Βελτιστοποίηση, αναδρομικές σχέσεις

1 Πίνακας θετικά ορισμένος, αρνητικά ορισμένος, διαγωνοποίηση

Ορισμός 14: (σελ 107 από σημειώσεις Ζαζάνη, 9 Απρίλη 2019): Ένας συμμετρικός πίνακας A και η τετραγωνική μορφή $x^\top Ax$ θα ονομάζεται

1. Θετικά ορισμένος εάν 0 $x^\top Ax > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, \;\; x \neq 0$
2. Θετικά ημιορισμένος εάν $x^\top Ax \geq$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με την ισότητα να ισχύει για κάποιο $x \neq 0$
3. Αρνητικά ορισμένος εάν $x^\top Ax < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, \;\; x \neq 0$
4. Αρνητικά ημιορισμένος εάν $x^\top Ax \leq 0$για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με την ισότητα να ισχύει για κάποιο $x \neq 0$

Θεώρημα 20 (σελ 108 από σημειώσεις Ζαζάνη, 9 Απρίλη 2019): Έστω $A : n \times n$ συμμετρικός πραγματικός πίνακας. Οι εξής προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. A θετικά ορισμένος.
2. Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.
3. Οι ορίζουσες όλο των άνω αριστερά πινάκων είναι θετικές.
4. Όλοι οι οδηγοί στην απαλοιφή κατά Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών είναι θετικοί.

Σημείωση σελ 109: Αντίστοιχα ένας συμμετρικός πίνακας A ονομάζεται αρνητικά ορισμένος εάν όλοι οι κύριοι υπο-πίνακές του έχουν αρνητική ορίζουσα D_i για περιττό i, και $D_i > 0$ για άρτιο i .

Σημείωση: Εάν ο A διαγωνοποιείται, τότε $A = M^{-1}\Lambda M$, όπου M: πίνακας με στήλες τα διανύσματα του A, Λ: ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον M. Λύνοντας την εξίσωση $(A - \lambda)z = 0$ για κάθε λ βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A έτσι ώστε να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα M .

Άσκηση 1: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Είναι θετικά ορισμένος ο A ?

Λύση:

$\det(2) = 2$, $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix} = 1$

Όλες οι ορίζουσες είναι θετικές άρα ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

Άσκηση 2: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Είναι θετικά ορισμένος ο A ?
2. Βρείτε ιδιοτιμές του A .

Λύση:

1. Ελέγχουμε τις ορίζουσες των υπο-πινάκων του A

   $\det(2) = 2$, $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6$

   Όλες οι ορίζουσες είναι θετικές άρα ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

   (αν ζητάει διαγωνοποίηση πίνακα για ευκολία βρίσκεις κατευθείαν τις ιδιοτιμές αντί να εξετάσεις τις υποορίζουσες)

2. Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\text{-}\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2\text{-}\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2\text{-}\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$-(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

   Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

   Σημείωση: Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

Άσκηση 3: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Είναι θετικά ορισμένος ο A ?

Λύση: $\Delta_1 = \det(1) = 1$, $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1$, $\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -23$

Οι ορίζουσες δεν είναι όλες θετικές άρα ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας A δεν είναι θετικά ορισμένος.

Ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας A δεν είναι αρνητικά ορισμένος γιατί $\Delta_1 \not< 0$, $\Delta_2 \not> 0$.

Άσκηση 4: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Είναι θετικά ορισμένος ο A ?

Λύση: $\det(1) = 1$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$. Οι ορίζουσες είναι όλες θετικές άρα ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

2 Γραμμικά διαφορικά συστήματα

- Η λύση του διαφορικού συστήματος

$$x'(t)Ax(t) + b(t), \;\; x(0) = x_0$$

  είναι

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-u)} b(u), \; du + x_0 e^{At.s}$$

  (αποδεικνύεται με ΟΠ, απόδειξη σημειώσεις σελ 102)

- Γρ. ΔΕ 2ης τάξης ως διαφορικά συστήματα (σημειώσεις σελ 105):

  Το σύστημα

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = r(t), \;\; x_0 = c_1, \;\; x'(0) = c_2$$

γράφεται

$$x'(t) = Ax(t) + (0,1)^\top r(t)$$

και λύνεται όπως στο προηγούμενο bullet. (θέτωντας $x_1 = x(t), x_2 = x'(t)$, απόδειξη σημειώσεις σελ 105)

Σημείωση: Αν A συμμετρικός, τότε e^{At} συμμετρικός.

