1\lambda_i + c_0 = 0$.

Η πλέον προφανής συνέπεια του θεωρήματος των Cayley-Hamilton είναι ότι, για έναν τετραγωνικό πίνακα $n \times n$, η n–οστή του δύναμη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n-1$ πρώτων δυνάμεών του.

6.6 Το ελάχιστο πολυώνυμο

Ένα πολυώνυμο p με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{F}$ (το οποίο στην περίπτωσή μας είναι οι πραγματικοί ή οι μιγαδικοί αριθμοί) ονομάζεται *μονικό* αν ο συντελεστής της υψηλότερης δύναμης της μεταβλητής είναι 1, αν δηλαδή είναι της μορφής $p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$). Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Συμβολίζουμε με $p(A)$ τον τετραγωνικό πίνακα $n \times n$ που ορίζεται ως $p(A) := A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \cdots + p_1 A + p_0 I$. Θεωρούμε το σύνολο όλων των μονικών πολυωνύμων p για τα οποία ισχύει ότι $p(A) = 0$. Το σύνολο αυτό δεν είναι κενό διότι περιέχει τουλάχιστον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, $\chi(x)$, το οποίο είναι βαθμού n, όπως προκύπτει από το θεώρημα Cayley-Hamilton. Έστω $m(x)$ το μονικό πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού για το οποίο ισχύει $m(A) = 0$. Το πολυώνυμο αυτό είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω k ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου. (Αναγκαστικά, $k \leq n$ αφού ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι n.) Ας υποθέσουμε ότι το $h(x)$ είναι επίσης μονικό, βαθμού k, και ισχύει ότι $h(A) = 0$. Τότε για το πολυώνυμο $p(x) := m(x) - h(x)$ ισχύει ότι $p(A) = m(A) - h(A) = 0$ και $\deg(p) < k$ αφού τόσο το m όσο και το h είναι μονικά. ($\deg(p)$ είναι ο βαθμός του p.) Αφού k είναι εξ υποθέσεως ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου, $p(x) \equiv 0$ και $m(x) \equiv h(x)$.

Δεδομένου ότι οι πίνακες που εξετάζουμε περιγράφουν γραμμικούς μετασχηματισμούς, είναι καλύτερο να μελετήσουμε απ' ευθείας τον γραμμικό μετασχηματισμό f. Έστω V ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, έστω $n = \dim(V)$, ορισμένος πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$. Αν $f : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τότε συμβολίζουμε με f^m την σύνθεση $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (m φορές). Ο f^m είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματιμός πάνω στον χώρο V. Αν $p(x) := a_m x^m + a_{m-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ είναι ένα πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{F}$, τότε με $p(f)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 I$ όπου I ο ταυτοτικός γραμμικός μετασχηματισμός πάνω στο V. Αν A είναι ο $n \times n$ πίνακας που εκφράζει τον γραμμικό μετασχηματισμό f ως προς μια βάση, έστω $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, τότε ο πίνακας που εκφράζει τον f^m ως προς την βάση αυτή είναι ο A^m και ο πίνακας που εκφράζει τον $p(f)$ είναι ασφαλώς ο $p(A) := a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I$ όπου I εδώ είναι ο ταυτοτικός πίνακας $n \times n$.

Θεώρημα 13. *Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας και $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε $p(A) = 0$ τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του A, $m(x)$, διαιρεί το $p(x)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Έφ' όσον $p(A) = 0$ ο βαθμός του $p(x)$ είναι μεγαλύτερος του βαθμού του $m(x)$. (Όπως είδαμε, από την μοναδικότητα του m δεν είναι δυνατόν να έχουμε $\deg(p) = \deg(m)$.) Αφού ο βαθμός του p είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον βαθμό του m, από τον αλγόριθμο της διαίρεσης των πολυωνύμων έχουμε $p(x) = q(x)m(x) + r(x)$ όπου ο βαθμός του $r(x)$ είναι αυστηρά μικρότερος από αυτόν του $m(x)$. Συνεπώς έχουμε $r(A) = p(A) - q(A)m(A) = 0$. 'ρα, αν το $r(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από εκείνον του ελάχιστου πολυωνύμου για το οποίο ισχύει ότι $r(A) = 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατον και επομένως θα ισχύει ότι $r(x) \equiv 0$ και $p(x) = q(x)m(x)$, το οποίο συνεπάγεται ότι το $m(x)$ διαιρεί το $p(x)$. ∎

6.7 Το ελάχιστο πολυώνυμο και η σχέση του με το πρόβλημα της διαγωνοποίησης

Έστω V γραμμικός χώρος διάστασης n (στους μιγαδικούς αριθμούς) και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση σ' αυτόν. Έστω A ο πίνακας που περιγράφει αυτή την απεικόνιση ως προς μια συγκεκριμένη βάση, $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Θα απαντήσουμε τα εξής δύο ερωτήματα:

1. Πότε υπάρχει ένας μη ιδιόμορφος πίνακας S (δηλαδή μια αλλαγή βάσης) τέτοιος ώστε ο $\Lambda := S^{-1}AS$ να είναι διαγώνιος;

2. Αν αυτό δεν είναι εφικτό ποιά είναι η πλησιέστερη στη διαγώνια μορφή που μπορεί να πάρει ο $S^{-1}AS$;

Έστω $\chi_A(x) := (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, όπου λ_i, $i = 1, \ldots, r$ είναι οι *διακριτές* ιδιοτιμές του A και ν_i οι αντίστοιχες *αλγεβρικές πολλαπλότητες*. Ισχύει επομένως ότι $n_1+n_2+\cdots+n_r = n$. Υπενθυμίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές και τις αλγεβρικές τους πολλαπλότητές και συνεπώς δεν αλλάζει σε οποιαδήποτε βάση και αν εκφράσουμε την γραμμική απεικόνιση f. Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο χαρακτηρίζει την f και δεν διακρίνει ανάμεσα στον πίνακα A και στον $S^{-1}AS$. Δεδομένου του θεωρήματος Caley–Hamilton, αν I είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, ισχύει ότι

$$\chi(f) = (f-\lambda_1 I)^{n_1}\cdots(f-\lambda_r I)^{n_r} = 0, \tag{6.21}$$

δηλαδή, ο μετασχηματισμός $\chi(f)$ είναι ταυτοτικά μηδενικός.

Συμβολίζουμε τον μηδενόχωρο ενός γραμμικού μετασχηματισμού, $g : V \to V$ με $\ker g := \{x \in V : g(x) = 0\}$.

Ορισμός 6. *Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f τότε ο μηδενόχωρος $ker(f-\lambda I)$ ονομάζεται* ιδιόχωρος *της λ. Η διάσταση του $ker(f-\lambda)$ ονομάζεται* γεωμετρική πολλαπλότητα *της λ.*

Έστω $V_i = \ker(f-\lambda_i I)$ ο μηδενόχωρος του γραμμικού μετασχηματισμού $f-\lambda_i I$. Αν $v \in V_i$ τότε $(f-\lambda_i I)v = 0$ το οποίο σημαίνει ότι $f(v) = \lambda_i v$ ή, αν A είναι ο πίνακας που περιγράφει τον γραμμικό μετασχηματισμό f ως προς μια συγκεκριμένη βάση, $Av = \lambda_i v$, δηλαδή το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο V_i, είναι γραμμικός υπόχωρος του V ως μηδενόχωρος ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Η διάσταση του V_i, $\gamma_i := \dim(V_i)$ ονομάζεται *γεωμετρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_i. Προφανώς, γ_i είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i.

Ορισμός 7. *Ένας πίνακας A, $n \times n$ ονομάζεται* διαγωνιοποιήσιμος *αν υπάρχει μη ιδιόμορφος (δηλαδή αντιστρέψιμος) πίνακας $n \times n$, έστω S, και διαγώνιος πίνακας $n \times n$, έστω Λ, τέτοιος ώστε*

$$S^{-1}AS = \Lambda. \tag{6.22}$$

Θεώρημα 14. *Ένας πίνακας $n \times n$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Απόδειξη: Παρατηρείστε ότι η (6.22) εκφράζεται ισοδύναμα ως

$$AS = S\Lambda \tag{6.23}$$

και αν οι στήλες του πίνακα S είναι $S = [s_1, \ldots, s_n]$ και ο διαγώνιος πίνακας Λ είναι $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ τότε η (6.23) γράφεται ως

$$As_i = \lambda_i s_i. \tag{6.24}$$

Από τις σχέσεις (6.23), (6.24) είναι σαφές ότι οι στήλες του S είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα Λ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Η γραμμική αναξαρτησία των ιδιοδιανυσμάτων είναι αναγκαία προκειμένου ο πίνακας S να είναι αναστρέψιμος. ∎

Ισοδύναμα λέμε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f : V \to V$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του V η οποία να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.

Πόρισμα 2. *Ένας πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $n_i = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, r$ δηλαδή αν η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την γεωμετρική πολλαπλότητά της.*

Η πρόταση αυτή είναι προφανής συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος διότι μόνο στην περίπτωση αυτή θα έχει ο πίνακας A n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Η επόμενη πρόταση συνδέει το πρόβλημα της διαγωνοποίησης ενός πίνακα με το ελάχιστο πολυώνυμό του:

Θεώρημα 15. *Έστω A ένας πίνακας $n \times n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ οι διακριτές του ιδιοτιμές. Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε το $p(x) := (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A*

Απόδειξη: Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε υπάρχει βάση που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A, έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ισχύει ότι $p(A)v_i = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_r I)v_i$. Όμως, επειδή οι παράγοντες $(A - \lambda_j I)$ αντιμετατίθενται, ισχύει ότι

$$p(A)v_i = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \cdots (A - \lambda_r I)(A - \lambda_i I)v_i = 0.$$

Η παραπάνω σχέση, μαζύ με το γεγονός ότι τα v_i είναι βάση του χώρου, συνεπάγεται ότι $p(A)x = 0$ για κάθε διάνυσμα x του χώρου. Συνεπώς $p(A) = 0$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο, $m(x)$, διαιρεί το $p(x)$. Αυτό σημαίνει ότι το m είναι το γινόμενο κάποιων από τους όρους $(x - \lambda_j)$, δηλαδή $m(x) = \prod_{j\in\mathscr{M}}(x - \lambda_j)$ όπου $\mathscr{M} \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ (γνήσιο υποσύνολο). Αν υποθέσουμε ότι $i \neq \mathscr{M}$, δηλαδή ότι ο όρος $(x - \lambda_i)$ δεν είναι όρος του m. Τότε, αν v_i είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και $j \neq i$, έχουμε $(A - \lambda_j I)v_i = \lambda_i v_i - \lambda_j v_i = (\lambda_j - \lambda_i)v_i$. Επομένως

$$m(A)v_i = \left(\prod_{j\in\mathscr{M}}(A - \lambda_j I)\right) v_i = \left(\prod_{j\in\mathscr{M}}(\lambda_i - \lambda_j)\right) v_i.$$

Δεδομένου ότι $j \neq i$ για κάθε $j \in \mathscr{M}$ προκύπτει ότι $m(A)v_i \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $m(A) \neq 0$. Συνεπώς όλοι οι παράγοντες του $p(x)$ περιέχονται στο $m(x)$ και επομένως το $m(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο. ∎

Το παραπάνω θεώρημα σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα *έχει μόνο απλές ρίζες*, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα. Θα δούμε στη συνέχεια ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα έχει μόνο απλές ρίζες (οι οποίες βεβαίως θα είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα) τότε ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος. Προκειμένου να αποδείξουμε αυτή την αντίστροφη πρόταση θα χρειαστούμε μερικές επιπλέον έννοιες.

6.7.1 Αθροίσματα και Ευθέα Αθροίσματα Υποχώρων

Έστω V ένας γραμμικός χώρος διάστασης n και U, W, γραμμικοί υπόχωροι του V. Το σύνολο

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του V και ονομάζεται *άθροισμα* των υποχώρων U και W. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα δύο υποχώρων U και W είναι το σύνολο των στοιχείων του V που μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα ενός στοιχείου του U και ενός στοιχείου του V, *όχι υποχρεωτικά με μοναδικό τρόπο.* Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $U + W$ είναι πράγματι γραμμικός υπόχωρος του V: Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και $x_1, x_2 \in U + W$ τότε υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ και $w_1, w_2 \in W$ (όχι υποχρεωτικά μοναδικά) τέτοια ώστε $x_1 = u_1 + w_1$ και $x_2 = w_1 + w_2$, από τον ορισμό του συνόλου $U + W$. Συνεπώς,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2).$$

Όμως $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ επειδή ο U είναι γραμμικός υπόχωρος και ομοίως $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$. Επομένως το $\alpha x_1 + \beta x_2$ γράφεται ως άθροισμα ενός στοιχείου του U και ενός στοιχείου του W και συνεπώς ανήκει στο άθροισμα $U + W$, σύμφωνα με τον ορισμό.

Αν οι γραμμικοί υπόχωροι U και W ικανοποιούν επιπλέον την σχέση $U \cap V = \{0\}$ τότε το άθροισμά τους ονομάζεται *ευθύ άθροισμα* και συμβολίζεται ως $U \oplus W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$. Παρατηρείστε ότι αν $x \in U \oplus W$ τότε το x γράφεται σαν άθροισμα ενός στοιχείου του U και ενός στοιχείου του V *με μονοαδικό τρόπο.* Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ όπου $u_i \in U$, $w_i \in W$ για $i = 1, 2$, τότε $u_1 - u_2 = w_1 - w_2$. Όμως, αφού οι U, W είναι γραμμικοί υπόχωροι, $u_1 - u_2 \in U$ και $w_1 - w_2 \in W$. Συνεπώς, λόγω της ισότητας των διαφορών και του γεγονότος ότι η τομή των U, W, είναι το μηδενικό στοιχείο του γραμμικού χώρου, $u_1 - u_2 = 0$ και παρόμοια $w_1 - w_2 = 0$.

Ορισμός 8. *Ο V είναι το* ευθύ άθροισμα *των υποχώρων $V_1, \dots, V_r$ αν κάθε διάνυσμα $v \in V$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $v = v_1 + \cdots + v_r$ όπου $v_i \in V_i$. Το γεγονός αυτό το εκφράζουμε γράφοντας $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.*

Πρόταση 3. *Αν V_i, $i = 1, 2, \dots, r$ είναι υπόχωροι του V, B_i είναι βάση του V_i και $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, τότε το σύνολο $\cup_{i=1}^r B_i$ είναι βάση του V.*

6.7.2 Πολυώνυμο Παρεμβολής του Lagrange

Δεδομένων n ζευγών πραγματικών αριθμών, (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$ ζητείται πολυώνυμο $p(x)$ (βαθμού $n - 1$ το πολύ) τέτοιο ώστε $p(x_i) = y_i$. Το ζητούμενο πολυώνυμο που ονομάζεται πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange μπορεί κανείς εύκολα να δει ότι είναι μοναδικό και δίδεται από την εκφραση

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

ή ισοδύναμα

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, L_i(x) \qquad \text{όπου} \qquad L_i(x) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Θεώρημα 16. *Έστω V γραμμικός χώρος διάστασης n και f γραμμικός μετασχηματισμός $f : V \to V$. Έστω λ_i, $i = 1, 2, \dots, r$ οι διακριτές ιδιοτιμές του f. Τότε, υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας που εκφράζει τον μετασχηματισμό f είναι διαγώνιος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του f είναι το $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι εύκολη και την έχουμε ήδη αποδείξει στο Θεώρημα (15). Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$ και θα αποδείξουμε ότι $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, όπου V_i είναι ο μηδενόχωρος του $f - \lambda_i I$ δηλαδή ο γραμμικός υπόχωρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός ιδιοδιανυσμάτων του f και επομένως ότι υπάρχει βάση του V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του

f, πράγμα που σημαίνει ότι στην βάση αυτή ο f θα εκφράζεται από ένα διαγώνιο πίνακα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το ελάχιστο πολυώνυμο έχει απλές ρίζες. Ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$p_i(x) \; = \; \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \frac{x-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}, \qquad i=1,2,\ldots.$$

Παρατηρείστε ότι

$$p_i(\lambda_k) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k=i \\ 0 & \text{αν} \quad k\neq i. \end{cases}$$

Τα πολυώνυμα $p_i(x)$ είναι βαθμού το πολύ $r-1$ και επομένως το πολυώνυμο

$$p(x) \; = \; \sum_{i=1}^{r} p_i(x)$$

είναι βαθμού το πολύ $r-1$. Επειδή το πολυώνυμο $p(x)-1$ έχει είναι επίσης το πολυ βαθμού $r-1$ και έχει r ρίζες, τις $x_1, x_2, \ldots, x_r$, συμπεραίνουμε ότι είναι ταυτοτικά το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή $p(x)-1\equiv 0$. Επομένως $p(f)=I$ ή ισοδύναμα

$$I = \sum_{i=1}^{r} p_i(f).$$

Συνεπώς, για κάθε $v\in V$, $v=\sum_{i=1}^{r} p_i(f)v$. Θέτουμε $v_i = p_i(f)v$. Ισχύει ότι

$$(f-\lambda_i I)v_i = (f-\lambda_i I)p_i(f)v = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)} \left(\prod_{j=1}^{r}(f-\lambda_j I)\right) v = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)}\, m(f)v = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $v_i \in V_i = \ker(f-\lambda_i I)$. Ισχύει όμως ότι $V_i\cap V_j = \{0\}$ όταν $i\neq j$ διότι αν $v\in V_i$ τότε $fv=\lambda_i v$ και αν $v\in V_j$ τότε $fv=\lambda_j v$. Από τις δυο αυτές σχέσεις $\lambda_i v=\lambda_j v$ ή $(\lambda_i-\lambda_j)v=0$ και συνεπώς, αφού $\lambda_i\neq\lambda_j$, $v=0$. Επομένως $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r$.

$\square$

Θεώρημα 17. *Αν ο πίνακας A είναι ερμιτιανός, το ελάχιστο πολυώνυμό του έχει απλές ρίζες.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A δεν έχει απλές ρίζες. Τότε υπάρχει λ και πολυώνυμο $p(x)$ τέτοια ώστε $m(x)=(x-\lambda)^2p(x)$. Αυτό σημαίνει ότι, αν θέσουμε $q(x)=(x-\lambda)p(x)$ ο πίνακας $q(A)$ δεν είναι μηδενικός (άλλως το m δεν θα ήταν το ελάχιστο πολυώνυμο) και επομένως υπάρχει στοιχείο v του χώρου V τέτοιο ώστε $w=q(A)v\neq 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} 0 \;&<\; \langle w,w\rangle = \langle q(A)v, q(A)v\rangle = \langle (A-\lambda I)p(A)v, (A-\lambda I)p(A)v\rangle = \langle p(A)v, (A-\lambda I)^2 p(A)v\rangle \\ &=\; \langle p(A)v, m(A)v\rangle = \langle p(A)v, 0\rangle = 0 \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. (Στις παραπάνω ισότητες χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού ο A είναι ερμιτιανός, και ο $A-\lambda I$ είναι ερμιτιανός, και επομένως, για οποιαδήποτε $x,y\in V$, $\langle (A-\lambda I)x,y\rangle = \langle x,(A-\lambda I)y\rangle$.) $\square$

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ερμιτιανοί πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι, κάτι που έχουμε ήδη δει.

Στην γενική περίπτωση, όταν ο γραμμικός μετασχηματισμός f δεν είναι υποχρεωτικά διαγωνιοποιήσιμος, το ελάχιστο πολυώνυμο έχει την μορφή $m(x) = (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_r)^{\mu_r}$ όπου $1 \leq \mu_i \leq n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες του χαρακτηριστικού αλλά ενδεχομένως με μικρότερη πολλαπλότητα. Ο πίνακας ειναι διαγωνιοποιήσιμος αν $\mu_i = 1$ για $1, \ldots, r$.

Παράδειγμα: Θεωρείστε τους δύο πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Και οι δύο έχουν χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(x) = (x-2)(x-1)^2$. Όμως, αν κάνουμε τις πράξεις βλέπουμε ότι $(A - I)(A - 2I) \neq 0$ συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $(x-2)(x-1)^2$ και ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. Όσον αφορά τον πίνακα B, $(B-I)(B-2I) = 0$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του B είναι το $(x-2)(x-1)$. Αυτό σημαίνει ότι ο B είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Αν ένας πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε μπορεί να τεθεί με μια αλλαγή βάσης στη μορφή Jordan. Η μορφή αυτή είναι σχεδόν διαγώνια με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και μονάδες πάνω από την διαγώνιο για τις ιδιοτιμές εκείνες των οποίων η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη από την αλγεβρική. Χωρίς να μπούμε στις λεπτομέρειες ας δούμε το εξής παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $(x-2)^2$ (Η ιδιοτιμή 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2). Έχει όμως γεωμετρική πολλαπλότητα 1 γιατί μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2, το $(1,1)^T$. Συνεπώς, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι επίσης το $(x-2)^2$. Ο πίνακας B μπορεί να γραφεί με μια αλλαγή βάσης στη μορφή Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το e^{Jt} μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n$ και να υπολογίσουμε τις δυνάμεις

$$J^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

ή να λύσουμε το διαφορικο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

πρώτα με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ προκειμένου να προσδιορίσουμε την πρώτη στήλη του πίνακα e^{Jt} και στη συνέχεια με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ώστε να προσδιορίσουμε την δεύτερη στήλη.

Αν ακολουθήσουμε την πρώτη μέθοδο έχουμε

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n2^{n-1} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία εξίσωση, εκτός από την σειρά για την εκθετική συνάρτηση, χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} 2^{n-1} = te^{2t}$.

