ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φροντιστήριο (4)

(1) Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$

Λύση

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

Έχουμε $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \Rightarrow e^x\cos(x), e^x\sin(x)$ οι πραγματικές (γραμμικά ανεξάρτητες) λύσεις της ΔΕ $\Rightarrow$

$y(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x)$, c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές

γενική λύση της ΔΕ.

Οι αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \Rightarrow 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$y(\pi/2) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 e^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 e^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 = e^{\pi/2} \cdot 0 + c_2 e^{\pi/2}$

$\Rightarrow \boxed{c_2 = e^{-\pi/2}}$

Άρα, $\boxed{y(x) = e^{-\pi/2} e^x \sin(x),\ x \in \mathbb{R}}$

(2) Να λυθεί το ΠΑΤ $y'' - 2y' + 2y = \sin(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Λύση

Μη ομογενής ΔΕ $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΒΗΜΑ 1: Λύνω την ομογενή $y'' - 2y' + 2y = 0$

Από άσκηση 1 έχουμε $\boxed{y_o(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x)}$

c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές

ΒΗΜΑ 2: Βρίσκω μια ειδική λύση

$y_E(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$y_E'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$

$y_E''(x) = -A\sin(x) - B\cos(x)$.

Αντικαθιστούμε την ειδική λύση στη ΔΕ και βρίσκουμε ότι:

$$-A\sin x - B\cos(x) - 2\left[A\cos(x) - B\sin(x)\right] + 2\left[A\sin(x) + B\cos(x)\right] = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow -A\sin(x) - B\cos(x) - 2A\cos(x) + 2B\sin(x) + 2A\sin(x) + 2B\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow$$

$$(A+2B)\sin(x) + (B-2A)\cos(x) = \sin(x)$$

Από την τελευταία σχέση εξισώνουμε τους συντελεστές των $\sin(x)$ και $\cos(x)$ και καταλήγουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix} A+2B=1 \\ B-2A=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow A=\frac{1}{5} \text{ και } B=\frac{2}{5}$$

Άρα, η ειδική λύση είναι $\boxed{y_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}\cos(x)}$

ΒΗΜΑ 3: Η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y(x) = y_0(x) + y_{\varepsilon}(x) = c_1 e^x\cos(x) + c_2 e^x \sin(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}\cos(x)$$

ΒΗΜΑ 4: Προσδιορίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες.

Έχουμε $y'(x) = c_1e^x\cos(x) - c_1e^x\sin(x) + c_2e^x\sin(x) + c_2e^x\cos(x) + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x)$

$$y(0)=0 \Leftrightarrow 0 = c_1 + c_2\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{2}{5}}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1\cdot 1 - \cancel{c_1\cdot 0} + \cancel{c_2\cdot 0} + c_2\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 1 - \cancel{\frac{2}{5}\cdot 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = c_1 + c_2 + \frac{1}{5} \Rightarrow c_2 = 1 - \frac{1}{5} - c_1 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{6}{5}}$$

Οπότε $y(x) = -\frac{2}{5}e^x\cos(x) + \frac{6}{5}e^x\sin(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}\cos(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{2}{5}\cos(x)\left(1-e^x\right) + \frac{1}{5}\sin(x)\left(1+6e^x\right)}$$

③ Να λυθεί η ΔΕ $y' + \frac{x}{x+1} y = x+1,\ y(0)=2$

Λύση.

Γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης $\to$ Λύση με Ο.Π.

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = x - \int \frac{1}{x+1}dx = x - \log|x+1|.$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x+1}dx} = e^{x-\log|x+1|} = e^{x}\cdot e^{-\log|x+1|} = e^{x}\cdot e^{\log|x+1|^{-1}} = \frac{e^{x}}{|x+1|}$$

Πολ/με και τα δύο μέλη της ΔΕ με $\mu(x)$:

$$y'\frac{e^{x}}{|x+1|} + \frac{x}{x+1}\cdot\frac{e^{x}}{|x+1|}y = (x+1)\frac{e^{x}}{|x+1|} \Leftrightarrow$$

$$y'\frac{e^{x}}{x+1} + \frac{x}{x+1}\cdot\frac{e^{x}}{x+1}y = (x+1)\frac{e^{x}}{(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\left(y\frac{e^{x}}{x+1}\right)' = e^{x} \Rightarrow y\frac{e^{x}}{x+1} = e^{x}+c \Rightarrow \boxed{y(x) = (e^{x}+c)(x+1)e^{-x}}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά

$$y(0)=2 \to 2 = (1+c) \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Οπότε, η Γ.Λ της Δ.Ε είναι $\boxed{y(x) = (e^{x}+1)(x+1)e^{-x}}$