3 Ακρότατα συνάρτησης

Άσκηση 5: Εντοπίστε τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Λύση:

Τα κρίσιμα σημεία της f ικανοποιούν τις σχέσεις $f_x = 2x = 0, f_y = 2y = 0$. Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το (0,0).

Η Εσσιανή στο κρίσιμο σημείο είναι ίση με $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

και είναι θετικά ορισμένη αφού $\det(a_{11} = 2) = 2 > 0$, $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$.

Άρα, η Εσσιανή στο κρίσιμο σημείο (0,0) είναι θετικά ορισμένη, τότε το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό ελάχιστο της f.

αν η Εσσιανή στο κρίσιμο σημείο (0,0) είναι αρνητικά ορισμένη, τότε το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό μέγιστο της f.

4 Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς

Άσκηση 6: max/min $f(x,y,z) = xyz$, υπό τον περιορισμό $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z > 0$.

Λύση:

Βήμα 1: Λαγκρανζιανή συνάρτηση: $L(x,y,z) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία υπό περιορισμούς ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{array} \iff \iff \begin{array}{rl} yz - 2\lambda x = 0 & (1) \\ xz - 2\lambda y = 0 & (2) \\ xy - 2\lambda z = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{array}$$

$(1) \Rightarrow \lambda = \dfrac{yz}{2x}$

$(2) \Rightarrow x^2 = y^2 \overset{x,y,z>0}{\Rightarrow} x = y \qquad (6)$

$(3) \Rightarrow x = z \qquad (7)$

Αντικαθιστώντας στην (4) τις (6) και (7) παίρνουμε $x^2 = 1/3$.

Κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, \lambda^*) = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/6)$,

$f(x^*, y^*, \lambda^*) = 102/155$

Βήμα 3: Εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zx} & L_{yy} \end{pmatrix}$$

στο κρίσιμο σημείο γίνεται $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (104/155, 53/155, -2/155)$.

Έχουμε $n = 3$ και $k = 1$, άρα $r = 2, 3 \Rightarrow$ εξετάζουμε 2 πίνακες.

$$C_2 = \det \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} > 0.$$

$$C_3 = \det \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} < 0.$$

Συνεπώς, αρνητικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, δηλ. το σημείο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

Σημείωση: χωρίς περιορισμούς αν έχω $C_2 < 0, C_3 > 0 \Rightarrow$ αρνητικά ορισμένη τετραγωνική μορφή

με 1 περιορισμό $C_2 > 0, C_3 < 0 \Rightarrow$αρνητικά ορισμένη τετραγωνική μορφή κάτω από τον περιορισμό

γενικά, παίρνω τον κανόνα και τον πολλαπλασιάζω με -1 υψωμένο στον αριθμό των περιορισμών

Άσκηση 7: max/min $f(x, y) = x^2 - y^2$, υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 - 3y^2 = 6$.

Λύση:

Βήμα 1: Λαγκρανζιανή συνάρτηση: $L = x^2 - y^2 - \lambda(3x^2 - 3y^2 - 6)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία υπό περιορισμούς ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\begin{array}{lcccr} L_x = 0 & & 2x - 6x\lambda = 0 & & x - 3x\lambda = 0 \quad (1) \\ L_y = 0 & \iff & -2y + 4y\lambda = 0 & \iff & -y + 2y\lambda = 0 \quad (2) \\ L_\lambda = 0 & & 3x^2 - 2y^2 = h & & 3x^2 - 2y^2 = h \quad (3) \end{array}$$

Από (1) έπεται: $xy = 3xy\lambda$ και από (2) έπεται: $xy = 2xy\lambda$, Άρα, $3xy\lambda = 2xy\lambda \Rightarrow x = 0$ or $y = 0$.