Ορισμός 9. *Δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$ ονομάζονται πρώτα μεταξύ τους (στους μιγαδικούς αριθμούς) αν δεν έχουν κοινές ρίζες.*

Θεώρημα 18. *Αν τα f, g είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους τότε υπάρχουν πολυώνυμα $a(x)$, $b(x)$ τέτοια ώστε $a(x)f(x) + b(x)g(x) \equiv 1$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\deg(f) \geq \deg(g)$. Ας δούμε πρώτα την ειδική περίπτωση όπου $\deg(g) = 0$ δηλαδή το g είναι το σταθερό πολυώνυμο $g(x) \equiv \theta$ (όπου $\theta \in \mathbb{C}$). Τότε, θέτοντας $a(x) \equiv 1$, $b(x) = \theta^{-1}(1 - f(x))$ βλέπουμε ότι ισχύει ταυτοτικά $1 \cdot f(x) + \theta^{-1}(1 - f(x)) \cdot \theta = 1$. Συνεπώς, η πρόταση ισχύει στην περίπτωση αυτή, δηλαδή ισχύει για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0$. Επαγωγικά: Έστω ότι ισχύει για $\deg(f) + \deg(g) \leq n - 1$. Αν $\deg(f) + \deg(g) = n$ τότε

$$f(x) = p(x)g(x) + r(x).$$

Έστω $\deg(r) = 0$. Αν $r(x) \equiv 0$ τότε αναγκαστικά $g(x) \equiv C$, (άλλως οι f, g θα είχαν ρίζα από κοινού) και συνεπώς η πρόταση ισχύει. Αν $\deg(r) > 0$ τότε τα g και r δεν έχουν κοινή ρίζα (γιατί αν είχαν τότε θα ήταν και ρίζα της f). Αφού $\deg(r) < \deg(g)$ και, επειδή $\deg(g) < \deg(f)$, $\deg(r) + \deg(g) < \deg(g) + \deg(f) = n$, από την επαγωγική υπόθεση

$$r(x)u(x) + g(x)v(x) \equiv 1.$$

Συνεπώς,

$$f(x)u(x) = p(x)u(x)g(x) + r(x)u(x) = p(x)g(x)u(x) + 1 - g(x)v(x)$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(x)u(x) + g(x)[v(x) - p(x)u(x0] \equiv 1.$$

□

6.8 Ασκήσεις

Πρόβλημα 1. Να διαγωνιοποιήσετε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

και να υπολογίσετε τον A^n για $n \in \mathbb{N}$

Λύση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & & \\ 3 & 9 & & \\ & & 1 & -3 \\ & & -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 10 & & \\ & & 0 & \\ & & & 10 \end{bmatrix}$$

Αφού ο πίνακας A είναι συμμετρικός τα ιδιοδιανύσματα μπορεί να επιλεγούν με τρόπο που να είναι ορθογώνια και αυτό έγινε εδώ. (Λέμε «μπορεί να επιλεγούν» και όχι «είναι» επειδή οι ιδιοτιμές δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.) Συνεπώς, κανονικοποιώντας έχουμε την αναπαράσταση

$$A = U\Lambda U^T$$

όπου

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

και Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών. Παρατηρείστε ότι ο U είναι συμμετρικός συνεπώς $U^T = U$. 'ρα ισχύει $U^2 = I$.

$$A^n = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 10^{n-1} & & \\ & & 0 & \\ & & & 10^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, μετά από στοιχειώδεις πράξεις έχουμε ότι

$$A^n = 10^{n-1}A.$$

Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει αφού μπορεί κανείς να δει με λίγη σκέψη ότι ο A είνα βαθμωτό πολλαπλάσιο ενός πίνακα προβολής.

Πρόβλημα 2. Να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και να υπολογίσετε τον B^n για $n \in \mathbb{N}$

Λύση: Αφού ο πίνακας είναι τριγωνικός οι ιδιοτιμές βρίσκονται στην διαγώνιο και είναι οι 0, 1 και 2. Βρίσκοντας τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$B^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 3. Ποιοι από τους πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \\ 2 & 8 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

μπορούν να διαγωνοποιηθούν με ένα ορθομοναδιαίο πίνακα, δηλαδή για ποίους από τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να γράψουμε $A_i = U_i \Lambda_i U_i^H$ όπου U_i ορθομοναδιαίος και Λ_i διαγώνιος $(i = 1, 2, 3, 4)$ με στοιχεία στο $\mathbb{C}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 4. α) Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3 καθώς και τον e^{tA}. β) Να επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 5. α) Πότε ένας πίνακας ονομάζεται ορθομοναδιαίος; Δείξτε ότι αν ο U είναι ορθομοναδιαίος τότε είναι και ο U^2. β) Πότε είναι το γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων $n \times n$ συμμετρικός πίνακας;

Πρόβλημα 6. Έστω v διάνυσμα στήλης του $\mathbb{R}^n$ με στοιχεία $v_1, \ldots, v_n$. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = vv^T = \begin{bmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & \cdots & v_1v_n \\ v_2v_1 & v_2v_2 & \cdots & v_2v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_nv_1 & v_nv_2 & \cdots & v_nv_n \end{bmatrix}$$

έχει n πραγματικές ιδιοτιμές (όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους) και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Περιγράψτε την περίπτωση $n = 3$, $v^T = (1, 1, 2)$.

Πρόβλημα 7. Λύστε με διαγωνοποίηση το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τον A^{-1} με την βοήθεια του θεωρήματος Cayley–Hamilton.

Πρόβλημα 10. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

και να δείξετε ότι τα $(1, -1)$ και $(1, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα.

Πρόβλημα 11. Έστω ο πίνακας

$$Q = \begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix}$$

όπου οι τετραγωνικοί 2×2 πίνακες K_1, K_2, δίδονται από τις

$$K_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2,$$

και τα υπόλοιπα στοιχεία του Q είναι μηδενικά. Να δείξετε ότι $\|Qx\| = \|x\|$, δηλαδή ότι ο Q διατηρεί τα μήκη. Να βρείτε επίσης τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αν $\theta_1 = \pi/4$ και $\theta_2 = \pi/2$.

Ασκηση 6.8.1. Θεωρείστε τον πίνακα $U = I - 2ww^T$ όπου $w^T = \frac{1}{9}(2,2,1)$. Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς σκεφτείτε ποιές πρέπει να είναι οι ιδιοτιμές και ποια τα ιδιοδιανύσματα του U με βάση την γεωμετρία. Επαληθεύστε τις σκέψεις σας.

Ασκηση 6.8.2. Έστω P ο πίνακας μεταθέσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

διάστασης n. Να δείξετε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του P είναι το $x^n - 1$. Αν $\omega = e^{2\pi i/n}$ να δείξετε ότι το ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ω^{n-r} δίνεται από την

$$x_r = (\omega^r, \omega^{2r}, \ldots, \omega^{nr})^T, \quad r = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.25}$$

Δείξτε ότι, αν

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ & & \cdots & & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

και $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$, τότε $A = f(P)$. Συμπεράνετε ότι οι ιδιοτιμές του A δίνονται από τις $f(\omega^{n-r})$, $r = 1, 2, \ldots, n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_r που δίνονται από την (6.25).

Ασκηση 6.8.3. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε επίσης το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα.

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Πινάκων

7.1 Πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικές συναρτήσεις

Ας θεωρήσουμε ένα (τετραγωνικό) πίνακα A, $n \times n$ του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής: $a_{ij}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα είναι συνεχείς, διαφορίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο του $A(t)$ ως

$$\frac{d}{dt}A(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(A(t+\delta) - A(t)\right)$$

Συνεπώς $[\frac{d}{dt}A(t)]_{ij} = \frac{d}{dt}[A(t)]_{ij}$ (δηλαδή το στοιχείο ij της παραγώγου του πίνακα A είναι η παράγωγος του στοιχείου ij του πίνακα A ή με άλλα λόγια ο πίνακας παραγωγίζεται στοιχείο προς στοιχείο). Για παράδειγμα, αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t & t^2 \end{bmatrix},$$

τότε

$$A'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{bmatrix}, \qquad B'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$ ενώ αντίθετα $B(t)B'(t) \neq B'(t)B(t)$. Εν γένει οι πίνακες A και A' δεν αντιμετατίθενται.

Από τον ορισμό μπορούμε να δούμε πώς μεταβάλλονται οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης πραγματικών συναρτήσεων στη περίπτωση των πινάκων.

Πρόταση 4. *Αν A, B είναι παραγωγίσιμοι τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$,*

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(AB)' &= \lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}\left(A(t+\delta)B(t+\delta)-A(t)B(t)\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}\left(A(t+\delta)B(t+\delta)-A(t+\delta)B(t)+A(t+\delta)B(t)-A(t)B(t)\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}A(t+\delta)\left(B(t+\delta)-B(t)\right)+\lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}\left(A(t+\delta)-A(t)\right)B(t)\\ &= A'B+AB' \end{aligned} \tag{7.1}$$

∎

Αν στην πρόταση που μόλις δείξαμε πάρουμε $A = B$ έχουμε $(A^2)' = A'A + AA'$. Αν οι πίνακες A και A' αντιμετατίθενται τότε $(A^2)' = 2AA' = 2A'A$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι $(A^3)' = A'A^2 + AA'A + A^2A'$, $(A^4)' = A'A^3 + AA'A^2 + A^2A'A + A^3A'$, και γενικά, για κάθε ακέραιο m,

$$(A^m)' = \sum_{k=0}^{m-1} A^k A' A^{m-1-k}.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και θέσουμε $B = A^{-1}$ τότε έχουμε $0 = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})'$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.

7.2 Το εκθετικό ενός τετραγωνικού πίνακα

Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ μπορούμε να ορίσουμε το εκθετικό του μέσω της άπειρης σειράς

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k \tag{7.2}$$

Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η συνάρτηση $E(t) := e^{At}$, $t \in \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται παρόμοια ως

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \tag{7.3}$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σειρά όρο προς όρο διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $E(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $E'(t) = AE(t) = E(t)A$ με αρχική συνθήκη $E(0) = I$. (Παρατηρήστε επίσης ότι ο πίνακας e^{tA} αντιμετατίθεται με τον A.)

7.2.1 Υπολογισμός του εκθετικού ενός πίνακα με αναγωγή στη διαγώνια μορφή

Ένας απλπός τρόπος υπολογισμού του e^{tA} βασίζεται στην διαγωνοποίηση του A, υπό την προϋπόθεση ότι έχει ένα πλήρες σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $x_1, x_2, \dots, x_n$. Αν θέσουμε $S = [x_1| \dots |x_n]$ και $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ τον διαγώνιο πίνακα με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A τότε

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

και

$$A^k = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} \cdots S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^k S^{-1}.$$

Συνεπώς, από την σειρά (7.3) έχουμε

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S\Lambda^k S^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\Lambda^k\right) S^{-1} = S e^{t\Lambda} S^{-1} \tag{7.4}$$

όπου $e^{t\Lambda} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$.

7.3 Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων

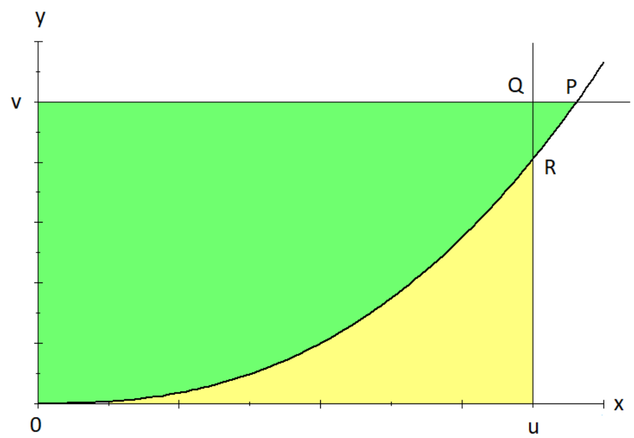
Ο λόγος που παρεμβάλουμε την συζήτηση για τις νόρμες που ακολουθεί είναι προκειμένου να δικαιολογήσουμε θεωρητικά τα ζητήματα σύγκλισης που προκύπτουν, για παράδειγμα, από τον ορισμό (7.2). Ξεκινάμε την ενότητα αυτή με δύο σημαντικές ανισότητες.

7.3.1 Η ανισότητα του Hölder

Πρόταση 5. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^+$ και $p, q \in [1, \infty)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{7.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^{p-1}$. Ισχύει ότι $\int_0^u x^{p-1} dx = \frac{u^p}{p}$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι το εμβαδόν του χωρίου $0uR$ (με κίτρινο χρώμα στο σχήμα). Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Γι΄ αυτή ισχύει ότι $\int_0^v y^{\frac{1}{p-1}} dy = \frac{v^{1+\frac{1}{p-1}}}{1+\frac{1}{p-1}} = \frac{v^q}{q}$ (Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι $1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$). Το δεύτερο αυτό ολοκλήρωμα



Σχήμα 7.1: Η ανισότητα του Hölder

είναι το εμβαδόν του χωρίου $0Pv$ στο σχήμα (με πράσινο χρώμα). Από το σχήμα είναι σαφές ότι

$$uv \leq \int_0^u x^{p-1}dx + \int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

επειδή το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $0uR$ και $0Pv$ υπερβαίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου $0uQv$ κατά το εμβαδόν του PQR. Έτσι δείξαμε ότι ισχύει η 7.12. Από το σχήμα επίσης φαίνεται ότι η ισότητα στην (7.12) ισχύει μόνο αν το εμβαδόν του PQR είναι μηδέν πράγμα που συμβαίνει αν $v = u^{p-1}$ ή ισοδύναμα $v^q = u^{q(p-1)}$ ή $v^q = u^p$. (Το τελευταίο ισχύει γιατί $p^{-1} + q^{-1} = 1$ συνεπάγεται $p = q(p-1)$.) □

Εφαρμόζοντας τη σχέση (7.12) για τις θετικές ποσότητες $\frac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $\frac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$, έχουμε

$$\frac{|x_i|^p}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \geq \frac{|x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

και αθροίζοντας ως προς i:

$$\frac{1}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q}\sum_{i=1}^n |y_i|^q \geq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Παρατηρείστε όμως ότι $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^p$ όπως και $\sum_{i=1}^n |y_i|^q = \|\boldsymbol{y}\|_q^q$. Επομένως, δεδομένου ότι $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει την ανισότητα του Hoelder:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{7.6}$$

7.3.2 Η ανισότητα του Minkowski

Αν $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ και $p \geq 1$ τότε

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p. \tag{7.7}$$

Η ανισότητα αυτή προφανώς ισχύει όταν $p = 1$. (Στην περίπτωση αυτή γίνεται η τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή.) Επομένως υποθέτουμε ότι $p > 1$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p^{1+p/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p \, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}
\end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \leq \|\boldsymbol{y}\|_p \, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q} + \|\boldsymbol{y}\|_p \, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p/q}$$

απ΄ όπου προκύπτει η (7.14) λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $p - p/q = 1$.

7.3.3 Νόρμες διανυσμάτων

Έστω V ένας γραμμικός χώρος στον $\mathbb{C}$ και $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ μια συνάρτηση από τον V στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

N1. $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ για κάθε $x \in V$ και $\alpha \in \mathbb{C}$.

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in V$. (Τριγωνική Ιδιότητα)

Η νόρμα γενικεύει την έννοια του μήκους ενός διανύσματος. Αν ο γραμμικός χώρος V είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο τότε η *επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο* είναι η

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{7.8}$$

Η νόρμα αυτή ονομάζεται και *ευκλίδεια νόρμα*. Στην περίπτωση που ο V είναι ο $\mathbb{C}^n$ είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η επαγώμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί πράγματι τις ιδιότητες του ορισμού. Πράγματι, αν $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, τότε $(\langle x, x\rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ απ′ όπου βλέπουμε ότι η $N1$ ισχύει. Επίσης η $N2$ ισχύει διότι $\|\alpha x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha|\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha|\|x\|$.

Τέλος, προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι η $N3$ ισχύει παρατηρούμε ότι, αν $x, y \in V$ τότε

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\,, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες στην παραπάνω σχέση προκύπτει η $N3$.

Η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι η μόνη που έχει ενδιαφέρον. Ανήκει σε μια κατηγορία ευρέως χρησιμοποιούμενων νορμών που ονομάζονται p–νόρμες και οι οποίες ορίζονται ως εξής όταν για $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty]. \tag{7.9}$$

Όταν $p = 2$ ο παραπάνω ορισμός μας δίνει την ευκλίδεια νόρμα (7.8). Ας βεβαιωθούμε ότι ο ορισμός (7.9) ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες που πρέπει να διαθέτει μια νόρμα. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $p \in [1, \infty)$. Η περίπτωση $p = \infty$ είναι ιδιάζουσα και θα την δούμε στη συνέχεια. Το γεγονός ότι ο ορισμός (7.9) ικανοποιεί τις $N1$ και $N2$ είναι εύκολο να το διαπιστώσετε και το αφήνουμε ως άσκηση. Μένει να βεβαιωθούμε ότι ικανοποιείται και η τριγωνική ιδιότητα, ότι δηλαδή αν $x, y \in \mathbb{C}^n$ τότε

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{7.10}$$

Στην γενική περίπτωση για την απόδειξη της παραπάνω ανισότητας χρειάζεται η ανισότητα του Hölder. Για την περίπτωση $p = 1$ τα πράγματα είναι απλά. $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ λόγω της ανισότητας που ισχύει για τα μέτρα μιγαδικών αριθμών (ή τις απόλυτες τιμές των πραγματικών αριθμών) και αθροίζοντας έχουμε

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|.$$

Η περίπτωση $p = \infty$ προκύπτει ως το όριο του ορισμού (7.9) όταν $p \to \infty$. Αν θέσουμε $|x|_{\max} := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ τότε

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= |x|_{\max} \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\left(\frac{|x_1|}{|x|_{\max}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{|x|_{\max}}\right)^p} \\ &= |x|_{\max}\end{aligned}$$

Για να πεισθείτε για την τελευταία ισότητα παρατηρείστε ότι

$$\sqrt[p]{1} \leq \sqrt[p]{\left(\frac{|x_1|}{|x|_{\max}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{|x|_{\max}}\right)^p} \leq \sqrt[p]{n}$$

και επομένως

$$1 \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\left(\frac{|x_1|}{|x|_{\max}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{|x_n|}{|x|_{\max}}\right)^p} \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} = 1.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ επίσης ικανοποιεί τις ιδιοότητες N_1, N_2, N_3 του ορισμού της νόρμας.

Η νόρμα απαιτείται προκειμένου να ορίσουμε την έννοια της απόστασης δύο διανυσμάτων σ′ ένα γραμμικό χώρο, που με τη σειρά της είναι απαραίτητη προκειμένου να ορίσουμε έννοιες όπως η σύγκλιση.

Ορισμός 10. *Αν $\{x_n\}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων ενός γραμμικού χώρου V και $x \in V$ θα λέμε ότι η ακολουθία έχει όριο το x και θα γράφουμε* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *αν*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{7.11}$$

7.3.4 Η ανισότητα του Hölder

Πρόταση 6. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^+$ και $p, q \in [1, \infty)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{7.12}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^{p-1}$. Ισχύει ότι $\int_0^u x^{p-1}dx = \frac{u^p}{p}$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Γι′ αυτή ισχύει ότι $\int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{v^{1+\frac{1}{p-1}}}{1+\frac{1}{p-1}} = \frac{v^q}{q}$ (Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι $1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$). Από το σχήμα είναι σαφές ότι

$$uv \leq \int_0^u x^{p-1}dx + \int_0^v y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

επειδή το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $0uR$ και $0Pv$ υπερβαίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου $0uQv$ κατά το εμβαδόν του PQR. Έτσι δείξαμε ότι ισχύει η 7.12. Από το σχήμα επίσης φαίνεται ότι η ισότητα στην (7.12) ισχύει μόνο αν το εμβαδόν του PQR είναι μηδέν πράγμα που συμβαίνει αν $v = u^{p-1}$ ή ισοδύναμα $v^q = u^{q(p-1)}$ ή $v^q = u^p$. (Το τελευταίο ισχύει γιατί $p^{-1} + q^{-1} = 1$ συνεπάγεται $p = q(p-1)$.) $\square$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (7.12) για τις θετικές ποσότητες $\frac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $\frac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$, έχουμε

$$\frac{|x_i|^p}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \ge \frac{|x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

και αθροίζοντας ως προς i:

$$\frac{1}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \ge \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Παρατηρείστε όμως ότι $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^p$ όπως και $\sum_{i=1}^n |y_i|^q = \|\boldsymbol{y}\|_q^q$. Επομένως, δεδομένου ότι $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$1 \ge \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q}.$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει την ανισότητα του Hoelder:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{7.13}$$

7.3.5 Η ανισότητα του Minkowski

Αν $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ και $p \ge 1$ τότε

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p. \tag{7.14}$$

Η ανισότητα αυτή προφανώς ισχύει όταν $p = 1$. (Στην περίπτωση αυτή γίνεται η τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή.) Επομένως υποθέτουμε ότι $p > 1$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} &\le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p^{1+p/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p\, \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^{p/q}
\end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} \;\le\; \|\boldsymbol{y}\|_p\, \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^{p/q}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p \;\le\; \|\boldsymbol{x}\|_p\, \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^{p/q} \;+\; \|\boldsymbol{y}\|_p\, \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^{p/q}$$

απ΄ όπου προκύπτει η (7.14) λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $p - p/q = 1$.

7.4 Νόρμες Πινάκων

Ορισμός 11. *Έστω $\mathscr{L}^{m\times n}$ το σύνολο των πινάκων $m \times n$ με στοιχεία στο $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathscr{L}^{m\times n} \to [0, \infty)$ ονομάζεται νόρμα αν ισχύουν οι εξής συνθήκες*

MN1. $\|A\| \ge 0$ *για κάθε* $A \in \mathscr{L}^{m\times n}$ *και* $\|A\| = 0$ *αν και μόνο αν* $A = 0$.

MN2. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$ *και κάθε* $A \in \mathscr{L}^{m\times n}$, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

MN3. Για κάθε $A, B \in \mathscr{L}^{m\times n}$, $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$. *(Τριγωνική Ιδιότητα)*

Ξωρίς ουσιαστική απώλεια γενικότητας θα περιοριστούμε σε τετραγωνικούς πίνακες, δηλαδή στοιχεία του $\mathscr{L}^{n\times n}$. Επίσης θα περιοριστούμε στις λεγόμενες *επαγόμενες νόρμες* που προκύπτουν από τις αντίστοιχες νόρμες των στοιχείων του $\mathbb{C}^n$.

Ορισμός 12 (Επαγόμενη Νόρμα Πίνακα). *Για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{C}^n$ η επαγόμενη νόρμα στον $\mathscr{L}^{n\times n}$ ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{C}^n : x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{7.15}$$

ή ισοδύναμα

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{C}^n : \|x\|=1} \|Ax\|. \tag{7.16}$$

Η νόρμα που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της (7.15) είναι η νόρμα του $\mathbb{C}^n$. Είναι εύκολο να δούμε την ισοδυναμία των δύο διατυπώσεων του ορισμού. Βασίζεται στην ιδιότητα $N2$ για τις νόρμες του $\mathbb{C}^n$. Μένει βεβαίως να δείξουμε ότι ο ορισμός της επαγόμενης νόρμας πράγματι ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες, MN1 – MN3.

Οι ιδιότητες MN1 και MN2 είναι εύκολο να διαπιστώστουμε ότι ισχύουν και τις αφήνουμε ως άσκηση. Για να αποδείξουμε την MN3 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|M+N\| &= \sup_{\|x\|=1}\{\|Mx+Nx\|\} \le \sup_{\|x\|=1}\{\|Mx\|+\|Nx\|\} \\ &\le \sup_{\|x\|=1}\{\|Mx\}+\sup_{\|x\|=1}\{\|Nx\} = \|M\|+\|N\|. \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει την ανισότητα N3 για νόρμες διανυσμάτων ενώ η δεύτερη ανισότητα από το γεγονός ότι στο αριστερό σκέλος μεγιστοποιούμε το άθροισμα $\|Mx\|+\|Nx\|$ για όλα τα x για τα οποία $\|x\|=1$ ενώ στο δεξί σκέλος μεγιστοποιούμε τον καθένα από τους δύο όρους χωριστά.

Πρόταση 7. *Για μια επαγόμενη νόρμα ενός πίνακα ισχύει επίσης η ανισότητα*

MN4. $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

Απόδειξη. Αν $Bx=0$ για κάθε x τότε $B=0$ και η MN4 ισχύσει ως ισότητα. Διαφορετικά, συμβολίζοντας με $S:=\{x:\|x\|=1\}$ την μοναδιαία σφαίρα,

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\{\|ABx\|\} = \sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\left\{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\|Bx\|\right\} \\ &\le \sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\left\{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\right\}\sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\{\|Bx\|\} \end{aligned} \tag{7.17}$$

Η παραπάνω ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι στο δεξί σκέλος μεγιστοποιούμε κάθε έναν από τους δύο παράγοντες χωριστά. Προφανώς, $\sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\{\|Bx\|\} = \sup_{x\in S}\{\|Bx\|\} = \|B\|$. Λόγω της N2, $\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} = \|A\left(\frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\|$, και επομένως

$$\sup_{x\in S,\,\|Bx\|>0}\left\{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\right\} = \sup_{y:\|y\|=1,\,y=Bx\text{για κάποιο }x}\{\|Ay\|\} \le \sup_{y:\|y\|=1,}\{\|Ay\|\} \tag{7.18}$$

όπου η τελευταια ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι μεγιστοποιούμε πάνω σε ένα μεγαλύτερο σύνολο. Από τις (7.17), (7.18), προκύπτει η MN4. □

7.5 Ασκήσεις

Πρόβλημα 4. α) Για τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3 καθώς και τον e^{tA}. β) Να επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 7. Λύστε με διαγωνοποίηση το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 8. Αν $A^T = A$ δείξτε ότι $e^A = (e^A)^T$.

Πρόβλημα 9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τον A^{-1} με την βοήθεια του θεωρήματος Cayley–Hamilton και τον e^{At}.

Πρόβλημα 10. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

και να δείξετε ότι τα $(1, -1)$ και $(1, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα. Κάτω από ποιές συνθήκες είναι ό πίνακας A θετικά ορισμένος;

Κεφάλαιο 8

Διαφορικές Εξισώσεις

8.1 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Μια *ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης* είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y' + p(x)y = 0 \tag{8.1}$$

όπου $p(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με τον *ολοκληρωτικό παράγοντα* $e^{\int_0^x p(u)du}$ έχουμε

$$y' e^{\int_0^x p(u)du} + p(x) y e^{\int_0^x p(u)du} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\left(y e^{\int_0^x p(u)du}\right)' = 0.$$

Συνεπώς

$$y e^{\int_0^x p(u)du} = C$$

όπου C μια αυθαίρετη ολοκληρωτική σταθερά η οποία προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη, $y(0)$ δεδομένο. Συνεπώς

$$y = y(0) e^{-\int_0^x p(u)du}. \tag{8.2}$$

Η παραπάνω λύση μπορούμε να δούμε εύκολα ότι είναι μοναδική.

Για παράδειγμα, η μοναδική λύση της $y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, είναι η $y(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μια *μη ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης* είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{8.3}$$

όπου $p(x)$, $r(x)$, είναι συνεχείς συναρτήσεις. Πολλαπλασιάζοντας πάλι με τον ίδιο παράγοντα έχουμε

$$y' e^{\int_0^x p(u)du} + p(x) y e^{\int_0^x p(u)du} = r(x) e^{\int_0^x p(u)du}$$

ή

$$\left(y e^{\int_0^x p(u)du} \right)' = r(x) e^{\int_0^x p(u)du}.$$

Ολοκληρώνοντας, αυτό δίνει

$$y(x) = C e^{-\int_0^x p(u)du} + e^{-\int_0^x p(u)du} \int_0^x r(\xi) e^{\int_0^\xi p(u)du} d\xi .$$

Θέτωντας $x = 0$ βλέπουμε ότι $y(0) = C$ και παρατηρούμε ότι το παραπάνω επιχείρημα δείχνει ότι η λύση που βρήκαμε είναι και μοναδική. Έτσι έχουμε

$$y(x) = y(0) e^{-\int_0^x p(u)du} + \int_0^x r(\xi) e^{-\int_\xi^x p(u)du} d\xi . \tag{8.4}$$

Παράδειγμα 8.1.1. Η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{1+x} y = 1, \qquad y(0) = 1,$$

με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int_0^x \frac{1}{1+u} du} = e^{\log 1+x} = 1 + x$, μπορούμε να δούμε ότι έχει την λύση

$$y(x) = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1+x}{2}.$$

Παράδειγμα 8.1.2. Η διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = x, \qquad y(0) = 0,$$

με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$ γίνεται $e^{\frac{x^2}{2}} y' + x e^{\frac{x^2}{2}} y = x e^{\frac{x^2}{2}}$ ή $\left(e^{\frac{x^2}{2}} y \right)' = x e^{\frac{x^2}{2}}$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε

$$e^{\frac{x^2}{2}} y = \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

όπου C είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης, ή

$$y(x) = 1 + C e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Δεδομένου ότι $y(0) = 1 + C = 0$, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

8.2 Λογιστικά Πληθυσμιακά Πρότυπα

Έστω $x(t)$ το μέγεθος του ενός πληθυσμού την χρονική στιγμή t. Θεωρούμε ότι ο ρυμός μεταβολής του πληθυσμου δίδεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = rx(C-x), \qquad x(0) = x_0. \tag{8.5}$$

Η παράμετρος C ονομάζεται 'φέρουσα ικανότητα' του συστήματος. Όταν ο πληθυσμός ξεπερνά το όριο C τότε ο ρυθμός αύξησης γίνεται αρνητικός (δηλαδή οι γεννήσεις ξεπερνούν τους θανάτους) και ο πληθυσμός μειώνεται. Η εξίσωση (8.5) είναι χωριζομένων μεταβλητών εφ΄ όσον μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dx}{x(C-x)} = rdt.$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{1}{x(C-x)} = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{C-x}\right)$$

έχουμε

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{C-x} = \int Crdt$$

και επομένως

$$\log x - \log(C-x) = Crt + k.$$

'ρα $\log \frac{x}{C-x} = k + Crt$ και επομένως, θέτοντας $K = e^k > 0$,

$$\frac{x}{C-x} = K\,e^{Crt}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x(t) = \frac{KC\,e^{Crt}}{1+Ke^{Crt}}. \tag{8.6}$$

Θέτοντας $t = 0$ στην παραπάνω σχέση έχουμε $x_0 = x(0) = \frac{CK}{1+K}$ και επομένως $K = \frac{x_0}{C-x_0}$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (8.6) παίρνουμε

$$x(t) = \frac{Cx_0\,e^{Crt}}{C - x_0 + x_0\,e^{Crt}}, \quad t \geq 0. \tag{8.7}$$

8.3 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξης

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \phi(y,x), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{8.8}$$

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{y_n\}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(y_n(\xi), \xi) d\xi \ . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται επαναληπτική μέθοδος Picard. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1-y), \qquad y(0) = 2.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 2, \\ y_1(x) &= 2 + \int_{x_0}^{x} 2\xi(1-2)\, d\xi = 2 - x^2 && (8.10) \\ y_2(x) &= 2 + \int_{x_0}^{x} 2\xi(1-2+\xi^2)\, d\xi = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} && (8.11) \\ & && (8.12) \end{aligned}$$

8.4 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

8.4.1 Γραμμική Ανεξαρτησία Συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις f_i, $i = 1, \dots, n$, που ορίζονται πάνω στο διάστημα $[a, b]$ θα ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες* αν υπάρχουν πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί c_i, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν οι συναρτήσεις f_i δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε θα ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω ότι οι συναρτήσεις f_i είναι $n-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Η ορίζουσα Wronski των f_i ορίζεται ως

$$W(f_1, \dots, f_n) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{8.13}$$

Η ορίζουσα Wronski μας δίνει το ακόλουθο εύχρηστο κριτήριο για να προσδιορίσουμε αν ένα σύνολο από παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή όχι.

Θεώρημα 19. *Έστω n συναρτήσεις, f_i, $i = 1, \dots, n$, ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$, $n-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Αν η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων αυτών, που* *δίδεται από την (8.13) είναι* ταυτοτικά μηδέν *στο* $[a, b]$ *τότε οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αν για κάποιο* $x_0 \in [a, b]$ $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$ *τότε οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Απόδειξη. Οι f_i είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές c_i τέτοιες ώστε

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Αφού οι συναρτήσεις f_i είναι παραγωγίσιμες μπορούμε να παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση $n-1$ φορές οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) &= 0 \\
c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots c_n f_n'(x) &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots& \\
c_1 f_1^{n-1}(x) + c_2 f_2^{n-1}(x) + \cdots c_n f_n^{n-1}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.14}$$

Αν υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ για το οποίο η ορίζουσα του πίνακα να είναι μη μηδενική τότε αναγκαστικά η μόνη λύση του ομογενούς συστήματος είναι η τετριμμένη και συνεπώς οι f_i είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν η ορίζουσα είναι μηδενική για κάθε $x \in [a, b]$ τότε υπάρχουν c_i, όχι όλα μηδέν, που να ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα και συνεπώς οι συναρτήσεις f_i είναι γραμμικά εξαρτημένες. □

Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις $f_i(x) = e^{\lambda_i x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, η ορίζουσα Wronski είναι σ′ αυτή την περίπτωση

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} &= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\,x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\,x} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right).
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση οφείλεται στο γεγονός ότι η δεύτερη ορίζουσα είναι η ορίζουσα Vandermonde. Είναι προφανές ότι αν τα λ_i είναι διάφορα μεταξύ τους, η ορίζουσα δεν μηδενίζεται.

8.4.2 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Τάξης n με Μεταβλητούς Συντελεστές

Μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n με μεταβλητούς συντελεστές έχει την μορφή

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{8.15}$$

με δεδομένες αρχικές συνθήκες $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$. Οι συντελεστές $a_i(x)$ είναι δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις.

Αν οι συναρτήσεις f_i είναι n λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τότε παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 f_1^{(n-1)} \cdots - a_n f_1 & -a_1 f_2^{(n-1)} \cdots - a_n f_2 & \cdots & -a_1 f_n^{(n-1)} \cdots - a_n f_n \end{vmatrix}$$

Στην τελευταία ορίζουσα, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με a_n, την δεύτερη με a_{n-1} κλπ. και την προτελευταία με a_2 και προσθέτοντάς τις στην τελευταία παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 f_1^{(n-1)} & -a_1 f_2^{(n-1)} & \cdots & -a_1 f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dx}W(f_1, \ldots, f_n) = -a_1(x)W(f_1, \ldots, f_n). \tag{8.16}$$

Λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση βλέπουμε ότι

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = W(f_1, \dots, f_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(y)dy}. \tag{8.17}$$

Δεδομένου ότι το εκθετικό δεν μηδενίζεται ποτέ συμπεραίνουμε ότι όταν οι συναρτήσεις f_i είναι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης η ορίζουσα του Wronski είτε δεν θα μηδενίζεται ποτέ, είτε θα είναι ταυτοτικά μηδέν.

8.5 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς συντελεστές

Η γενική ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι η $y'' + ay' + by = 0$. Πριν εξετάσουμε την γενική αυτή εξίσωση θα δούμε πρώτα τις εξής δύο ειδικές μορφές.

8.5.1 Η διαφορική εξίσωση $y'' + by = 0$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το αν $b < 0$, $b = 0$ ή $b > 0$.

Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε την διαφορική εξίσωση ως

$$y'' - k^2 y \;=\; 0. \tag{8.18}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι τόσο η $y_1(x) = e^{kx}$ όσο και η $y_2(x) = e^{-kx}$ είναι λύσεις της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Το ίδιο ισχύχει και για την

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{8.19}$$

η οποία είναι και η γενική λύση. Αυτή είναι και η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης όπως θα δούμε σε λίγο. Το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών συνθηκών απαιτεί τον προσδιορισμό της $y(0)$, *και της* $y'(0)$.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε την

$$y'' \;=\; 0 \tag{8.20}$$

η οποία έχει την γενική λύση

$$y(x) \;=\; C_1 + C_2 x. \tag{8.21}$$

Στην τρίτη περίπτωση γράφουμε την εξίσωση ως

$$y'' + k^2 y \;=\; 0. \tag{8.22}$$

Οι συναρτήσεις $y_1(x) = \sin kx$ και $y_2(x) = \cos kx$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και η γενική λύση δίδεται από την

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \tag{8.23}$$

Και στις τρεις περιπτώσεις είναι εύκολο να δούμε ότι για οποιεσδήποτε αρχικές τιμές $y(0)$, $y'(0)$, οι σταθερές C_1, C_2, προσδιορίζονται πάντα και μονοσήμαντα.

Μια εναλλακτική προσέγγιση στην τρίτη περίπτωση είναι η χρήση των μιγαδικών εκθετικων συναρτήσεων $y_1(x) = e^{ikx}$, $y_2(x) = e^{-ikx}$. Η γενική λύση σ΄ αυτή την περίπτωση είναι η

$$y(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}. \tag{8.24}$$

Οι σταθερές C_1, C_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί που μπορεί να επιλεγούν για να ικανοποιεί η λύση τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $y(0)$, $y'(0)$. Επειδή

$$y(0) = C_1 + C_2 \tag{8.25}$$

$$y'(0) = ikC_1 - ikC_2 \tag{8.26}$$

προκύπει ότι

$$C_1 = \frac{iky(0) + y'(0)}{2ik}, \qquad C_1 = \frac{iky(0) - y'(0)}{2ik}.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στην (8.24) και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας ότι

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}. \tag{8.27}$$

παίρνουμε

$$y(x) = y(0) \cos kx + \frac{y'(0)}{k} \sin kx.$$

8.5.2 Ομογενείς εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι της μορφής

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{8.28}$$

με τις αρχικές συνθήκες

$$y(0), \;\; y'(0), \text{ δεδομένες.} \tag{8.29}$$

Προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση αυτή δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής $e^{\lambda x}$. Αντικαθιστώντας στην (8.28) παίρνουμε $\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$ και, δεδομένου ότι $e^{\lambda x} \neq 0$ για κάθε x, προκύπτει ότι

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{8.30}$$

Το συμπέρασμα που εξάγουμε από τα παραπάνω είναι ότι η συνάρτηση $e^{\lambda x}$ είναι λύση της (8.28) αν και μόνον αν το λ είναι λύση της (8.30). Η εξίσωση (8.30) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της (8.28).

Εν γένει, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες, έστω λ_1 και λ_2. Η *γενική λύση* της (8.28) είναι η

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{8.31}$$

όπου C_1, C_2, δύο αυθαίρετες σταθερές. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} &\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right)'' + a\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right)' + b\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= \left(C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x}\right) + a\left(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}\right) + b\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\right) + C_2 e^{\lambda_2 x}\left(\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b\right) = 0. \end{aligned}$$

(Στην τελευταία εξίσωση οι ποσότητες μέσα στις δύο παρενθέσεις είναι 0 επειδή οι λ_1, λ_2 είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Μένει να δείξουμε ότι οι σταθερές C_1, C_2, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες (8.29). Πράγματι

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 e^{\lambda_1 0} + C_2 e^{\lambda_2 0} = C_1 + C_2, \\ y'(0) &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 0} = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2. \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας έχει ορίζουσα $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ (δεδομένου υποθέσαμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο διακριτές ρίζες) και επομένως υπάρχει μοναδική λύση στο σύστημα η οποία είναι

$$C_1 = \frac{\lambda_2 y(0) - y'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{y'(0) - \lambda_1 y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{8.32}$$

Παράδειγμα. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - y' - 2y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Επομένως, η γενική λύση είναι η

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Έχουμε επίσης $y(0) = 1 = C_1 + C_2$ και $y'(0) = 3 = -C_1 + 2C_2$, απ΄ όπου προκύπτει ότι $C_1 = -\frac{1}{3}$ και $C_2 = \frac{4}{3}$.

Η περίπτωση των συζυγών μιγαδικών ριζών. Η παραπάνω μέθοδος συνεχίζει να ισχύει και όταν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα: Θέλουμε να λύσουμε την $y'' - 4y' + 5y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$ και η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 e^{(2+i)x} + C_2 e^{(2-i)x}$$

όπου οι σταθερές C_1, C_2, είναι τώρα αυθέρετοι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2, \quad y'(0) = -2 = (2+i)C_1 + (2-i)C_2.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $C_1 = \frac{1}{2} + 2i$, $C_2 = \frac{1}{2} - 2i$, και συνεπώς η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + 2i\right) e^{(2+i)x} + \left(\frac{1}{2} - 2i\right) e^{(2-i)x}.$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε προκειμένου να εκφράσουμε την παραπάνω λύση ως προς πραγματικά εκθετικά, ημίτονα και συνημίτονα:

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{1}{2} + 2i\right) e^{(2+i)x} + \left(\frac{1}{2} - 2i\right) e^{(2-i)x} = \frac{1}{2}\left(e^{(2+i)x} + e^{(2-i)x}\right) + 2i\left(e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\right) \\ &= e^{2x}\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + (2i)^2 e^{2x}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = e^{2x}\left(\cos x - 4\sin x\right). \end{aligned}$$

Η περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα. Στην περίπτωση αυτή η διακρίνουσα της (8.30) είναι 0 δηλαδή $\Delta = a^2 - 4b = 0$ και $\lambda = -a/2$. Στην περίπτωση αυτή οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (8.28) είναι οι $e^{\lambda x}$ και $xe^{\lambda x}$. Η γενική λύση της (8.28) είναι η

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Πράγματι, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $(xe^{\lambda x})' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$ και $(xe^{\lambda x})'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\right)'' + a\left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\right)' + b\left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\right) \\ &= C_1 e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) + C_2 e^{\lambda x}(2\lambda + a) + C_2 e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ και $2\lambda + a = 0$, επειδή η λ είναι διπλή ρίζα της (8.30). Οι συντελεστές C_1, C_2, της γενικής λύσης προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$y(0) = C_1 e^{\lambda 0} + C_2 0\, e^{\lambda 0} = C_1, \qquad y'(0) = C_1 \lambda e^{\lambda 0} + C_2\left(e^{\lambda 0} + \lambda\, 0\, e^{\lambda 0}\right)$$

ή

$$y(0) = C_1, \qquad y'(0) = \lambda C_1 + C_2.$$

Προφανώς, για οποιεσδήποτε τιμές των αρχικών συνθηκών, $y(0)$, $y'(0)$, υπάρχει μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος. (Η λύση είναι η $C_1 = y(0)$, $C_2 = y'(0) - \lambda y(0)$.

Παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα. Να βρείτε την λύση της $y'' - 2y + y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ η οποία έχει μια διπλή ρίζα, $\lambda = 1$. Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε $y'(x) = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x$ και επομένως

$$y(0) = C_1 = 2, \quad \text{και } y'(0) = C_1 + C_2 = -1 \text{ ή } C_2 = -3.$$

Συνεπώς η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι $y(x) = 2e^x - 3xe^x$.

8.6 Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Εδώ εξετάζουμε εξισώσεις της μορφής

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{8.33}$$

όπου $r(x)$ δεδομένη συνάρτηση. Οποιαδήποτε λύση της (8.33) θα ονομάζεται ειδική λύση. Θα δείξουμε πρώτα ότι η γενική λύση της (8.33) προκύπτει από την γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (που δίνεται από την (8.31)) αν σ′ αυτή προσθέσουμε μια ειδική λύση. Έστω $y_g(x)$ η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (8.28) η οποία βεβαίως θα είναι της μορφής $C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ αν η χαρακτηριστική εξίσωση (8.30) έχει δύο διακριτές ρίζες, λ_1, λ_2, ή $C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$ αν έχει μια διπλή ρίζα, λ. Συνεπώς ισχύει ότι

$$y_g'' + ay_g' + by_g = 0.$$

Επίσης, έστω $y_s(x)$ μια *ειδική λύση* της μη ομογενούς εξίσωσης (8.33), δηλαδή μια συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$y_s'' + ay_s' + by_s = r(x).$$

Τότε η $y(x) := y_g(x) + y_s(x)$ είναι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Πράγματι

$$\left(y_g + y_s\right)'' + a\left(y_g + y_s\right)' + b\left(y_g + y_s\right) = \left(y_g'' + ay_g' + by_g\right) + (y_s'' + ay_s' + by_s) = 0 + r(x),$$

δηλαδή η $y_g + y_s$ είναι η γενική λύση.

Μένει όμως το πρόβλημα της εξεύρεσης μιας ειδικής λύσης. Θα παρουσιάσουμε δύο μεθόδους. Η πρώτη είναι υπολογιστικά εύκολη αλλά εφαρμόζεται μόνο για ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων, ενώ η δεύτερη, η οποία οφείλεται στον Lagrange, είναι γενική.

8.6.1 Εξεύρεση μιας ειδικής λύσης όταν η $r(x)$ είναι πολυώνυμο, εκθετική συνάρτηση, ημίτονο, συνημίτονο ή γινόμενο των ανωτέρω

Πρόταση 8. *Αν η $r(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού k τότε μια ειδική λύση της (;;) είναι πάλι πολυώνυμο του ίδιου βαθμού, του οποίου οι συντελεστές προσδιορίζονται αντικαθστώντας στην εξίσωση (8.33).*

Η απόδειξη είναι εύκολη. Αντ΄ αυτής θα δώσουμε ένα παράδειγμα: Έστω η μη ομογενής εξίσωση $y'' + 3y' - y = 2x^2 + 4x + 1$. Μια ειδική λύση της θα είναι η $y_s(x) = Ax^2 + Bx + C$. Επομένως

$$y_s'' + 3y_s' - y_s = 2A + 3(2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 4x + 1$$

απ΄ όπου παίρνουμε $-Ax^2 + (6A - B)x + 2A + 3B - C = 2x^2 + 4x + 1$ και επομένως $A = -2$, $6A - B = 4$, $2A + 3B - C = 1$ ή $A = -2$, $B = -16$, $C = -53$. Συνεπώς, η ζητούμενη ειδική λύση είναι η $y_s = -2x^2 - 16x - 53$

Πρόταση 9. *Έστω ότι η $r(x)$ είναι εκθετική συνάρτηση της μορφής $e^{\rho x}$ και ο ρ δεν είναι ρίζα της χαρακτιριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + a\lambda + b$. Τότε μια ειδική λύση της (8.33) είναι η $y_s(x) = Ae^{\rho x}$ όπου η σταθερά A προσδριορίζεται αντικαθστώντας στην διαφορική εξίσωση. Σε περίπτωση που ο ρ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε μια ειδική λύση είναι η $y_s(x) = Axe^{\rho x}$ όπου η σταθερά A προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην εξίσωση. Τέλος, αν ο ρ είναι* διπλή *ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μια ειδική λύση είναι η $y_s(x) = Ax^2e^{\rho x}$ όπου η A προσδιορίζεται πάλι αντικαθιστώντας στην εξίσωση.*

Απόδειξη: Έστω ότι το ρ δεν είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε, θέτοντας $y_s(x) = Ae^{\rho x}$ στην διαφορική εξίσωση $y'' + ay' + by = e^{\rho x}$ παίρνουμε $A\rho^2 e^{\rho x} + aA\rho e^{\rho x} + bAe^{\rho x} = e^{\rho x}$ και επομένως βλέπουμε ότι η $Ae^{\rho x}$ είναι μια ειδική λύση αν

$$A = \frac{1}{\rho^2 + a\rho + b}.$$

Παρατηρείστε ότι στο παραπάνω κλάσμα που ορίζει την Α ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, εφ΄ όσον το ρ δεν είναι ρίζα της χαρακτιριστικής εξίσωσης.

Αν το ρ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης θέτουμε $y_s(x) = Axe^{\rho x}$ στην διαφορική εξίσωση $y'' + ay' + by = e^{\rho x}$ και παίρνουμε $A(2\rho e^{\rho x} + \rho^2 xe^{\rho x}) + a(\rho xe^{\rho x} + e^{\rho x}) + bAxe^{\rho x} = e^{\rho x}$. Απλοποιώντας το $e^{\rho x}$, έχουμε

$$Ax(\rho^2 + a\rho + b) + A(2\rho + a) = 1.$$

Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι 0 επειδή ο ρ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επίσης, $2\rho + a \neq 0$ επειδή ο ρ είναι *απλή ρίζα* της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή,

$$A = \frac{1}{2\rho + a}.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο ρ είναι *διπλή ρίζα* της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Θέτουμε $y_s(x) = Ax^2 e^{\rho x}$ στην διαφορική εξίσωση και παίρνουμε

$$Ae^{\rho x}\left(2 + 4\rho x + x^2\rho^2\right) + aAe^{\rho x}\left(2x + x^2\rho\right) + bAx^2 e^{\rho x} = e^{\rho x}$$

ή

$$2A + 2xA\,(2\rho + a) + x^2 A\left(\rho^2 + a\rho + b\right) = 1.$$

Αφού το ρ είναι διπλή ρίζα ισχύει ότι $\rho^2 + a\rho + b = 0$ και $2\rho + a = 0$. Συνεπώς, $A = 1/2$ και η ειδική λύση στην περίπτωση αυτή είναι $y_s(x) = \frac{x^2}{2}e^{\rho x}$. ∎

Παραδείγματα.

1. Η μη ομογενής διαφορική εξίσωση $y'' + 3y' + 2y = 5e^x$ έχει ειδική λύση $y_s(x) = Ae^x$ όπου το A θα προσδιοριστεί αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση. (Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι η $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -1$. Συνεπώς το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.) Έχουμε συνεπώς

$$Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x \;\Rightarrow\; 6A = 5 \;\Rightarrow A = \frac{5}{6}.$$

Η *γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης* είναι η

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{5}{6}e^x.$$

Αν θέλουμε να βρούμε την λύση της μη ομογενούς εξίσωσης με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ τότε προσδιορίζουμε τις τιμές των σταθερών C_1, C_2, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

$$C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = 1 \quad \text{και} \quad -C_1 - 2C_2 + \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2},\;\; C_2 = -\frac{4}{3}.$$

Συνεπώς η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{5}{6}e^x$.

2. Ας δούμε τώρα την διαφορική εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος όταν ο εκθέτης στον δεξιό όρο είναι ρίζα της χαρακτηρσιτικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα ας δούμε την $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Στην περίπτωση αυτή μια ειδική λύση θα είναι η Axe^{-2x}. Η σταθερά A προσδιορίζεται από την

$$
\begin{aligned}
&\left(Axe^{-2x}\right)'' + 3\left(Axe^{-2x}\right)' + 2\left(Axe^{-2x}\right) = 3e^{-2x} \\
&\Rightarrow\ 4Axe^{-2x} - 2Ae^{-2x} - 6Axe^{-2x} + 3Ae^{-2x} + 2Axe^{-2x} = 3e^{-2x}\ \Rightarrow\ A = 3.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3xe^{-2x}.$$

Συνεπώς, $y(0) = C_1 + C_2 + 3 = 1$ και $y'(0) = -C_1 - 2C_2 + 3 = 0$ που δίνουν $C_1 = -7$ και $C_2 = 5$. Επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = -7e^{-x} + 5e^{-2x} + 3xe^{-2x}$.

3. Εξετάζουμε τέλος την μη ομογενή εξίσωση $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ η οποία έχει διπλή ρίζα το -2. Συνεπώς μια ειδική λύση είναι η $y_s(x) = Ax^2e^{-2x}$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
y_s'(x) &= 2xAe^{-2x}(1-x) \\
y_s''(x) &= 2Ae^{-2x}(1 - 4x + 2x^2)
\end{aligned}
$$

και αντικαθιστώντας

$$2Ae^{-2x}(1 - 4x + 2x^2) + 8Ae^{-2x}(x - x^2) + 4Ax^2e^{-2x} = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}.$$

$y(0) = C_1$ και $y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0$ και επομενως $C_1 = 0$ και $C_2 = 1$. ’ρα, η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

Πρόταση 10. *1) Όταν η $r(x)$ είναι ημιτονοειδής συνάρτηση, π.χ. $\sin(\omega x)$ ή $\cos(\omega x)$ τότε μια ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_s(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ όπου οι συντελεστές A, B προσδιορίζονται αντικαθιστώντας στην εξίσωση.*

2) Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που η μη ομογενής διαφορική εξίσωση είναι η

$$y'' + by = \sin(\omega x) \qquad \text{με } b = \omega^2. \tag{8.34}$$

Τότε μια ειδική λύση είναι της μορφής $y_s(x) = +Bx\cos(\omega x)$ όπου η σταθερά B προσδιορίζεται αντικαθιστώντας την y_s στην εξίσωση.

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν όταν $r(x) = \cos\omega x$.

Απόδειξη: 1) Εφ΄ όσον

$$
\begin{aligned}
y_s'(x) &= A\omega\cos\omega x - B\omega\sin\omega x \\
y_s''(x) &= -A\omega^2\sin\omega x - B\omega^2\cos\omega x.
\end{aligned}
$$

Συνεπως η $y_s'' + ay_s' + by_s = \sin\omega x$ γίνεται

$$
-A\omega^2\sin\omega x - B\omega^2\cos\omega x + a(A\omega\cos\omega x - B\omega\sin\omega x) + b(A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)) = \sin\omega x
$$

και ισοδύναμα

$$
\cos\omega x\,(-B\omega^2 + aA\omega + Bb) + \sin\omega x(-A\omega^2 - aB\omega + bA - 1) = 0 \tag{8.35}
$$

Όμως οι συναρτήσεις $\sin\omega x$ και $\cos\omega x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$
\begin{vmatrix} \sin\omega x & \cos\omega x \\ (\sin\omega x)' & (\cos\omega x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\omega x & \cos\omega x \\ \omega\cos\omega x & -\omega\sin\omega x \end{vmatrix} = -\omega(\sin^2\omega x + \cos^2\omega x) = -\omega \neq 0.
$$

Συνεπώς από την (8.35) έχουμε $-B\omega^2 + aA\omega + B = 0$ και $-A\omega^2 - aB\omega + bA - 1 = 0$ ή

$$
\begin{bmatrix} b-\omega^2 & -a\omega \\ a\omega & b-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$
A = \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}, \qquad B = \frac{-a\omega}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}.
$$

Συνεπώς

$$
y_s(x) = \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}\sin\omega x + \frac{b-\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}\cos\omega x.
$$

2) Η μόνη περίπτωση που προκύπτει πρόβλημα στην παραπάνω διαδικασία είναι όταν ο παρονομαστής στις παραπάνω εκφράσεις μηδενιζεται, δηλαδή όταν $(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2 = 0$ ή $a = 0$, $b = \omega^2$. Αυτή είναι η περίπτωση 2) οπότε αναζητούμε μια ειδική λύση της (8.34). Θέτοντας $y_s(x) = Bx\cos\omega x$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
y_s'(x) &= -B\omega x\sin\omega x + B\cos\omega x \\
y_s''(x) &= -Bx\omega^2\cos\omega x - B\omega\sin\omega x
\end{aligned}
$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση $y_s''(x) + by_s = \sin\omega x$, παίρνουμε

$$
-Bx\omega^2\cos\omega x - B\omega\sin\omega x + b(Bx\cos\omega x) = \sin\omega x
$$

ή

$$
Bx\cos\omega x(b-\omega^2) - (B\omega + 1)\sin\omega x = 0.
$$

Δεδομένου ότι $b = \omega^2$ στην περίπτωση που εξετάζουμε συμπεραίνουμε ότι $B = -\frac{1}{\omega}$ και συνεπώς $y_s(x) = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x$. ∎

Παραδείγματα.

1. Έστω η $y'' - 3y' + 2y = 2\sin(2x)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$. Μια ειδική λύση της εξίσωσης θα είναι η $A\sin 2x + B\cos 2x$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 3(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 2\sin 2x$$

ή

$$(-4A + 6B + 2A - 2)\sin 2x + (-4B - 6A + 2B)\cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4A + 4B + 2A - 2 = 0 \\ -4B - 6A + 2B = 0 \end{cases} .$$

Από το σύστημα αυτό βρίσκουμε $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{3}{10}$, και συνεπώς η ειδική λύση είναι η $y_s(x) = -\frac{1}{10}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 2x$. Συνπεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 2x$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις σταθερές λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = C_1 + C_2 + \frac{3}{10} \\ y'(0) &= 0 = C_1 + 2C_2 - \frac{2}{10} \end{aligned}$$

και παίρνουμε $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

2. Έστω η $y'' + 9y = 2\sin 3x$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Εδώ η ειδική λύση είναι της μορφής $Ax\cos(3x)$ (η περίπτωση 2) της πρότασης 10). Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$-4A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 9Ax\cos 3x = 2\sin 3x \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $C_1\sin 3x + C_2\cos 3x$ και η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι $y(x) = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x - \frac{1}{2}x\cos 3x$. Οι τιμές που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες είναι $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$. Επομένως η λύση της μη ομογενούς που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y(x) = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{2}x\cos 3x$.

Η περίπτωση $r(x) = p(x)e^{\rho x}$, $p(x)\sin(\omega x)$, $p(x)\cos(\omega x)$, $e^{\rho x}\sin\omega x$, $e^{\rho x}\cos\omega x$ καθώς και αθροίσματα τέτοιων όρων. Εδώ θα εξετάσουμε αυτές τις περιπτώσεις των γινομένων μέσω παραδειγμάτων.

1. Προκειμένου να βρούμε μια ειδική λύση της $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x$ δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής $(Ax^2 + Bx + C)e^x$. Αντικαθιστώντας μπορείτε να διαπιστώσετε ότι μια ειδική λύση είναι η

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}\right) e^x$$

2. Προκειμένου να βρούμε μια ειδική λύση της $y'' + y' + y = x\cos 2x$ θέτουμε $y_s(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= (-2Ax + C - B)\sin 2x + (2Cx + D + A)\cos 2x \\ y_s''(x) &= -4(Cx + D + A)\sin 2x - 4(Ax + B - C)\cos 2x \end{aligned}$$

και συνεπώς, αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$((-3C - 2A)x + 2D + A + C - B)\sin 2x + ((-3A + 2C)x + -3B + 4C + D + A)\cos 2x = x\cos 2x$$

απ΄ όπου προκύπει το σύστημα

$$\begin{array}{rrrrcl} -2A & & -3C & & = & 0 \\ -3A & & +2C & & = & 0 \\ A & -B & +C & +2D & = & 1 \\ A & -3B & +4C & +D & = & 0 \end{array}$$

του οποίου η λύση είναι $A = -\frac{15}{65}$, $B = \frac{11}{65}$, $C = \frac{10}{65}$, $D = \frac{8}{65}$. Συνεπώς, η ειδική λύση είναι

$$y_s(x) = \frac{-15x + 11}{65}\cos 2x + \frac{10x + 8}{65}\sin 2x.$$

3. Να βρεθεί η λύση της $y'' + y' + y = e^x + x$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ η οποία έχει ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Ο εκθέτης στο εκθετικό του δεξιού όρου είναι διάφορος των δύο ριζών. Συνεπώς θα αναζητήσουμε μια ειδική λύση της μορφής $Ae^x + B_1 x + B_2$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$Ae^x + Ae^x + B_1 + Ae^x + B_1 x + B_2 = e^x + x$$

και επομένως $A = 1/3$, $B_1 = 1$, $B_2 = -1$. Η ειδική λύση της μη ομογενούς είναι $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{3}e^x + x - 1$.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} - 1 \\ y'(0) &= 0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \frac{1}{3} + 1 \end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε $C_1 = \frac{2}{3}\frac{\lambda_2+2}{\lambda_2-\lambda_1}$, $C_1 = -\frac{2}{3}\frac{2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των λ_1, λ_2 παίρνουμε μετά από πράξεις

$$C_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{3}, \quad C_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{3}.$$

Συνεπώς, η λύση που θέλουμε είναι

$$y(x) \; = \; \frac{1+i\sqrt{3}}{3}\,e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,x} \; + \; \frac{1-i\sqrt{3}}{3}\,e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,x} \; + \; \frac{1}{3}e^x \; + \; x \; - \; 1.$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω λύση χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler:

$$\begin{aligned}
\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\,e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,x} + \frac{1-i\sqrt{3}}{3}\,e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,x} &= \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}}{2}\right) \\
= \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}}{2} - \sqrt{3}\,\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}}{2i}\right) &= \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση απλοποιείται περισσότερο αν θέσουμε $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \tan\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) &= \frac{2}{3\cos\pi/3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\
&= \frac{4}{3}e^{-x/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια η λύση γράφεται ως

$$y(x) \; = \; \frac{4}{3}e^{-x/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \; + \; \frac{1}{3}e^x \; + \; x \; - \; 1.$$

8.6.2 Η μέθοδος του Lagrange

Μεχρις εδώ είδαμε μεθόδους που μας επιτρέπουν να βρούμε ειδικές λύσεις μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων όταν οι συναρτήσεις στο δεξί μέρος είναι πολυώνυμα, εκθετικές συναρτήσεις, ημίτονα ή συνημίτονα (τα οποία βεβαίως είναι φανταστικά εκθετικά) καθώς και γινόμενα πολυωνυμων και εκθετικών. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε την μέθοδο των μεταβλητών συντελεστών του Lagrange. Η μέθοδος αυτή είναι πιο περίπλοκη αλλά εφαρμόζεται για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $r(x)$.

Υποθέτουμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι διαφορετικές μεταξύ τους και θεωρούμε την $y(x) = C_1(x)e^{\lambda_1 x} + C_2(x)e^{\lambda_2 x}$. Έχουμε

$$y'(x) = C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 C_1(x)e^{\lambda_1 x} + C_2'(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2 C_2(x)e^{\lambda_2 x} \tag{8.36}$$

Αν θέσουμε
$$C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + C_2'(x)e^{\lambda_2 x} = 0 \tag{8.37}$$
τότε η (8.36) γίνεται
$$y'(x) = \lambda_1 C_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2(x)e^{\lambda_2 x} \tag{8.38}$$
και παραγωγίζοντας ακόμη μια φορά έχουμε
$$y''(x) = \lambda_1^2 C_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_1 C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2'(x)e^{\lambda_2 x}. \tag{8.39}$$
Θέτουμε τώρα
$$\lambda_1 C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2'(x)e^{\lambda_2 x} = r(x). \tag{8.40}$$
Από τις παραπάνω εξισώσεις, παραλείποντας την εξάρτηση των C_1, C_2 από το x, έχουμε
$$\begin{aligned} y'' + ay' + b &= \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x} + r(x) + a\left(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}\right) + b\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= C_1\left(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\right)e^{\lambda_1 x} + C_2\left(\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b\right)e^{\lambda_2 x} + r(x) \\ &= r(x). \end{aligned}$$
Οι συναρτήσεις C_1, C_2 ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα
$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + C_2'(x)e^{\lambda_2 x} &= 0 \\ \lambda_1 C_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2'(x)e^{\lambda_2 x} &= r(x). \end{aligned} \tag{8.41}$$
Από το θεώρημα του Cramér έχουμε
$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 x} \\ r(x) & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}} = \frac{r(x)e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{8.42}$$
και
$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}} = \frac{r(x)e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{8.43}$$
Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, ολοκληρώνοντας έχουμε
$$C_1(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_1 u}du, \qquad C_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_2 u}du. \tag{8.44}$$
Επομένως, μια ειδική λύση της (8.33) είναι η
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_1 u}du + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^x r(u)e^{-\lambda_2 u}du \\ &= \int_0^x r(u)\frac{e^{\lambda_1(x-u)} - e^{\lambda_2(x-u)}}{\lambda_1 - \lambda_2}du \\ &= \int_0^x r(u)G(u,x)du \end{aligned} \tag{8.45}$$

όπου

$$G(u,x) \;=\; \frac{e^{\lambda_1(x-u)} - e^{\lambda_2(x-u)}}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{8.46}$$

Παράδειγμα 8.6.1. Να βρείτε την λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' - 2y' - y = e^{-t}$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $s^2 - 2s - 1 = 0$ και έχει ρίζες $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης, $y'' - 2y' - y = 0$ είναι η

$$y_0(x) := C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}.$$

Μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{(1+\sqrt{2})x}\int_0^x e^{-u}e^{-(1+\sqrt{2})u}du - e^{(1-\sqrt{2})x}\int_0^x e^{-u}e^{-(1-\sqrt{2})u}du\right) \\ &= \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2+\sqrt{2}} - \frac{e^{(1-\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η $y_0(x) + y_p(x)$ και επομένως η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (λαμβανομένου υπ΄ όψιν του γεγονότος ότι $y_p(0) = y_p'(0) = 0$) είναι η

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{(1-\sqrt{2})x}}{2} + \frac{e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2+\sqrt{2}} - \frac{e^{(1-\sqrt{2})x} - e^{-x}}{2-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3-\sqrt{2}}{2}e^{(1+\sqrt{2})x} - \frac{3+\sqrt{2}}{2}e^{(1-\sqrt{2})x} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

8.7 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης με Μεταβλητούς συντελεστές

8.7.1 Λύση με μορφή δυναμοσειράς

Εξετάζουμε τη γενική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Έχει τη μορφή

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x). \tag{8.47}$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι η

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{8.48}$$

Αναζητούμε λύσεις υπό την μορφή δυναμοσειράς. Θα περιγράψουμε την διαδικασία επίλυσης ξεκινώντας από εύκολα παραδείγματα όπου η λύση θα μπορούσε να ευρεθεί και με άλλες μεθόδους. Έστω η εξίσωση

$$y' - y = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{8.49}$$

Αν εκφράσουμε τη λύση της σε μορφή δυναμοσειράς, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, τότε παραγωγίζοντας όρο προς όρο (υπενθυμίζουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι επιτρεπτή για τις δυναμοσειρές μέσα στην ακτίνα σύγκλισης) έχουμε $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$ και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n = 0$$

ή

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n+1}(n+1))x^n = 0$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $c_n - c_{n+1}(n+1) = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, ή

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Λύνοντας την αναδρομική αυτή σχέση έχουμε

$$c_n = \frac{1}{n!} c_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και επομένως προκύπτει η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης ως

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = c_0 e^x.$$

Θέτοντας $x = 0$ στην παραπάνω σχέση έχουμε $c_0 = y(0)$. Συνεπώς η λύση της ΔΕ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι η $y(x) = y(0)e^x$.