Από (3), το x σίγουρα δεν είναι μηδέν γιατί αν ήταν τότε $-2y^2 = 6$, που δεν ισχύει.

Από (1), έχουμε $\lambda = 1/3$. Για $y = 0$, $3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Άρα, κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, \lambda^*) = (\sqrt{2}, 0, 1/3)$ και $(-\sqrt{2}, 0, 1/3)$,

$f(x^*, y^*, \lambda^*) = 2$.

Βήμα 3: Εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & -6y \\ 2x & 2-6\lambda & 0 \\ -6y & 0 & -2+4\lambda \end{pmatrix}$$

$k = 1$, $n = 2$, $k + 1 = 2$, άρα σε κάθε περίπτωση εξετάζουμε 1 ορίζουσα.

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}, 0, 1/3)$. Έχουμε

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2-6/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2+4/3 \end{pmatrix} = 16/3.$$

Συνεπώς, $(-1)^1\Delta < 0$ και το σημείο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

σημείωση: χωρίς περιορισμούς τοπικό ελάχιστο αν εσσιανή στο σημείο >0, και τοπικό μέγιστο αν εσσιανή στο σημείο <0

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{2}, 0, 1/3)$. Έχουμε

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2-6/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2+4/3 \end{pmatrix} = 16/3.$$

Συνεπώς, $(-1)^1\Delta < 0$ και το σημείο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 8: max/min $f(x,y) = xy$, υπό τον περιορισμό $g(x,y) = x + y = 1$.

Λύση:

Βήμα 1: Λαγκρανζιανή συνάρτηση: $L = xy - \lambda(x + y - 1)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία υπό περιορισμούς ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\begin{matrix} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{matrix} \iff x = y = \lambda = 1/2$$

Άρα, κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, \lambda^*) = (1/2, 1/2, 1/2)$.

$f(x^*, y^*, \lambda^*) = 1/4$.

Βήμα 3: Εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 1$, $n = 2$, $k + 1 = 2$, άρα σε κάθε περίπτωση εξετάζουμε 1 ορίζουσα.

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (1/2, 1/2, 1/2)$. Έχουμε

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Συνεπώς, $(-1)^1 \Delta < 0$ και το σημείο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 9: max/min $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, υπό τον περιορισμούς $g(x,y,z) = x + y = \eta$, $h(x,y,z) = y + z = \eta$, όπου η δοσμένη θετική σταθερά,.

Λύση:

Βήμα 1: Λαγκρανζιανή συνάρτηση: $L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda_1(x + y - \eta) - \lambda_2(y + z - \eta)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία υπό περιορισμούς ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\begin{matrix} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\zeta = 0 \\ L_{\lambda_1} = 0 L_{\lambda_2} \quad = 0 \end{matrix} \iff \begin{aligned} 2x - \lambda_1 &= 0 && (1) \\ 4y - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 && (2) \\ 6z - \lambda_2 &= \eta && (3) \\ x + y &= \eta && (4) \\ y + z &= \eta && (5) \end{aligned}$$

Από (4) και (5) έπεται ότι $x = 2$.

Από (1)-(2) έπεται $2x - 4y + \lambda_2 \overset{(3)}{\Rightarrow} 2x - 4y + 6z \overset{x=2}{\Rightarrow} y = 2x$.

Από (4) έπεται $x + 2x = \eta \Rightarrow x = \eta/3$.

Από (1) $\lambda_1 = 2x \Rightarrow \lambda_1 = 2\eta/3$.

Οπότε, $\lambda_2 = 2\eta$.

Άρα, κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (\eta/3, 2\eta/3, \eta/3, 2\eta/3, 2\eta)$.

$f(x^*, y^*, z^*) = \eta^2(4/3)$.

Αν ζητούσαμε τη παράγωγο έχουμε: $f_\eta(x^*, y^*, z^*) = \eta(8/3)$.