Ας δούμε τώρα ένα δεύτερο παράδειγμα της χρήσης των δυναμοσειρών του οποίου την λύση επίσης γνωρίζουμε. Έστω η γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \tag{8.50}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, με δεδομένες αρχικές συνθήκες $y(0)$, $y'(0)$. Δοκιμάζουμε την λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Τότε $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$ και αντικαθιστώντας στην (8.50) έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n + \lambda^2 c_{n+2}(n+2)(n+1)c_n \right) x^n = 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$c_{n+2} = -\frac{\lambda^2}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.51}$$

Η αναδρομική σχέση (8.51) προσδιορίζει το c_2 από το c_0, το c_4 από το c_2 και ούτω καθ′ εξής. Ομοίως, προσδιορίζει το c_3 από το c_1, το c_5 από το c_3, κλπ. Συνεπώς έχουμε

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{(2n)!} c_0 \tag{8.52}$$

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{(2n+1)!} c_1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.53}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$c_2 = -\frac{\lambda^2}{2 \cdot 1}, \quad c_4 = \frac{\lambda^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad c_6 = -\frac{\lambda^6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \ldots$$
$$c_3 = -\frac{\lambda^2}{3 \cdot 2}, \quad c_5 = \frac{\lambda^4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \quad c_7 = -\frac{\lambda^6}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \ldots$$

Η γενική λύση της (8.50) είναι επομένως

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\lambda x)^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!} \lambda^{2n} x^{2n+1}. \tag{8.54}$$

Παρατηρείστε ότι, αν $\lambda = 0$ τότε όλοι οι όροι των παραπάνω δυναμοσειρών μηδενίζονται εκτός από τους πρώτους και έχουμε $y(x) = c_0 + xc_1$ που είναι πράγματι η γενική λύση της ΔΕ $y'' = 0$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε η παραπάνω λύση γράφεται και ως

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 \left(1 - \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} - \frac{(\lambda x)^6}{6!} + \cdots \right) \\ &\qquad + c_1 \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda x}{1!} - \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \frac{(\lambda x)^5}{5!} - \frac{(\lambda x)^7}{7!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Αναγνωρίζουμε ότι οι παραπάνω δυναμοσειρές αντιστοιχούν στο $\cos \lambda x$ και $\sin \lambda x$ αντίστοιχα και, αφού τα c_0, c_1 είναι ούτως ή άλλως αυθαίρετες σταθερές, ξαναγράφουμε την γενική λύση ως

$$y(x) = C_0 \cos \lambda x + C_1 \sin \lambda x. \tag{8.55}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (8.55) έχουμε $y'(x) = -C_0 \lambda \sin \lambda x + C_1 \lambda \cos \lambda x$. Συνεπώς, για $x = 0$,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_0, \\ y'(0) &= C_1 \lambda, \end{aligned}$$

και από τις σχέσεις αυτές προσδιορίζουμε τα C_0, C_1, ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Στα παραπάνω παραδείγματα είδαμε πώς μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος των δυναμοσειρών σε πολύ απλές περιπτώσεις όπου η λύση μιας ΔΕ ήταν ήδη γνωστή. Η μέθοδος όμως αυτή μας επιτρέπει την επίλυση εξισώσεων που δεν θα μπορούσαμε να λύσουμε με άλλους τρόπους.

8.8 Δυναμοσειρές

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = 0 \tag{8.56}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική, πρώτης τάξης, με μεταβλητούς συντελεστές και μπορεί να λυθεί με την μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων. Η γενική της λύση είναι

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{8.57}$$

όπου C σταθερά που προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη.

Ας επιλύσουμε την ίδια εξίσωση με την μέθοδο των δυναμοσειρών: Έστω $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ η γενική λύση της (8.56). Θα ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$ ή

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

Συνεπώς, αφού η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει ταυτοτικά για κάθε x, θα έχουμε $(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ και $a_1 = 0$ (αυτό προκύπτει από τον όρο x^0). Συμπεραίνουμε ότι

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$a_{2n} = \frac{a_0(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)} = \frac{a_0(-1)^n}{n!2^n}$$

και

$$a_{2n+1} = 0 \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι η γενική λύση προκύπτει ως η σειρά

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x/2)^n}{n!} = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Η λύση αυτή συμφωνεί πλήρως (όπως αναμενόταν) με την (8.57

8.8.1 Η διαφορική εξίσωση του Airy

Ας δούμε τώρα μια εξίσωση για την οποία δεν υπάρχει ουσιαστικά άλλος τρόπος λύσης εκτός από τη χρήση δυναμοσειρών. Έστω

$$y'' + xy = 0 \tag{8.58}$$

Θέτοντας $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ παίρνουμε $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ ή

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1} a_{n-1}x^n = 0.$$

8.9 Ομογενείς Διαφορικές εξισώσεις

Εξετάζουμε την διαφορική εξίσωση

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0, \qquad x > 0. \tag{8.59}$$

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής $y = x^r$. Θα πρέπει να ισχύει $r(r-1)x^{r-2} + arx^{r-2} + bx^{r-2} = 0$ και επομένως, αφού $x > 0$, το r θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $r(r-1) + ar + b = 0$ ή

$$r^2 + r(a-1) + b = 0. \tag{8.60}$$

Στην γενική περίπτωση η παραπάνω εξίσωση έχει δύο διακριτές ρίζες, r_1, r_2 και η γενική λύση της (8.59) δίνεται από την

$$y(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}. \tag{8.61}$$

Αν οι ρίζες της (8.60) είναι μιγαδικές, δηλαδή $r_1 = \kappa + i\lambda$, $r_2 = \kappa - i\lambda$ τότε το δεξί μέλος της (8.61) γίνεται

$$\begin{aligned} x^\kappa \left(C_1 x^{i\lambda} + C_2 x^{-i\lambda}\right) &= x^\kappa \left(C_1 e^{\log x^{i\lambda}} + C_2 e^{\log x^{-i\lambda}}\right) \\ &= x^\kappa \left(C_1 e^{i\lambda \log x} + C_2 e^{-i\lambda \log x}\right) \\ &= x^\kappa \left(D_1 \cos(\lambda \log x) + D_2 \sin(\lambda \log x)\right) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση λάβαμε υπ΄ όψι μας την σχέση του Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Οι D_1, D_2 είναι αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Όταν η (8.61) έχει μια διπλή ρίζα τότε η παραπάνω μέθοδος προσδιορίζει μια μόνο λύση της (8.59).

8.10 Μέθοδος των μεταβλητών συντελεστών του Lagrange

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί προκειμένου να βρούμε μια δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη, λύση μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ όταν μια λύση είναι ήδη γνωστή. Έστω η ΔΕ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{8.62}$$

και έστω $y_1(x)$ μια λύση της. Θα αναζητήσουμε μια δεύτερη λύση της μορφής

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) \tag{8.63}$$

όπου $v(x)$ μια άγνωστη συνάρτηση η οποία θα προσδιοριστεί κατάλληλα προκειμένου η y_2 να ικανοποιεί την (8.62). Παραγωγίζοντας την (8.63) παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_2' &= v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''. \end{aligned}$$

Προκειμένου να είναι η (8.63) λύση της (8.62) θα πρέπει να ισχύει $y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0$ και αντικαθιστώντας τις τιμές των παραγώγων αφού παραγοντοποιήσουμε κατάλληλα παίρνουμε

$$v\,(y_1'' + Py_1' + Qy) + v''y_1 + v'\,(2y_1' + Py_1) = 0.$$

Ο παράγοντας του v μέσα στην πρώτη παρένθεση στην παραπάνω σχέση μηδενίζεται αφού εξ υποθέσεως η y_1 είναι λύση της (8.62). Αν θέσουμε $u = v'$ τότε θα έχουμε

$$u'y_1 + u(2y_1' + Py_1) = 0$$

η

$$u' + u\left(2\frac{y_1'}{y_1} + P\right) = 0.$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι μια ΔΕ πρώτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές την οποία εύκολα μπορούμε να επιλύσουμε πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}.$$

Έχουμε συνεπώς

$$e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}u' + e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}u\left(2\frac{y_1'}{y_1} + P\right) = 0$$

ή

$$\left(e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx}u\right)' = 0$$

ή

$$u = Ce^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+P\right)dx} = Ce^{-2\log y_1 - \int Pdx} = Cy_1^{-2}e^{-\int Pdx},$$

όπου C είναι μια σταθερά που προκύπτει από την ολοκλήρωση. Ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά, δεδομένου ότι $u = v'$ παίρνουμε

$$v(x) = C\int y_1^{-2}e^{-\int Pdx}dx + C_0.$$

Συνεπώς μια δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη λύση της (8.62) θα είναι η $y_2 = vy_1$ ή

$$y_2 = Cy_1\int y_1^{-2}e^{-\int Pdx}dx + C_0y_1.$$

Δεδομένου ότι η y_1 είναι ήδη γνωστή και οι πολλαπλασιαστικές σταθερές σ′ αυτή τη φάση δεν μας ενδιαφέρουν έχουμε απλώς την δεύτερη λύση

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P dx} dx. \tag{8.64}$$

Η γενική λύση της (8.62) είναι επομένως η

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \tag{8.65}$$

(Το τελευταίο αυτό βήμα θα πρέπει να επεξηγεί πλήρως το λόγο που γράψαμε την δεύτερη λύση στην μορφή (8.64).)

8.11 Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα και το Εκθετικό Ενός Πίνακα

Εδώ θα εξετάσουμε γραμμικά διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστες. Το γενικό διαφορικό σύστημα αυτής της μορφής είναι το

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= a_{11} x_1(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} x_n(t) &= a_{n1} x_1(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t) + b_n(t) \end{aligned} \tag{8.66}$$

με δεδομένες αρχικές συνθήκες $x_1(0) = c_1, \ldots, x_n(0) = c_n$. Οι συντελεστές a_{ij} και οι συναρτήσεις $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ είναι επίσης δεδομένα του προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά μέσω του πίνακα A με στοιχεία a_{ij}, του διανύσματος στήλης $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$, $c = [c_1, \ldots, c_n]^T$ και του $b(t) = [b_1(t), \ldots, b_n(t)]^T$ ως

$$, x'(t) = Ax(t) + b(t), \qquad x(0) = c. \tag{8.67}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα ως εξής

$$e^{-At} x'(t) - e^{-At} x(t) = e^{-At} b(t) \;\Rightarrow\; \left(e^{-At} x(t)\right) = e^{-At} b(t) \;\Rightarrow\; e^{-At} x(t) - e^{-A\,0} x(0) = \int_0^t e^{-As} b(s) ds.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπ′ όψιν ότι $x(0) = c$, $e^{-A\,0} = I$, έχουμε $e^{-At} x(t) = c + \int_0^t e^{-As} b(s) ds$

$$x(t) = e^{At} c + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s) ds. \tag{8.68}$$

Όταν $b(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$ το σύστημα ονομάζεται ομογενές και η λύση του είναι

$$x(t) = e^{At} c. \tag{8.69}$$

Πρακτικά, η δυσκολία επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος έγκειται στον υπολογισμό του εκθετικού e^{At}.

Παράδειγμα 1. Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$.

Εδώ, ο πίνακας A είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 4 = (\lambda-1)(\lambda+3) = 0.$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\lambda_1 = 1 \ : \ \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{ιδιοδιάνυσμα} \ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \ : \ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{ιδιοδιάνυσμα} \ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα και ο αντίστροφός του είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς,

$$e^{At} = Me^{\Lambda t}M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & \\ & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-3t} & e^t - e^{-3t} \\ e^t - e^{-3t} & e^t + e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-3t} & e^t - e^{-3t} \\ e^t - e^{-3t} & e^t + e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}.$$

8.11.1 Ένα Παράδειγμα Διαφορικού Συστήματος

Έστω τρεις δεξαμενές που περιέχουν αλμυρό νερο με πυκνότητα αλατιού (σε gr/m^3), x_i, $i = 1, 2, 3$. Καθαρό νερό εισρέει στην πρώτη δεξαμενή με ρυθμό r (m^3/sec).

Έστω ότι ο όγκος της δεξαμενής i είναι V_i (m^3) και η αρχική μάζα αλατιού στην δεξαμενή i είναι m_i (gr) και επομένως $x_i(0) = m_i/V_i$. Θέλουμε να βρούμε τις πυκνότητες του αλατιού στις τρεις δεξαμενές ως συνάρτηση του χρόνου. Προκειμένου να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την μεταβολή των πυκονοτήτων παρατηρούμε ότι

$$m_1(t+\Delta t) = x_1(t)(V_1 - r\Delta t)$$

και συνεπώς

$$x_1(t+\Delta t) - x_1(t) = x_1(t)\left(1 - \frac{r}{V_1}\Delta t\right) - x_1(t).$$

Θέτοντας

$$\alpha_i := \frac{r}{V_i} \tag{8.70}$$

έχουμε

$$\frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} = -\alpha_i x_1(t)$$

και αφήνοντας $\Delta t \to 0$ στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$x_1'(t) = -\alpha_1 x_1(t). \tag{8.71}$$

Για την δεξαμενή $i = 2, 3$ έχουμε

$$m_i(t+\Delta) = x_i(t)\,(V_i - r\Delta t) + x_{i-1}(t) r\Delta t.$$

Διαιρώντας με τον όγκο της δεξαμενής, V_i, έχουμε

$$x_i(t+\Delta t) = x_i(t) - \alpha_i x_i(t)\Delta t + \alpha_i x_{i-1}(t)$$

απ΄ όπου παίρνουμε

$$\frac{x_i(t+\Delta) - x_i(t)}{\Delta t} = -\alpha_i x_i(t) + \alpha_i x_{i-1}(t).$$

Αφήνοντας πάλι $\Delta t \to 0$ έχουμε

$$x_i'(t) = -\alpha_i x_i(t) + \alpha_i x_{i-1}(t). \tag{8.72}$$

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις γράφονται ως σύστημα

$$X'(t) = AX(t)$$

με

$$A := \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & \\ \alpha_2 & -\alpha_2 & \\ & \alpha_3 & -\alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός και οι ιδιοτιμές του φαίνονται στην διαγώνιο και είναι οι α_i, $i = 1, 2, 3$.

8.12 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ως γραμμικά διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης

Ας εξετάσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = r(t), \quad x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2. \tag{8.73}$$

Θέτοντας $x_1(t) = x(t)$ και $x_2(t) = x'(t)$ έχουμε ότι $x''(t) = x_2'(t)$ και επομένως η (8.73) γράφεται ως

$$x_2'(t) + ax_2(t) + bx_1(t) = r(t).$$

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι η (8.73) γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

και επομένως έχουμε ένα διαφορικό σύστημα της μορφής (8.67). Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα του συστήματος θα είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda a + b = 0 \tag{8.74}$$

(δηλαδή ίδια με την χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης). Αν λ_1, λ_2 είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής αυτής εξίσωσης τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν ως

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & -1 \\ b & \lambda_1 + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u - v \\ bu + v(\lambda_1 + a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Διαλέγοντας $u = 1$, $v = \lambda_1$ βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση ικανοποιείται. Ικανοποιείται επίσης και η δεύτερη γιατί $b + \lambda_1^2 + \lambda_1 a = 0$. Επομένως το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 είναι το $[1, \lambda_1]^T$ και, παρομοίως, εκείνο που αντιστοιχεί στην λ_2 είναι το $[1, \lambda_2]^T$. 'ρα, ο πίνακας M του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα, καθώς και ο M^{-1} είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι

$$e^{At} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την σχέση (8.69), έχουμε

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$x(t) = c_1 \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + c_2 \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Συγκρίνατε την σχέση αυτή με την ανάλυση της παραγράφου 8.5.2.

8.12.1 Υπολογισμός του e^{At} μέσω της λύσης ενός διαφορικού συστήματος

Έστω ο πίνακας

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το e^{Jt} μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n$ και να υπολογίσουμε τις δυνάμεις

$$J^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα

$$e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n2^{n-1} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}. \tag{8.75}$$

Στην τελευταία εξίσωση, εκτός από την σειρά για την εκθετική συνάρτηση, χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} 2^{n-1} = te^{2t}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το διαφορικο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

πρώτα με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ προκειμένου να προσδιορίσουμε την πρώτη στήλη του πίνακα e^{Jt} και στη συνέχεια με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ώστε να προσδιορίσουμε την δεύτερη στήλη. Το σύστημα γράφεται ως

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \tag{8.76}$$
$$x_2'(t) = 2x_2(t) \tag{8.77}$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $x_2(t) = x_2(0)e^{2t}$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + x_2(0)e^{2t} \Rightarrow e^{-2t}x_1'(t) - 2e^{-2t}x_1'(t) = x_2(0) \Rightarrow \left(e^{-2t}x_1(t)\right)' = x_2(0) \\ &\Rightarrow e^{-2t}x_1(t) - x_1(0) = x_2(0)t \end{aligned}$$

ή

$$x_1(t) = x_1(0)e^{2t} + x_2(0)te^{2t}.$$

Αντικαθιστώντας τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες $x_1(0)$, $x_2(0)$, προκύπτουν τα στοιχεία του πίνακα (8.75).

Κεφάλαιο 9

Κυρτότητα στον $\mathbb{R}^n$ και το Λήμμα του Farkas

9.1 Κλειστά Σύνολα

Ξεκινάμε με κάποιες έννοιες, γνωστές από την μαθηματική ανάλυση. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *κλειστό* αν περιέχει κάθε οριακό σημείο του. Το σύνολο ονομάζεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία στοιχείων του περιέχει υπακολουθία συγκλίνουσα σε σημείο του συνόλου. Στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$ ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Θεώρημα 20. *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$ συνεχής συνάρτηση τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη Έστω $\{f(a_k)\}$ μια ακολουθία σημείων του $f(A)$ και $\{a_k\}$ μια από τις ακολουθίες σημείων του A από τις οποίες θα μπορούσε να προέρχεται. (Η συνάρτηση f δεν είναι υποχρεωτικά 1–1.) Αφού το A είναι συμπαγές υπάρχει υπακολουθία $\{a_{i_k}\}$ τέτοια ώστε $a_{i_k} \to a \in A$. Συνεπώς, αφού η f είναι συνεχής, $f(a_{i_k}) \to f(a)$ και $f(a) \in f(A)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f(A)$ είναι συμπαγές. ∎

Πόρισμα 3. *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχουν $a, b \in A$ τέτοια ώστε $f(a) = \inf\{f(x) : x \in A\}$ και $f(b) = \sup\{f(x) : x \in A\}$.*

Απόδειξη Το θεώρημα δείχνει ότι το σύνολο $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ είναι συμπαγές και συνεπώς κλειστό και φραγμένο. Επομένως έχει πεπερασμένο infimum και supremum.

Επιπλέον τόσο το infimum όσο και το supremum ανήκουν στο $f(A)$ μια και το $f(A)$ είναι κλειστό σύνολο. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $a, b \in A$ τέτοια ώστε $f(a) = \inf f(A)$ και $f(b) = \sup f(A)$. ∎

Ορισμός 13. *Η απόσταση του σημείου x από το σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως $d_A(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$.*

Πρόταση 11. *Η συνάρτηση απόστασης ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$| d_A(y) - d_A(x) | \leq \|x - y\|. \tag{9.1}$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται φυσικά ότι η $d_A(\cdot)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - a\| < d_A(x) + \epsilon$. Επίσης

$$d_A(y) \leq \|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \|y - x\| + d_A(x) + \epsilon.$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει επίσης ότι $d_A(y) \leq \|y - x\| + d_A(x)$ ή

$$d_A(y) - d_A(x) \leq \|y - x\|.$$

Εναλλάσσοντας τον ρόλο των x και y θα έχουμε επίσης ότι

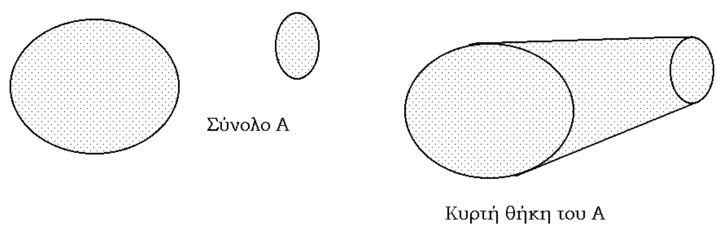
$$d_A(x) - d_A(y) \leq \|y - x\|.$$

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει η (9.1). ∎

Πρόταση 12. *Έστω A ένα μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $d_A(x) = \|x - a_0\|$.*

Απόδειξη. Υπάρχει ακολουθία $\{a_k\}$ σημείων του A τέτοια ώστε $\|x - a_k\| \to d_A(x)$. Οι συγκλίνουσες ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ είναι φραγμένες και συνεπώς υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $\|x - a_k\| \leq r$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, από την τριγωνική ιδιότητα ισχύει ότι $\|a_k\| \leq \|a_k - x\| + \|x\| \leq r + \|x\|$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_k\}$ είναι φραγμένη και επομένως υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{a_{i_k}\}$ τέτοια ώστε $a_{i_k} \to a_0 \in \mathbb{R}^n$. Επειδή το A είναι κλειστό σύνολο, $a_0 \in A$. Έχουμε λοιπόν ότι $\|x - a_{i_k}\| \to \|x - a_0\|$ όταν $k \to \infty$. Επίσης, $\|x - a_{i_k}\| \to d_A(x)$ αφού $\{a_{i_k}\}$ είναι υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας. Από την μοναδικότητα του ορίου προκύπτει επίσης ότι $d_A(x) = \|x - a_0\|$. □

Θεώρημα 21. *Έστω A, B, μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το A κλειστό και το B συμπαγές. Τότε υπάρχει $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε $\|a_0 - b_0\| = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$.*



Σχήμα 9.1: Η κυρτή θήκη

Απόδειξη. Η συνάρτηση $d_A(\cdot)$ είναι συνεχής. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο συμπαγές σύνολο B τότε $d_A(b_0) = \inf\{d_A(b) : b \in B\}$ για κάποιο $b_0 \in B$. Αφού το A είναι κλειστό υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $d_A(b_0) = \|a_0 - b_0\|$. Για κάθε $a \in A$, $b \in B$, $\|a - b\| \geq d_A(b) \geq d_A(b_0) = \|a_0 - b_0\|$. Συνεπώς, $\|a_0 - b_0\| = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$ αφου $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. □

9.2 Κυρτά Σύνολα

Ένα υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται *κυρτό* αν, για κάθε $x, y \in C$ και κάθε $\lambda \in [0, 1]$, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$.

Αν a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ ονομάζεται *κυρτός συνδυασμός* των a_i αν $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Αν $\{A_i; i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από κυρτά σύνολα, τότε $\bigcap_{i \in I} A_i$ είναι επίσης κυρτό σύνολο. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς αφού για $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ θα έχουμε $x, y \in A_i$ για κάθε $i \in I$ και αφού τα A_i είναι κυρτά $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A_i$ για κάθε i άρα $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Η *κυρτή θήκη* του συνόλου $A \in \mathbb{R}^n$ την οποία συμβολίζουμε ως conv$A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A δηλαδή η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το A. (Η τομή αυτή είναι κυρτή με βάση την προηγούμενη παρατήρηση.)

Κάθε κυρτός συνδυασμός στοιχείων ενός κυρτού συνόλου A ανήκει στο σύνολο A. Αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:

Θεώρημα 22. *Έστω $a_1, \ldots, a_m$ σημεία ενός κυρτού συνόλου $A \in \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ με $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. Τότε $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \in A$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m. Το θεώρημα ισχύει τετριμένα για $m = 1$ και από τον ορισμό της κυρτότητας για $m = 2$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $m = k \geq 2$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $m = k+1$, δηλαδή ότι $x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j a_j \in A$. Αν $\mu := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ τότε ασφαλώς $x = a_{k+1} \in A$. Έστω λοιπόν $\mu > 0$. Ορίζουμε $y = \frac{\lambda_1}{\mu} a_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\mu} a_k$. Θα ισχύει ότι $y \in A$ από την επαγωγική υπόθεση. Αλλά $x = \mu y + (1-\mu) a_{k+1} \in A$ από την κυρτότητα του A. □

Θεώρημα 23. *Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε conv A είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του A.*

Απόδειξη. Έστω B το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του A δηλαδή $B = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i ; m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύνολο B είναι κυρτό. Πράγματι, αν $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{m'} \lambda_i' a_i'$ είναι δύο κυρτοί συνδυασμοί στοιχείων του A και $\mu \in [0,1]$, $\mu' := 1-\mu$, τότε $\mu x + \mu' y = \mu\lambda_1 a_1 + \cdots + \mu\lambda_m a_m + \mu'\lambda_1' a_1' + \cdots + \mu'\lambda_{m'}' a_{m'}'$ είναι επίσης κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A και επομένως ανήκει στο B. Επίσης ισχύει προφανώς ότι $A \subset B$. Συνεπώς αφού conv$A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A ισχύει ότι conv$A \subset B$. Αντίστροφα, κάθε στοιχείο του B είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A και επομένως ανήκει σε κάθε κυρτό σύνολο που περιέχει το A, επομένως και στην τομή τους, δηλαδή το conv$A$. □

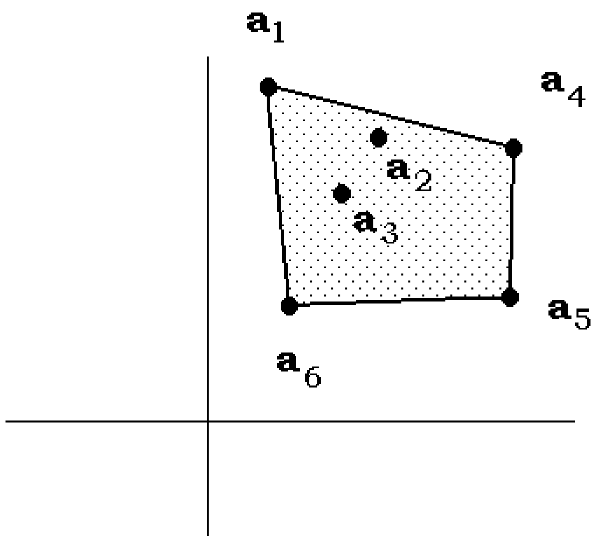
Από το παραπάνω έχουμε και τα εξής προφανή πορίσματα:

Πόρισμα 4. *Αν ένα σημείο x ανήκει στην κυρτή θήκη του A τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και σημεία $a_1, \ldots, a_m$ του A τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, δηλαδή το x μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A.*

Πόρισμα 5. *Η κυρτή θήκη του συνόλου $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ είναι το σύνολο $\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$.*

9.3 Το θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου

Λήμμα 3. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν για κάποιο $\alpha > 0$, $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ για κάθε $0 < \lambda < \alpha$, τότε $x^T y \geq 0$.*



Σχήμα 9.2: Η κυρτή θήκη του συνόλου $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\|x\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda x^T y + \lambda^2 \|y\|^2$$

και συνεπώς, αφού $\lambda > 0$, $x^T y + \frac{1}{2}\lambda \|y\|^2 \geq 0$. Αφήνοντας το $\lambda \to 0$ συμπεραίνουμε ότι $x^T y \geq 0$. □

Θεώρημα 24. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, κυρτό, κλειστό σύνολο και x σημείο του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - a_0\| = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}$. Επιπλέον, $(x - a_0)^T(a - a_0) \leq 0$ για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη. Από προηγούμενα αποτελέσματα για κλειστά σύνολα ξέρουμε ότι υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - a_0\| = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}$. Έστω $a \in A$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Η κυρτότης του A έχει ως συνέπεια ότι $(1 - \lambda)a_0 + \lambda a \in A$. Ισχύει ότι

$$\|x - ((1 - \lambda)a_0 + \lambda a)\| = \|(x - a_0) + \lambda(a_0 - a)\|^2 \geq \|x - a_0\|,$$

όπου, η τελευταία ανισότητα οφείλεται στον ορισμό του a_0 ως του εγγύτερου σημείου του A στο x. Από το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι $(x - a_0)^T(a - a_0) \leq 0$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα του a_0 έστω $a_1 \in A$ ένα άλλο σημείο τέτοιο ώστε $\|x - a_1\| = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}$. Εφαρμόζοντας τον ίδιο συλλογισμό έχουμε $(x - a_1)^T(a - a_1) \leq 0$. Δεδομένου ότι το a είναι οποιοδήποτε σημείο του A, θέτοντας $a = a_0$ παίρνουμε

$$(x - a_1)^T(a_0 - a_1) \leq 0. \tag{9.2}$$

Από την συμμετρία, εναλλάσσοντας τον ρόλο των a_0 και a_1 έχουμε

$$(x - a_0)^T (a_1 - a_0) \leq 0. \tag{9.3}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (9.2), (9.3), παίρνουμε $(a_1 - a_0)^T(a_1 - a_0) = \|a_1 - a_0\|^2 \leq 0$ απ΄ όπου προκύπτει ότι $a_1 = a_0$. □

Ένα υπερεπίπεδο $\alpha^T z + \beta = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ *διαχωρίζει* δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ αν $\alpha^T z + \beta \geq 0$ για κάθε $z \in A$ και $\alpha^T z + \beta \leq 0$ για κάθε $z \in B$. Αν οι παραπάνω ανισότητες είναι αυστηρές τότε το υπερεπίπεδο *διαχωρίζει αυστηρά* τα δύο σύνολα.

Θεώρημα 25. *Έστω A, B, ξένα, μη κενά, κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ όπου A κλειστό και B συμπαγές. Τότε τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά από ένα υπερεπίπεδο στο $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε το a να είναι το εγγύτερο σημείο του A στο B και το b το εγγύτερο σημείο του B στο A. Αυτό είναι συνέπεια των προηγουμένων θεωρημάτων. Αφού $A \cap B = \emptyset$, $a \neq b$. Αν $x \in A$, $y \in B$, τότε από το προηγούμενο θεώρημα $(b - a)^T(x - a) \leq 0$ και $(a - b)^T(y - b) \leq 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} (a-b)^T x &\geq (a-b)^T a = \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a-b\|^2\right) > \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\ &> \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 - \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) = (a-b)^T b \geq (a-b)^T y. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\theta = a - b$ και $\gamma = -\frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2)$. Τότε η παραπάνω σχέσεις μας δίνουν

$$\theta^T x + \gamma > 0 > \theta^T y + \gamma.$$

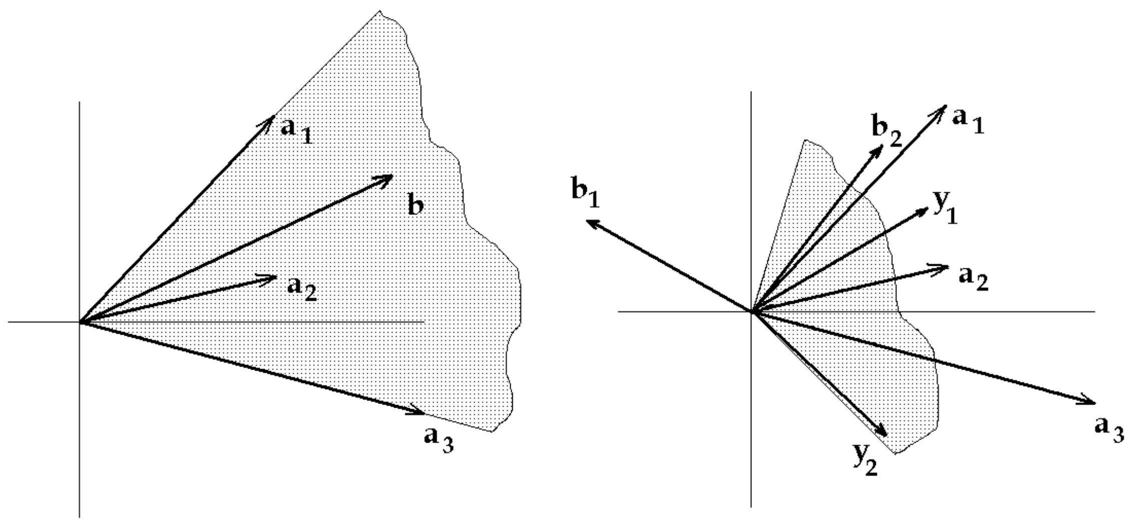
Συνεπώς το διαχωρίζον υπερεπίπεδο είναι το $\theta^T z + \gamma = 0$. □

9.4 Το Λήμμα του Farkas

Θεώρημα 26 (Λήμμα του Farkas). *Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και b ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ τότε ακριβώς μία από τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(*i*) *Υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.*

(*ii*) *Υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0$ και $y^T b < 0$.*



Σχήμα 9.3: Στο αριστερό σχήμα βλέπουμε την πρώτη περίπτωση του λήμματος του Farkas. Το διάνυσμα b ανήκει στον κώνο που σχηματίζουν τα a_1, a_2, a_3. Στο δεξιό σχήμα βλέπουμε την δεύτερη περίπτωση του λήμματος. Τα b_1, b_2 δεν ανήκουν στον κώνο των a_1, a_2, a_3 και επομένως υπάρχουν y_1, y_2 τέτοια ώστε $y^T a_i \geq 0$ και $y^T b < 0$.

Απόδειξη. Πρώτα απ' όλα διαπιστώνουμε ότι δεν μπορουν αν ισχύσουν τα (i) και (ii) ταυτόχρονα. Πράγματι, σ' αυτή την περίπτωση, για κάποιο $x \geq 0$ $Ax = b$ ενώ ταυτόχρονα υπάρχει y που να ικανοποιεί την (ii). Γι' αυτό το y έχουμε $y^T Ax = y^T b$. Το δεξί μέλος αυτής της τελευταίας σχέσης είναι από την (ii) αυστηρά αρνητικό ενώ το αριστερό είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο μη αρνητικών διανυσμάτων, του $A^T y$ και του x.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι αν δεν ισχύει η (i) τότε θα ισχύει υποχρεωτικά η (ii). Αν δεν ισχύει η (i) τότε το b βρίσκεται έξω από τον κυρτό κλειστό κώνο $C := \{Ax : x \geq 0\}$. Συνεπώς υπάρχει διαχωρίζον υπερεπίπεδο δηλαδή ένα υπερεπίπεδο $\gamma^T z + \beta = 0$ όπου $\gamma \in \mathbb{R}^m$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\gamma^T z + \beta > 0 \qquad \forall z \in C, \tag{9.4}$$

$$\gamma^T b + \beta < 0. \tag{9.5}$$

Αν $z \in C$ και $r > 0$ τότε και $rz \in C$, συνεπώς από την (9.4) $r\gamma^T z + \beta > 0$ για κάθε $z \in C$ και $r > 0$ ή $\gamma^T z + \beta/r > 0$. Αφήνοντας $r \to \infty$ βλέπουμε ότι $\gamma^T z \geq 0$ για όλα τα $z \in C$. Αυτό ισχύει εν προκειμένω και για τις στήλες $a_1, \ldots, a_n$ του πίνακα A. Συνεπώς $\gamma^T a_i \geq$ και μπορούμε να διαλέξουμε το διάνυσμα y που πρέπει να βρούμε για να ικανοποιήσουμε την (ii) ίσο με το γ. Ακόμη, θέτωντας $z = 0$ στην (9.4) βλέπουμε ότι $\beta > 0$. Συνεπώς από την (9.5) έχουμε $y^T b < -\beta < 0$. □

Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές διατυπώσεις του λήμματος του του Farkas. Αναφέρουμε ενδεικτικά τις ακόλουθες δύο:

Θεώρημα 27 (Farkas, 1η Εναλλακτική διατύπωση). *Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και b ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ τότε ακριβώς μία από τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(i) *Υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $Ax \geq b$.*

(ii) *Υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ τέτοιο ώστε $y^T A \leq 0$ και $y^T b > 0$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η διατύπωση αυτή είναι ισοδύναμη με την αρχική διατύπωση του λήμματος του Farkas. Για το σκοπό αυτό πρώτα θα δείξουμε ότι η αρχική διατύπωση συνεπάγεται την παρούσα. Αν ισχύει το *ι)* της παρούσας τότε ισχύει και ότι υπάρχει $x \geq 0$, $s \geq 0$ τέτοια ώστε $[A, I]\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$. Είναι σαφές τώρα που η συνθήκη είναι γραμμένη στη λογικη της αρχικής διατύπωσης ότι η εναλλακτική πρόταση είναι ότι υπάρχει y τέτοιο ώστε $y^T[A, I] \geq 0$ και $y^T b < 0$. Αλλά η πρώτη σχέση γράφεται και ως $y^T A \geq 0$ και $y^T \geq 0$. ῎ρα η δεύτερη διατύπωση είναι συνέπεια της πρώτης.

Θα δείξουμε τώρα και το αντίστροφο. Αν η δεύτερη διατύπωση είναι αληθής και γράψουμε την $Ax = b$ ως $Ax \leq b$ και $-Ax \leq -b$ ή ισοδύναμα $\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$ τότε η εναλλακτική πρόταση σύμφωνα με την δεύτερη διατύπωση είναι ότι υπάρχει διάνυσμα $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε $u \geq 0$, $v \geq 0$, και $\begin{bmatrix} u^T, v^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \geq 0$, $[u^T, v^T]b > 0$. Οι σχέσεις αυτές ξαναγράφονται ως $(u - v)^T A \geq 0$, και $(u - v)^T b < 0$. Αν θέσουμε $y = u - v$ βλέπουμε ότι η πρόταση αυτή είναι η δεύτερη εναλλακτική πρόταση της πρώτης διατύπωσης μια και το y δεν είναι πλέον υποχρεωτικά θετικό. □

Μια ακόμη ισοδύναμη διατύπωση των δύο εναλλακτικών προτάσεων, την οποία αναφέρουμε χωρίς απόδειξη μια και είναι ίδια ουσιαστικά με την απόδειξη που ήδη δώσαμε είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 28 (2η Εναλλακτική διατύπωση). *Με τον ίδιο συμβολισμό μία από τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(i) *Υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $Ax \leq b$.*

(ii) *Υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0$ και $y^T b < 0$.*

Οι εφαρμογές του λήμματος του Farkas είναι πάρα πολλές. Θα δώσουμε μερικές άμεσα ενώ άλλες θα δούμε στην συνέχεια.

Θεώρημα 29 (Θεώρημα εναλλακτικών του Fredholm). *Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και $b \in \mathbb{R}^m$ τότε ακριβώς μία από τις δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(i) *Υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.*

(ii) *Υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A = 0$ και $y^T b \neq 0$.*

Απόδειξη. Στην πρώτη εναλλακτική πρόταση το x μπορεί να παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Farkas πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα αναζήτησης θετικών λύσεων. Αυτό γίνεται εύκολα θέτοντας $x = u - v$ όπου $u, v \geq 0$. (Αυτό το τέχνασμα έχει ευρύτατη εφαρμογή όπως θα γίνει σαφές στη συνέχεια.) Η πρώτη εναλλακτική πρόταση γίνεται τότε $[A \mid -A][{u \atop v}] = b$ με $u, v \geq 0$ και είναι στη μορφή του Λήμματος του Farkas. Η εναλλακτική πρόταση του Λήμματος του Farkas είναι ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T[A \mid -A] \geq 0$ και $y^T b < 0$. Αλλά αυτό σημαίνει $y^T A \geq 0$ και $y^T A \leq 0$ ή $y^T A = 0$. Η δεύτερη συνθήκη, μπορεί απλά να γραφεί $y^T b \neq 0$. (Παρατηρείστε ότι αν για κάποιο y, $y^T A = 0$, τότε και $(-y)^T A = 0$ και συνεπώς το πρόσημο δεν παίζει ρόλο.) □

Το ακόλουθο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη στάσιμης κατανομής σε μια αλυσίδα Markov με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας $n \times n$, P, ονομάζεται *στοχαστικός* αν $P_{ij} \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Θεώρημα 30. *Αν P είναι στοχαστικός πίνακας υπάρχει διάνυσμα γραμμής $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ τέτοιο ώστε $\pi_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ το οποίο να ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας*

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i P_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.6}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $P^T x = x$ και $u^T x = 1$ όπου $u^T = [1, 1, \ldots, 1]$. Ισοδύναμα αρκει να δείξουμε ότι η $Ax = b$ έχει λύση $x \geq 0$ με

$$A = \begin{bmatrix} P^T - I \\ u^T \end{bmatrix}, \qquad \text{και} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι αν υπάρχει τέτοια λύση τότε έχουμε απλώς $x^T = \pi$. Αν δεν υπάρχει τέτοια λύση τότε θα πρέπει να ισχύει η δεύτερη εναλλακτική προταση του Farkas η οποία στην περίπτωσή μας λέει ότι θα πρέπει να υπάρχει $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0$

και $y^T b < 0$. Αρχίζοντας από την δεύτερη σχέση γράφουμε $y^T = [z_1, \ldots, z_n, -\lambda]$ και παρατηρούμε ότι $y^T b = -\lambda < 0$, συνεπώς $\lambda > 0$. (Αυτό δικαιολογεί και την περίεργη επιλογή μας για τον συμβολισμό των συνιστωσών του διανύσματος y.) Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην $y^T A \geq 0$ η οποία σημαίνει ότι

$$y^T \begin{bmatrix} P^T - I \\ u^T \end{bmatrix} \geq 0.$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} z_j - z_i - \lambda > 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9.7}$$

Έστω m εκείνος ο δείκτης για τον οποίο $z_m = \max_{j=1,\ldots,n} z_j$. Εφόσον $z_m \geq z_j$ για κάθε j θα ισχύει και ότι

$$z_m \geq \sum_{j=1}^{n} P_{mj} z_j. \tag{9.8}$$

Εφαρμόζοντας την (9.7) για $i = m$ παίρνουμε την

$$\sum_{j=1}^{n} P_{mj} z_j > z_m + \lambda > z_m. \tag{9.9}$$

Η αντίφαση μεταξύ των (9.8) και (9.9) δείχνει ότι η δεύτερη εναλλακτική πρόταση του Farkas δεν μπορεί να ισχύει και συνεπώς αναγκαστικά ισχύει η πρώτη. □

Τέλος θα δώσουμε μια εναλλακτική διατύπωση του Λήμματος του Farkas.