Βήμα 3: Εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$k = 2$, $n = 3$, $k + 1 = 3$, άρα σε κάθε περίπτωση εξετάζουμε 1 ορίζουσα.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_x & g_y & g_z \\ 0 & 0 & h_x & h_y & h_y \\ g_x & h_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & h_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & h_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (1/2, 1/2, 1/2)$. Έχουμε

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12.$$

Συνεπώς, $(-1)^2\Delta > 0$ και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 10: max/min $f(x, y) = 4x + y$, υπό τον περιορισμό $g(x, y) = xy = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a > 0$.

Λύση:

Βήμα 1: Λαγκρανζιανή συνάρτηση: $L = 4x + y - \lambda(xy - a)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία υπό περιορισμούς ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\begin{matrix} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 4 - \lambda y = 0 \\ 1 - \lambda x = 0 \\ xy = a \end{matrix} \iff x = \sqrt{a}/2, y = 2\sqrt{a}, \lambda = 2/\sqrt{a}$$

(αποδεκτή μόνο η θετική ορίζουσα)

Άρα, κρίσιμα σημεία $(x^*, y^*, \lambda^*) = (\sqrt{a}/2, 2\sqrt{a}, 2/\sqrt{a})$.

$f(x^*, y^*) = 4\sqrt{a}$.

Βήμα 3: Εξετάζουμε την πλαισιωμένη Εσσιανή

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & -\lambda \\ x & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 1$, $n = 2$, $k + 1 = 2$, άρα σε κάθε περίπτωση εξετάζουμε 1 ορίζουσα.

Το σημείο $(x, y, \lambda) = (\sqrt{a}/2, 2\sqrt{a}, 2/\sqrt{a})$. Έχουμε

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{a} & \sqrt{a}/2 \\ 2\sqrt{a} & 0 & -2/\sqrt{a} \\ \sqrt{a}/2 & -2/\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} = 2(2/\sqrt{a})(\sqrt{a}/2)(2\sqrt{a}).$$

Συνεπώς, $(-1)^1\Delta < 0$, (άρα ο πλαισωμένος εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος) και το σημείο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

5 Αναδρομικές εξισώσεις

Άσκηση 11: Να λυθεί η αναδρομική σχέση $x_{n+2} - 2ax_{n+1} + a^2x_n = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $x_0 = 1, x_1 = 0$.

Λύση

Βήμα 1 Λύση Χ.Ε. $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - a)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ (διπλή)

Βήμα 2 Γενική λύση:

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2n\lambda^n = c_1a^n + c_2na^n,$$

c_1, c_2 σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Βήμα 2 Εύρεση c_1, c_2. $x_0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$x_1 = 0 \Rightarrow c_1a + c_2a = 0 \Rightarrow a(1 + c_2) = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

άρα

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2n\lambda^n = a^n - na^n.$$

Άσκηση 12: Να λυθεί η αναδρομική σχέση $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 0, x_1 = 2$.

Λύση

Βήμα 1 Λύση Χ.Ε. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1.$

Βήμα 2 Γενική λύση:

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2\lambda_2^n = c_1 + c_2 2^n,$$

c_1, c_2 σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Βήμα 2 Εύρεση c_1, c_2.

$x_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$ και $x_1 = 2 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 2 \Rightarrow c_1 = 2, c_1 = 2.$

άρα $x_n = -2 + 2^{n+1}$.

Άσκηση 13: Να λυθεί η αναδρομική σχέση $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$, $x_0 = 1, x_1 = 1$.

Λύση

Βήμα 1 Λύση Χ.Ε. $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$

Βήμα 2 Γενική λύση:

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2\lambda_2^n = c_1 + c_2(-2)^n,$$

c_1, c_2 σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Βήμα 2 Εύρεση c_1, c_2.

$x_0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$ και $x_1 = 1 \Rightarrow c_1 - 2c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0.$

άρα $x_n = 1$.

Σημείωση: Ασκήσεις lab1, με ειδικές λύσεις.