Θεώρημα 31 (Λήμμα Farkas–Δεύτερη διατύπωση). *Έστω $A = (a_{ij})$ $m \times n$ πίνακας. Τότε είτε το i) είτε το ii) αλλά όχι και τα δύο ισχύουν*

i) Το σημείο $0 \in \mathbb{R}^m$ περιέχεται στην κυρτή θήκη των $m + n$ σημείων

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(όπου e_i το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση i στον $\mathbb{R}^m$).

ii) Υπάρχουν αριθμοί $x_1, \ldots, x_m$ τέτοιοι ώστε $x_i > 0$, $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ και $\sum_{i=1}^m x_i a_{ij} > 0$ για $j = 1, 2, \ldots, n$.

Απόδειξη Το 0 ανήκει στην κυρτή θήκη των διανυσμάτων της (i) αν υπάρχουν $s_j \geq 0$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{n} s_j a_j + \sum_{i=1}^{m} s_{m+i} e_i = 0$ και $\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1$. Αν $A = [a_1 \mid \cdots \mid a_n]$, η πρώτη πρόταση γράφεται επίσης ως

$$\begin{bmatrix} A \ , \ I_m \\ e^T \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: b, \qquad s \geq 0. \tag{9.10}$$

I_m είναι ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας και $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$ είναι διάνυσμα με $m + n$ στοιχεία ίσα με την μονάδα. Ακόμη, $s := (s_1, s_2, \ldots, s_{m+n})^T$ ενώ το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα διάνυσμα με $m + 1$ στοιχεία, τα πρώτα m από τα οποία είναι 0. Παρατηρείστε ότι η συνθήκη $\sum_{j=1}^{n+m} s_j = 1$ εξασφαλίζεται απο την τελευταία γραμμή του πίνακα της (9.10). Αν δεν ισχύει η πρώτη πρόταση τότε από το λήμμα του Farkas υπάρχει $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ τέτοιο ώστε

$$y^T \begin{bmatrix} A \ , \ I_m \\ e^T \end{bmatrix} \geq 0 \tag{9.11}$$

και $y^T b < 0$. Θέτουμε $y^T := (y_1, \ldots, y_m, -\lambda)$. Δεδομένης της μορφής του b η σχέση $y^T b < 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda > 0$. Συνεπώς, η (9.11) συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - \lambda \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.12}$$

$$y_i - \lambda \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{9.13}$$

Αλλά αυτή η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq \lambda > 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, και $y_i \geq \lambda > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$. Μπορούμε συνεπώς να θέσουμε

$$x_i = \frac{y_i}{\sum_{k=1}^{m} y_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Συνεπώς, αν δεν ισχύει η πρόταση (i) τότε υποχρεωτικά ισχύει η πρόταση (ii). ∎

9.5 Το Θεώρημα Arbitrage

Έχουμε διαθέσιμες n δυνατές επενδύσεις και υπάρχει το ενδεχόμενο m διαφορετικών σεναρίων (states of nature). Αν επιλέξουμε να επενδύσουμε 1 ευρώ στην επένδυση j και συμβεί το σενάριο i τότε η απόδοση είναι r_{ij}. Ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο είναι ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^T$. Το άθροισμα $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j$ περιγράφει την απόδοση του χαρτοφυλακίου x όταν το σενάριο που συμβαίνει είναι το i. Έστω επίσης $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ ένα διάνυσμα τιμών των διαφόρων επενδύσεων. Οι τιμές αυτές δεν είναι όλες υποχρεωτικά θετικές. Τότε το κόστος ενός χαρτοφυλακίου είναι $p^T x$ ενώ η απόδοσή του είναι το διάνυσμα Rx στον $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα 32. *Ακριβώς ένα από τα ακόλουθα δύο συμβαίνουν:*

ι) *Υπάρχει χαρτοφυλάκιο x για το οποίο $p^T x < 0$ και $Rx \geq 0$. Αυτή είναι η περίπτωση του arbitrage.*

ιι) *Υπάρχει διάνυσμα πιθανοτήτων $q \in \mathbb{R}^m$, $q \geq 0$, $\sum_{i=1}^m q_i = 1$, τέτοιο ώστε $q^T R = cp^T$, όπου $c > 0$ δηλαδή οι τιμές των αποδόσεων είναι ανάλογες προς τις μέσες τιμές ως προς μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στα διάφορα σενάρια.*

Απόδειξη. Έφαρμόζουμε το Λήμμα του Farkas στον πίνακα R^T. Η μία εναλλακτική δυνατότητα είναι να υπάρχει λύση στο σύστημα $R^T v = p$ με $v \geq 0$. Ισχύει αναγκαστικά ότι $\sum_{i=1}^m v_i > 0$ εκτός από την τετριμμένη περίπτωση που $p = 0$. Συνεπώς, θέτωντας $c^{-1} = \sum_{i=1}^m v_i$, και $q = c^{-1} v$ έχουμε $q^T R = cp^T$. Αυτή είναι η περίπτωση (ii) του θεωρήματος.

Αν δεν ισχύει η πρώτη εναλλακτική δυνατότητα τότε υποχρεωτικά θα υπάρχει x τέτοιο ώστε $x^T R^T \geq 0$ και $x^T p < 0$, δηλαδή υπάρχει χαρτοφυλάκιο του οποίου το κόστος είναι αρνητικό (αφού $x^T p < 0$) αλλά η απόδοσεις είναι μη αρνητικές σε κάθε σενάριο (αφού $Rx \geq 0$). □

9.6 Κυρτές Συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 14. *Μια συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σ' ένα κυρτό σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται* κυρτή *(convex) αν, για κάθε $x, y \in C$ και κάθε $\theta \in [0, 1]$*

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \tag{9.14}$$

Θα ονομάζεται κοίλη *(concave) αν*

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \tag{9.15}$$

Αν οι (9.14), (9.15) ισχύουν ως ανισότητες τότε η f ονομάζεται αυστηρώς κυρτή ή κοίλη *αντίστοιχως.*

Από τον παραπάνω ορισμό είναι σαφές ότι αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο C τότε η $-f$ είναι κοίλη. Παρατηρήστε επίσης ότι είναι σκόπιμο να ορίσουμε μια κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση είτε σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$ ή σε ένα κυρτό υποσύνολό του, μια και στον ορισμό, αν τα x και y είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα πρέπει και το $\theta x + (1 - \theta)y$ να ανήκει επίσης στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η f είναι κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση τότε δεν μπορεί να είναι ασυνεχής στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Τυχόν ασυνέχειες, αν υπάρχουν, πρέπει να βρίσκονται στο σύνορο του πεδίου ορισμού.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει την σχέση ανάμεσα στην κυρτότητα και τις μερικές παραγώγους των κυρτών και κοίλων συναρτήσεων.

Θεώρημα 33. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}^n$ κυρτή συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους στο C. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν, για κάθε x_0 στο εσωτρικό του C*

$$f(x) - f(x^0) \;\geq\; \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0). \tag{9.16}$$

Ομοίως, η f είναι κοίλη αν και μόνο αν,

$$f(x) - f(x^0) \;\leq\; \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0). \tag{9.17}$$

Η f είναι αυστηρώς κυρτή αν και μόνο η ανισότητα (9.16) είναι αυστηρή. Παρομοίως, η f είναι αυστηρώς κοίλη αν και μόνο αν η ανισότητα (9.17) είναι αυστηρή.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι αν η f είναι κυρτή τότε ισχύει η (9.16). Αφού η f είναι κυρτή, $f(\lambda x + (1-\lambda)x^0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^0)$ ή, ισοδύναμα,

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{f(x^0 + \lambda(x - x^0)) - f(x^0)}{\lambda}.$$

Αφήνοντας το $\lambda \to 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε την (9.16). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η (9.17).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (9.16) ισχύει. Θα αποδείξουμε τότε ότι η f είναι κυρτή. Αν $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)x^0$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\;\geq\; \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}), \\ f(x^0) - f(\bar{x}) &\;\geq\; \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^0 - \bar{x}). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με λ και την δεύτερη με $1-\lambda$ παίρνουμε

$$\lambda f(x) - \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(x^0) - (1-\lambda) f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x}) \cdot (\lambda x - \lambda \bar{x} + (1-\lambda)x^0 - (1-\lambda)\bar{x})$$

ή

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^0) - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Η τελευταία σχέση αυτή συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή. □

Αν η f είναι ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} \mathrm{epi}(f) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in C,\ y \leq f(x)\}, \\ \mathrm{hyp}(f) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in C,\ y \geq f(x)\}. \end{aligned}$$

Πρόταση 13. *Η f είναι κυρτή συνάρτηση αν και μόνο αν το σύνολο epi(f) είναι κυρτό. Η f είναι κοίλη αν και μόνο αν το σύνολο hyp(f) είναι κυρτό.*

Στην περίπτωση που η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, αν $H(x)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας των δευτέρων παραγώγων στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$,

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 34. *Έστω C ένα ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : C \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο C. Τότε*

1. *Η f είναι κυρτή στο C αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας $H(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε $x \in C$.*
2. *Η f είναι κοίλη στο C αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας $H(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος για κάθε $x \in C$.*

Επίσης η f είναι αυστηρώς κυρτή αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος. *Παρομοίως, η f είναι αυστηρώς κοίλη αν και μόνο αν ο Εσσιανός πίνακας είναι* αρνητικά ορισμένος.

Απόδειξη. Έστω f κυρτή στο C. Αφού το C είναι ανοικτό, για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in (-a,a)$, $x + th \in C$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : (-a,a) \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x+th) - f(x) - t\nabla f(x) \cdot h.$$

Ισχύει ότι $g(t) \leq 0$ λόγω του ότι η f είναι κοίλη. Επίσης, $g(0) = 0$ και συνεπώς η g έχει τοπικό σημείο μεγίστου για $t = 0$. Συνεπώς

$$g''(0) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(x) h_i h_j \leq 0 \quad \text{για κάθε } h \in \mathbb{R}^n.$$

Συνεπώς, αν η f είναι κοίλη, η Εσσιανή είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $x \in C$.

Αντίστροφα, έστω ότι η Εσσιανή της f είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $x \in C$. Για $x^0, x \in C$ από το θεώρημα του Taylor ισχύει ότι

$$f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^{m} f_i'(x^0)(x_i - x_i^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(\bar{x})(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \tag{9.18}$$

όπου $\bar{x} = x^0 + \theta(x - x^0) = \theta x + (1 - \theta)x^0$ για κάποιο $\theta \in [0, 1]$. Αφού το C είναι κυρτό σύνολο, $\bar{x} \in C$. Δεδομένου ότι η Εσσιανή είναι αρνητικά ημιορισμένη στο $\bar{x}$, το δεξί μέλος της (9.18) είναι μη αρντηπικό, και επομένως η f είναι κυρτή. □

Κεφάλαιο 10

Βελτιστοποίηση

10.1 Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$ και το θεώρημα του Taylor

Ορισμός 15. *Έστω*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

συμμετρικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στους πραγματικούς αριθμούς. Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\psi(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{10.1}$$

ονομάζεται τετραγωνική μορφή.

Για παράδειγμα, η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι η $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

Ορισμός 16. *Ένας συμμετρικός πίνακας A, $n \times n$ ονομάζεται*

Θετικά ορισμένος *αν $x^T A x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,* Θετικά ημιορισμένος *αν* $x^T A x \geq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *με την ισότητα να ισχύει για κάποιο* $x \neq 0$,

αρνητικά ορισμένος *αν* $x^T A x < 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,

αρνητικά ημιορισμένος *αν* $x^T A x \leq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *με την ισότητα να ισχύει για κάποιο* $x \neq 0$.

Θεώρημα 35. *Έστω συμμετρικός πίνακας* A, $n \times n$ *με πραγματικά στοιχεία. Οι εξής τέσσερεις προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(1) *Ο πίνακας* A *είναι θετικά ορισμένος.*

(2) *Όλες οι ιδιοτιμές του* A *είναι θετικές.*

(3) *Οι ορίζουσες όλων των άνω αριστερά υποπινάκων του* A *είναι θετικές.*

(4) *Όλοι οι οδηγοί* d_i, $i = 1, \ldots, n$ *στην απαλοιφή κατά Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών είναι θετικοί*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι (1) $\Leftrightarrow$ (2). Δεδομένου ότι ο A είναι συμμετρικός, έχει n πραγματικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $q_1, \ldots, q_n$ τα οποία μπορούν να ληφθούν ως ορθογώνια και μοναδιαίου μήκους, δηλαδή $q_i^T q_j = \delta_{ij}$ όπου $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$. Συνεπώς, $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i q_i^T$ (φασματικό θεώρημα) και επομένως

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^T q_i q_i^T x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (q_i^T x)^2. \tag{10.2}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος, τότε $x^T A x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Διαλέγοντας $x = q_j$ έχουμε $q_j^T A q_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i (q_i^T q_j) = \lambda_j > 0$. Συνεπώς (1) $\leftrightarrow$ (2). Αντίστροφα, αν όλες οι ιδιοτιμές είναι αυστηρά θετικές από την (10.2) προκύπτει ότι $x^T A x \geq 0$. Η μόνη περίπτωση να ισχύει ισότητα είναι να έχουμε $q_i^T x = 0$ για όλα τα i. Όμως τα $(q_i), i = 1, \ldots, n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ και συνεπώς αυτό σημαίνει ότι $x = 0$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $(1, 2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (1, 2)$.

$(1, 2) \Leftrightarrow (3)$. Ονομάζουμε A_k τον άνω αριστερά $k \times k$ υποπίνακα του A, όπου $1 \leq k \leq n$. Έστω x_k ένα διάνυσμα στήλης στον $\mathbb{R}^k$. Αν το διάνυσμα x έχει την μορφή $x^T = [x_k^T, 0]$ (δηλαδή τα τελευταία $n - k$ στοιχεία ίσα με το μηδέν,

$$x^T A x = [x_k^T, 0] \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = x_k^T A_k x_k > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, υπό την προϋπόθεση ότι $x_k \neq 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο $k \times k$ πίνακας είναι επίσης θετικά ορισμένος. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του A_k πρέπει να είναι αυστηρά θετικές (αυτές οι ιδιοτιμές δεν ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα βεβαίως) και επομένως η ορίζουσα του A_k πρέπει να είναι επίσης θετική, ως γινόμενο των θετικών ιδιοτιμών του.

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Ξεκινάμε με την διάσπαση $A = LDU$ όπου ο L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο, D άνω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο, και D ο διαγώνιος πίνακας που περιέχει τους οδηγούς της διαδικασίας απαλοιφής κατά Gauss. Δεδομένου ότι ο A είναι συμμετρικός, θα πρέπει να ισχύει ότι $A = A^T = U^T DL^T$. Δεδομένου ότι η διάσπαση LDU είναι μοναδική και ότι ο U^T είναι κάτω τριγωνικός, θα πρέπει να ισχύει ότι $U = L^T$. Συνεπώς, η διάσπαση στην περίπτωσή μας γίνεται $A = LDL^T$. Λόγω του αλγορίθμου όμως, βάσει του οποίου επιτυγχάνουμε την διάσπαση LDU, αν συμβολίσουμε με L_k καιD_k τους άνω αριστερά υποπίνακες των L και D αντίστοιχα, ισχύει ότι $A_k = L_k D_k L_k^T$. Συνεπώς

$$\det(A_k) = \det(L_k)\det(D_k)\det(L_k^T) = 1 \cdot \det(D_k) \cdot 1 = d_1 d_2 \cdots d_k > 0 \tag{10.3}$$

όπου, στην παραπάνω εξίσωση λάβαμε υπ′ όψιν μας ότι η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα L_k είναι μονάδα αφού τα διαγώνια στοιχεία του είναι όλα ίσα με 1 και ότι ο πίνακας D είναι ο διαγώνιος πίνακας των οδηγών d_i. Εφ′ όσον η (10.3) ισχύει για $k = 1, 2, \ldots, n$ συμπεραίνουμε ότι $d_i > 0$ για $i = 1, \ldots, n$.

(4) $\Leftrightarrow$ (1, 2). Από την σχέση $x^T Ax = x^T LDL^T x$, θέτοντας $c_i := (L^T x)_i$, έχουμε $x^T Ax = \sum_{i=1}^n d_i c_i^2 \geq 0$ δεδομένου ότι οι οδηγοί d_i είναι όλοι θετικοί. Η περίπτωση $x^T Ax = 0$ ισχύει μόνο όταν $c_i = 0$ για κάθε i. Αυτό όμως σημαίνει ότι $L^T x = 0$. Δεδομένου ότι ο L είναι τριγωνικός, χωρίς μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο, αυτό σημαίνει με την σειρά του ότι $x = 0$ και επομένως ότι ο A είναι θετικά ορισμένος. □

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι η τετραγωνική μορφή (10.1) παίρνει αυστηρά θετικές τιμές για κάθε $x \neq 0$ αν και μόνο αν ο αντίστοιχος πίνακας A είναι θετικά ορισμένος. Αντίστοιχα η τετραγωνική μορφή παίρνει αυστηρά αρνητικές τιμές για κάθε $x \neq 0$ αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αρνητικά ορισμένος.

Ένα αντίστοιχο θεώρημα ισχύει για αρνητικά ορισμένους πίνακες. Συγκεκριμένα, όλες οι ιδιοτιμές του A στην περίπτωση αυτή είναι αρνητικές. Σε ότι αφορά τις ορίζουσες των άνω αριστερά υποπινάκων τα πρόσημα εναλλάσσονται ως εξής:

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{για } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ασκηση 10.1.1. Θεωρήστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Είναι ο A θετικά ορισμένος;
β) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές;
γ) Να διαγωνιοποιήσετε τον A.

Θεώρημα 36. *(Θεώρημα Taylor) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Τότε*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

Σημείωση: Γενικά θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Ο όρος $o(\|h\|^2)$, το λεγόμενο υπόλοιπο του Taylor, τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από το $\|h\|^2$ όταν $h \to 0$. Το θεώρημα του Taylor γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H(x) h + o(\|h\|^2)$$

όπου ο Εσσιανός πίνακας (Hessian)

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός δεδομένου ότι, όταν οι δεύτερες παράγωγοι είναι συνεχείς (σε ένα ανοικτό χωρίο), $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Ορισμός 17. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Το σημείο x^0 θα ονομάζεται* κρίσιμο *αν*

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

Θεώρημα 37. *Έστω x^0 κρίσιμο σημείο της f. Αν ο πίνακας $H(x^0)$ είναι θετικά ορισμένος τότε το σημείο αυτό θα είναι σημείο τοπικού ελαχίστου ενώ αν είναι αρνητικά ορισμένος θα είναι σημείο τοπικού μεγίστου.*

(Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Taylor και μας επιτρέπει να βρούμε τα σημεία τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου.)

Παρατήρηση: Όταν η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) τότε ένα κρίσιμο σημείο είναι σημείο ολικού ελαχίστου (αντίστοιχα μεγίστου). Αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος (33) αν θέσουμε $\nabla f(x^0) = 0$ στις εξισώσεις (9.16), (9.17).

10.1.1. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 y^2 e^{-(x+y)^2}$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

10.2 Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς ισότητας

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κάτω από τους περιορισμούς $g(\mathbf{x}) = 0$ όπου $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $m < n$. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ όπου $m > n$ και f, g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned}
&\min f(\mathbf{x}) \\
&\text{υπό τους περιορισμούς} \\
&g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Έστω $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Λαγκρανζιανή. Βρίσκουμε τα κρίσημα σημεία υπό περιοριμούς ως λύσεις των εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Τα σημεία μεγίστου βρίσκονται ανάμεσα σ' αυτά τα σημεία.

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned}
&\min x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
&\text{υπό τους περιορισμούς} \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.
\end{aligned}$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3) - \lambda_2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1)$$

και τα στάσιμα σημεία δίνονται από το σύστημα $\partial L/\partial x_j = 0$, $\partial L/\partial \lambda_i = 0$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$.

$$\begin{array}{rrrrrcl}
-2x_1 & & & -\lambda_1 & -\lambda_2 & = & 0 \\
& -2x_2 & & -\lambda_1 & -2\lambda_2 & = & 0 \\
& & -2x_3 & -\lambda_1 & -3\lambda_2 & = & 0 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 0 \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & = & 1
\end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση $x_1 = -1/2, x_2 = 0, x_3 = 1/2$ και $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Η γεωμετρική σημασία του θεωρήματος του Lagrange είναι ότι, προκειμένου να είναι το σημείο $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ κρίσιμο σημείο θα πρέπει η κλίση της f στο σημείο αυτό, $\nabla f(x^*)$ να είναι είναι κάθετη στην υπερεπιφάνεια που ορίζουν οι περιορισμοί g στο ίδιο σημείο. Ο κάθετος αυτός υπόχωρος είναι είναι ο χώρος που δημιουργείται από τα διανύσματα $\nabla g_i(x^*)$, $i = 1, \ldots, m$. Οι γραμμικοί αυτοί συνδιασμοί είναι ο υπόχωρος $\{\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$.

10.3 Ένα παράδειγμα που εξηγεί τη φυσική σημασία των συνθηκών

Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις συνεχώς παραγωγίσιμες. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την $f(x, y)$ κάτω από τον περιορισμό $g(x, y) = c$. Μια απλή σκέψη είναι η εξής: η σχέση $g(x, y) = c$ επιτρέπει, τουλάχιστον 'τοπικά', να λύσουμε ως προς y και να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x και της σταθεράς c. Αυτό δικαιολογείται από το θεώρημα της 'πεπλεγμένης συναρτήσεως'. Υποθέτοντας ότι υπάρχει συνάρτηση ϕ (η οποία εξαρτάται από την τιμή του c) τέτοια ώστε $g(x, \phi(x)) = c$ και παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\phi'(x) = 0.$$

Η αναγκαία συνθήκη για να έχει το f τοπικό ακρότατο στο σημείο x είναι

$$\frac{df(x, \phi(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\phi'(x) = 0.$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις, υπό την προϋπόθεση ότι $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq 0$ και $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \phi'(x)$$

ή, ισοδύναμα, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \nabla g(x) = \lambda \nabla f(x).$$

Η παραπάνω σχέση εννοείται ότι ισχύει για τα σημεία εκείνα που είναι δεσμευμένα ακρότατα.

10.4 Η οικονομική σημασία των συντελεστών Lagrange

Ας γράψουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης (10.4) στη μορφή

$$\begin{aligned}&\max f(\mathbf{x})\\ &\text{υπό τους περιορισμούς}\\ &g_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.\end{aligned} \tag{10.5}$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(\mathbf{x}) - b_i)$$

και οι εξισώσεις για τα κρίσιμα σημεία είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{10.6}$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{10.7}$$

Έστω $\mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$, οι τιμές που μεγιστοποιούν το κριτήριο f και $f(\mathbf{x}^*)$ η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου. Όλες αυτές οι ποσότητες εξαρτώνται βέβαια από τα b_i, $i = 1, \ldots, m$. Το ερώτημα που θέτουμε εδώ είναι πώς αλλάζει η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου όταν μεταβληθούν λίγο τα b_i. Για το σκοπό αυτό αυτό υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial b_i} \tag{10.8}$$

$$\frac{\partial g_k(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = \delta_{ki} \tag{10.9}$$

όπου

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = i, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τέλος, από την (10.6), στις βέλτιστες τιμές $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \frac{\partial g_l(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k}. \tag{10.10}$$

Από τις (10.8), (10.10), έχουμε

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \frac{\partial g_l(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k^*}{\partial b_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_l(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial b_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^* \delta_{li} = = \lambda_i^*. \tag{10.11}$$

Συνεπώς, οι τιμές των πολλαπλασιαστών του Lagrange στο βέλτιστο σημείο δείχνουν πόσο θα μεταβαλλόταν οριακά η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου αν μεταβαλλόταν οριακά το δεξί μέλος του αντίστοιχου περιορισμού. Αν υποθέσουμε ότι αυξάνουμε το b_i σε b_i+h

όπου h μια μικρή ποσότητα, η νέα βέλτιση τιμή του κριτηρίου θα είναι $f(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial b_i} h = f(\mathbf{x}^*) + \lambda_i^* h$. Για το λόγο αυτό οι συντελεστές Lagrange υπολογισμένοι στο βέλτιστο ονομάζονται και 'σκιώδεις τιμες' (shadow prices).

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα που δείχνει την σημασία των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Θέλουμε να βρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει μέγιστο όγκο V για δεδομένη επιφάνεια S. Πρακτικά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε S τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας με την οποία θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κλειστό ντεπόζιτο μεγίστου όγκου. Αν x, y και z είναι οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου, τότε η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι

$$\max V := xyz \qquad \text{υπό τον περιορισμό} \;\; 2xy + 2yz + 2zx = S \tag{10.12}$$

όπου S είναι η δεδομένη επιφάνεια. Η Λαγκρανζιανή είναι $L = xyz - \lambda(2xy + 2yz + 2zx - S)$ και επομένως τα κρίσιμα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2\lambda(y+z) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= zx - 2\lambda(z+x) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= zy - 2\lambda(x+y) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -2(xy + yz + zx) + S = 0
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με x, την δεύτερη με y και την τρίτη με z:

$$xyz = 2\lambda x(y+z), \quad xyz = 2\lambda y(z+x), \quad xyz = 2\lambda z(x+y)$$

και συνεπώς $x(y+z) = y(z+x) = z(x+y)$ απ΄ όπου έχουμε

$$x = y = z. \tag{10.14}$$

Με βάση το γεγονός αυτό, η τέταρτη εξίσωση στις σχέσεις (10.13) δίνει $6x^2 = S$ ή

$$x = \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}. \tag{10.15}$$

Συνεπώς, ο μέγιστος δυνατός όγκος για δεδομένη επιφάνεια S είναι

$$V = xyz = \frac{S^{3/2}}{6\sqrt{6}} \tag{10.16}$$

και επιτυγχάνεται όταν το παραλληλεπίπεδο είναι κύβος, όπως προέκυψε από την (10.14). Τέλος χρησιμοποιώντας τις (10.14) και (10.15) στην πρώτη εξίσωση από τις (10.13) παίρνουμε

$$\frac{S}{6} - 4\lambda\frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{S^{1/2}}{4\sqrt{6}}. \tag{10.17}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να απαντήσουμε την εξής ερώτηση: Πόσο θα άλλαζε ο μέγιστο όγκος αν άλλαζε λίγο η διαθέσιμη επιφάνεια· Με άλλα λόγια, αν είχαμε διαθέσιμο ένα επιπλέον τετραγωνικό εκατοστό επιφάνειας, πόσα κυβικά εκατοστά θα αυξανόταν ο όγκος· Η απάντηση δίδεται από την παράγωγο του μέγιστου όγκου ως προς S:

$$\frac{dV}{dS} = \frac{d}{dS}\frac{S^{3/2}}{6\sqrt{6}} = \frac{S^{1/2}}{4\sqrt{6}}.$$

Παρατηρείστε ότι η τιμή αυτή είναι βεβαίως η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange σύμφωνα με την (10.17). Αυτό βεβαίως προκύπτει από το θεώρημα που αποδείξαμε σ′ αυτή την παράγραφο.

10.5 Ικανές συνθήκες για βέλτιστο με περιορισμούς ισότητας

Θεώρημα 38. *Έστω A συμμετρικός πίνακας $n \times n$ και B πίνακας $k \times n$, τέτοιος ώστε* $\mathrm{rank}(B) = k$ *και* $\det B_k \neq 0$.

$$B = \left[\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} & \cdots & b_{kn} \end{array}\right]$$

με $\underbrace{\qquad}_{B_k}$ κάτω από το αριστερό $k \times k$ μπλοκ.

Ορίζουμε τον πίνακα $(n + k) \times (n + k)$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k1} & \cdots & b_{kk} & \cdots & b_{kn} \\ \hline b_{11} & \cdots & b_{k1} & a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1k} & \cdots & b_{kk} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{kn} & a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right].$$

Αν C_r είναι ο άνω αριστερά τετραγωνικός υποπίνακας του C του οποίου το κάτω δεξιά στοιχείο είναι το a_{rr} (και επομένως έχει διάσταση $k+r$) δηλαδή

$$C_r = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k1} & \cdots & b_{kr} \\ b_{11} & \cdots & b_{k1} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1r} & \cdots & b_{kr} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

τότε

1. $x^\top Ax > 0 \forall x \neq 0 : Bx = 0$ *αν και μόνο αν για* $r = k+1, k+2, \ldots, n$, $(-1)^k \det C_r > 0$.
2. $x^\top Ax < 0 \forall x \neq 0 : Bx = 0$ *αν και μόνο αν για* $r = k+1, k+2, \ldots, n$, $(-1)^r \det C_r > 0$.

Παράδειγμα 1: Έστω ότι μας ενδιαφέρει να δούμε κατά πόσον η τετραγωνική μορφή

$$[x_1, x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

υπό τον γραμμικό περιορισμό $x_1b_1 + x_2b_2 = 0$ είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη. (Ο πίνακας μπορεί να θεωρηθεί συμμετρικός με $a_{12} = a_{21}$.) Ο γραμμικός περιορισμός μπορεί να εκφραστεί παραμετρικά ως $x_1 = tb_2$, $x_2 = -tb_1$, $t \in \mathbb{R}$ και επομένως η τετραγωνική μορφή γράφεται ως

$$\begin{aligned} t^2[b_2, -b_1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{bmatrix} = t^2(b_2^2a_{11} + b_1^2a_{22} - 2b_1b_2a_{12}) &= -t^2\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (-1)t^2 \det C_2 \end{aligned}$$

αφού στην περίπτωση αυτή

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Δεδομένου ότι $k = 1$ και $r = 2$ βλέπουμε ότι ανάλογα με το αν η $\det C_2$ είναι θετική ή αρνητική η τετραγωνική μορφή υπό τον γραμμικό περιορισμό είναι αντίστοιχα αρνητικά ή θετικά ορισμένη.

Παράδειγμα 2: Παρομοίως, έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε αν η τετραγωνική μορφή

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

υπό τους γραμμικούς περιορισμούς

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε $k = 2$, $n = 4$, και

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{12} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{12} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{13} & b_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{14} & b_{24} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Αν $\det C_3 < 0$, και $\det C_4 < 0$ τότε η τετραγωνική μορφή υπό τους δεδομένους περιορισμούς είναι *θετικά ορισμένη.* Αν $\det C_3 < 0$, και $\det C_4 > 0$ τότε η τετραγωνική μορφή υπό τους δεδομένους περιορισμούς είναι *αρνητικά ορισμένη.*

Απόδειξη στην περίπτωση που $k = 1$

Εξετάζουμε εδώ κατά πόσον $x^T Ax > 0$ για κάθε $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $b^T x = 0$, όπου $b^T = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\theta > 0$ αρκετά μεγάλο, $x^T Ax + \theta\left(b^T x\right)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Με άλλα λόγια ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \theta b_1^2 & a_{12} + \theta b_1 b_2 & \cdots & a_{1n} + \theta b_1 b_n \\ a_{21} + \theta b_2 b_1 & a_{22} + \theta b_2^2 & \cdots & a_{2n} + \theta b_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \theta b_n b_1 & a_{n2} + \theta b_n b_2 & \cdots & a_{nn} + \theta b_n^2 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος. Αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη

$$\Delta_k \ := \begin{vmatrix} a_{11} + \theta b_1^2 & a_{12} + \theta b_1 b_2 & \cdots & a_{1k} + \theta b_1 b_k \\ a_{21} + \theta b_2 b_1 & a_{22} + \theta b_2^2 & \cdots & a_{2k} + \theta b_2 b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} + \theta b_k b_1 & a_{k2} + \theta b_k b_2 & \cdots & a_{kk} + \theta b_k^2 \end{vmatrix} > \ 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$M_k \ := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta b_1 & a_{11} + \theta b_1^2 & a_{12} + \theta b_1 b_2 & \cdots & a_{1k} + \theta b_1 b_k \\ \theta b_2 & a_{21} + \theta b_2 b_1 & a_{22} + \theta b_2^2 & \cdots & a_{2k} + \theta b_2 b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} + \theta b_k b_1 & a_{k2} + \theta b_k b_2 & \cdots & a_{kk} + \theta b_k^2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι $\det M_k = -\Delta_k$. Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$M_k = \begin{bmatrix} -1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Παίρνοντας ορίζουσες στο παραπάνω γινόμενο πινάκων και παρατηρώντας ότι η ορίζουσα του δεύτερου πίνακα είναι 1 έχουμε

$$\det M_k = \begin{vmatrix} -1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Λαμβάνοντας υπ′ όψιν μας ότι $\det M_k = -\Delta_k$,

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} - \theta \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Επομένως, για να είναι ο πίνακας θετικά ορισμένος για μεγάλες τιμές του θ, θα πρέπει να ισχύει ότι $\Delta_k > 0$ για $k = 1, 2, \ldots, n$ το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \theta b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \theta b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta b_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} < 0.$$

Ας εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα

$$\max\,(\min)\, f(x) \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10.18}$$

Θεώρημα 39. *Έστω f, και g_i, $i = 1, \ldots, m$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε μία ανοικτή περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$. Έστω $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ η Λαγκρανζιανή του προβλήματος. Επίσης $(x^*, \lambda^*) = (x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ ένα σημείο που ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10.19}$$

Ορίζουμε τον πίνακα $(n + m) \times (n + m)$

$$
C = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_m g_1 & \cdots & \partial_n g_m \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_m & \cdots & \partial_m g_m & \cdots & \partial_n g_m \\
\partial_1 g_1 & \cdots & \partial_1 g_m & \partial^2_{11} L & \cdots & \partial^2_{1k} L & \cdots & \partial^2_{1n} L \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\partial_1 g_m & \cdots & \partial_m g_m & \partial^2_{m1} L & \cdots & \partial^2_{mm} & \cdots & \partial^2_{kn} L \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\partial_n g_1 & \cdots & \partial_n g_m & \partial^2_{n1} L & \cdots & \partial^2_{nm} L & \cdots & \partial^2_{nn} L
\end{bmatrix}.
$$

Ασκήσεις

Πρόβλημα 1

Να εξετάσετε την τετραγωνική μορφή $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ υπό τους περιορισμούς $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$. (Βέβαια, εδώ μπορούμε να λύσουμε πολύ εύκολα: $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_1$ και επομένως η τετραγωνική μορφή γίνεται $3x_1^2 + x_4^2$ που βέβαια είναι θετικά ορισμένη και επομένως το σημείο $(0, 0, 0, 0)$ είναι σημείο τοπικού (και ολικού) ελαχίστου.)

Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$
C = \left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Ισχύει ότι $\det C_2 = 3$ και $\det C_3 = 3$ και επομένως (με $k = 2$) $(-1)^k \det C_r > 0$ για $r = 2, 3$. Συνεπώς η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη και το σημείο $(0, 0, 0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τα σημεία τοπικού μεγίστου και ελαχίστου της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Η Λαγκρανζιανή είναι $L = x^2 + y^2 -$

$\lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$ και, συμβολίζοντας τις μερικές παραγώγους με δείκτες (π.χ. $L_x = \frac{\partial L}{\partial x}$, $L_{xy} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = L_{xy}$ κ.ο.κ.) βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία ως λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - 2\lambda x = 0 \text{ ή } x(1-\lambda) = 0 && (10.20)\\ L_y &= 2y - 8\lambda y = 0 \text{ ή } y(1-4\lambda) = 0 && (10.21)\\ L_\lambda &= -(x^2 - 4y^2 - 4) = 0. && (10.22) \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις βλέπουμε ότι υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, δηλαδή (1): $x = 0, \lambda = 1/4$, (2): $y = 0, \lambda = 1$, και (3): $x = 0, y = 0$. Η τρίτη λύση, $x = y = 0$ δεν ικανοποιεί την (10.22) και επομένως απορρίπτεται.

Η περίπτωση (1) χρησιμοποιώντας την (10.22) δίνει $4y^2 - 4 = 0$ ή $y = \pm 1$. ᾿ρα δίνει τα κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, \lambda^*) = (0, 1, 1/4)$ και $(0, 1, 1/4)$.

Η περίπτωση (2) χρησιμοποιώντας την (10.22) δίνει $x^2 - 4 = 0$ ή $x = \pm 2$. ᾿ρα δίνει τα κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, \lambda^*) = (2, 0, 1)$ και $(-2, 0, 1)$.

Προκειμένου να εξετάσουμε τα τέσσερα αυτά σημεία και να δούμε αν είναι σημεία τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$$C = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & x & 4y \\ x & (1-\lambda) & 0 \\ 4y & 0 & (1-4\lambda) \end{bmatrix}$$

Για το κρίσιμο σημείο $(0, 1, 1/4)$ ισχύει ότι (παραλείποντας τον θετικό παράγοντα 2 που πολλαπλασιάζει τον πίνακα και επειδή είναι θετικός δεν επιρρεάζει το αποτέλεσμα)

$$\det C(0, 1, 1/4) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Εφ᾽ όσον $m = 1$ και $(-1)^m |C_2| > 0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $(0, 1, 1/4)$ είναι σημείο ελαχίστου. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο $(0, -1, 1/4)$.

Για το κρίσιμο σημείο $(2, 0, 1)$ ισχύει ότι (παραλείποντας τον θετικό παράγοντα 2 που πολλαπλασιάζει τον πίνακα και επειδή είναι θετικός δεν επιρρεάζει το αποτέλεσμα)

$$\det C(2, 0, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 12$$

Εφ᾽ όσον $m = 1$ και $(-1)^2 |C_2| > 0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $(2, 0, 1)$ είναι σημείο μεγίστου. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο $(-2, 0, 1)$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τα σημεία τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3$. Η Λαγκρανζιανή είναι $L = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - 3)$. Οι συνθήκες για τα κρίσημα σημεία είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - \lambda(2x + y) = 0 \tag{10.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 2y - \lambda(x + 2y) = 0 \tag{10.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \tag{10.25}$$

Οι εξισώσεις (10.23), (10.24) γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} 2(1-\lambda) & -\lambda \\ -\lambda & 2(\lambda - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αν η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα δεν είναι μηδέν, η μόνη λύση που έχει το σύστημα είναι $x = 0$, $y = 0$, που δεν ικανοποιεί την (10.25). Επομένως εξατάζουμε την περίπτωση $4(1-\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$ που δίνει τις λύσεις $\lambda = \frac{2}{3}$ και $\lambda = 2$.

α)$\lambda = \frac{2}{3}$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (10.23) παίρνουμε $x\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y = 0$ ή $x = y$. Αυτή η σχέση μαζί με την (10.25) δίνει $3x^2 = 3$ και επομένως έχουμε $x = \pm 1$. Έτσι έχουμε τα σημεία $(x, y, \lambda) = (1, 1, \frac{2}{3})$ και $(-1, -1, \frac{2}{3})$.

β) $\lambda = 2$. Η τιμή αυτή με την (10.23) δίνει $-2x - 2y = 0$ ή $y = -x$. Αυτή η σχέση μαζί με την (10.25) δίνει $x^2 = 3$ και επομένως έχουμε $x = \pm\sqrt{3}$. Έτσι έχουμε τα σημεία $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{2}{3})$ και $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{2}{3})$.

Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x + y & x + 2y \\ 2x + y & 2(1-\lambda) & -\lambda \\ x + 2y & -\lambda & 2(1-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Ισχύει $k = 1$ και επομένως $k + 1 = 2$, άρα εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση μια μόνο ορίζουσα.

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (1, 1, \frac{2}{3})$. Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -24.$$ Συνεπώς, $(-1)^1\Delta_2 > 0$ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (-1, -1, \frac{2}{3})$. Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -24. \quad \text{Συνεπώς, } (-1)^1\Delta_2 > 0 \text{ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$. Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24. \quad \text{Συνεπώς, } (-1)^2\Delta_2 > 0 \text{ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$. Έχουμε

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24. \quad \text{Συνεπώς, } (-1)^2\Delta_2 > 0 \text{ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.}$$

Πρόβλημα 4

Στο πρόβλημα αυτό αποδεικνύουμε ότι το κρίσιμο σημείο που βρήκαμε στο προβλημα (10.12) είναι σημείο μεγίστου. (Αυτό βέβαια είναι διαισθητικά προφανές.) Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι

$$C = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2(y+z) & 2(z+x) & 2(x+y) \\ 2(y+z) & 0 & z-2\lambda & y-2\lambda \\ 2(x+y) & z-2\lambda & 0 & x-2\lambda \\ 2(y+x) & y-2\lambda & x-2\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας την πλαισιωμένη Εσσιανή στο κρίσιμο σημείο $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = (\frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{6\sqrt{6}})$ παίρνουμε

$$C(\frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{\sqrt{6}}, \frac{S^{1/2}}{6\sqrt{6}}) = \frac{S^{3/2}}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αγνωόντας τον θετικό παράγοντα $\frac{S^{3/2}}{\sqrt{6}}$ ο οποίος δεν επηρρεάζει το πρόσημο των οριζουσών εξετάζουμε τις

$$|C_2| := \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad |C_3| := \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Βλέπουμε εύκολα ότι $|C_2| = 18$. Για τον υπολογισμό της $|C_3|$ προσθέτουμε τις τρείς τελευταίες γραμμές, πολλαπλασιάζουμε το άθροισμα με 2/3, και αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή. Οι πράξεις αυτές δεν αλλάζουν την τιμή της ορίζουσας, οπότε έχουμε

$$|C_3| := \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$