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τον πίνακα e^{At}

<u>Λύση</u>

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι η: $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2-4=0 \Leftrightarrow 1+\lambda^2-2\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-3)=0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3}$$

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, είναι οι λύσεις του συστήματος $(A-\lambda_1 I)z=0 \Leftrightarrow (A+I)z=0$, το οποίο γράφεται ως εξής: $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow z_1+z_2=0$
$\Leftrightarrow z_2=-z_1$

οπότε ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ είναι το $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

- Τα ιδ/τα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=3$, είναι οι λύσεις του συστήματος: $(A-\lambda_2 I)z=0 \Leftrightarrow (A+3I)z=0$, το οποίο γράφεται ως εξής: $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow -z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=z_2$

οπότε ένα ιδ/μα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-3$ είναι το $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Τώρα $e^{At}=Me^{\Lambda t}M^{-1}$

$M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$M^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\leadsto e^{At}=Me^{\Lambda t}M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t} & \\ & e^{3t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{3t}\\ -e^{-t} & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}+e^{3t} & -e^{-t}+e^{3t}\\ -e^{-t}+e^{3t} & +e^{-t}+e^{3t}\end{pmatrix}$$

$y(0) = c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. Να επιλυθεί το σύστημα $y_1' = y_1 + 2y_2$, $y_1(0) = 1$
χρησιμοποιώντας τον e^{At} (άσκηση 4). $y_2' = 2y_1 + y_2$, $y_2(0) = -1$

Λύση

Το σύστημα γράφεται $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y' = Ay$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{At} y(0)}$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{t} + e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{3t} + e^{-t} - e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} - e^{t} - e^{3t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Να υπολογίσετε τον πίνακα e^{At}. Ισχύει ότι $tr(e^{At}) = e^{t} + 1$?

Λύση

Η ΧΕ του πίνακα Α είναι : $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0}$

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, είναι οι λύσεις του συστήματος
$(A - \lambda_1 I)z = 0 \Leftrightarrow (A - I)z = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_2 = z_1}$

οπότε ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Τα ιδ.δ. που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$, είναι οι λύσεις του συστήματος
$(A - \lambda_2 I)z = 0 \Leftrightarrow Az = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_2 = 0}$, οπότε ένα ιδ.δ. που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Τώρα, $e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1}$

$$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad M^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\Bigg\}\to e^{At}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^t&1\\e^t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&e^t-1\\0&e^t\end{pmatrix}$$

$tr(A)=1+e^t$

αρχικές συνθήκες

7 Αν $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, να λύσετε το σύστημα ΔΕ $\cancel{x}y_1'=y_2$, $y_1(0)=1$
$y_2'=y_2$, $y_2(0)=-1$

χρησιμοποιώντας τον πίνακα e^{At}.

Λύση

$$\left.\begin{aligned}y_1'&=0y_1+y_2\\y_2'&=0y_1+y_2\end{aligned}\right\}\to y'=Ay\to\boxed{y(t)=e^{At}y(0)}$$

(από άσκηση 6) $\to$ $y(t)=\begin{pmatrix}1&e^t-1\\0&e^t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-e^t\\-e^t\end{pmatrix}$

8 Έστω $b=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ και $A:=bb^T$. Το στοιχείο ~~του~~ (2,2) του πίνακα e^{At} όταν $t=\frac{1}{2}$ είναι προσεγγιστικά ίσο με 2.16.

Λύση

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$|A-\lambda I|=0\leftrightarrow\lambda_1=0$ (διπλή), $\lambda=3$.

Ιδ.δ. για $\lambda=3$: $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, Ιδ.δ. για $\lambda=0$: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

11) Να λυθεί το διαφορικό σύστημα $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Λύση

$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 2 \text{ (διπλή) και } \lambda_2 = -1}$

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, είναι λύσεις του συστήματος $(A-\lambda_1 I)z = 0 \Leftrightarrow (A-2I)z = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -3z_2 + 3z_3 &= 0 \\ 3z_2 - 3z_3 &= 0 \\ 6z_2 - 6z_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \boxed{z_2 = z_3}$$

Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι της μορφής $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, όπου z_2, z_3 αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί.

Δύο ιδιοδιανύσματα είναι: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ που είναι γρ. ανεξ.

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, είναι λύσεις του συστήματος $(A-\lambda_2 I)z = 0 \Leftrightarrow (A+I)z = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} 3z_1 - 3z_2 + 3z_3 &= 0 \\ 6z_2 - 3z_3 &= 0 \\ 6z_2 - 3z_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 - z_2 + z_3 &= 0 \\ 2z_2 - z_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow z_1 - z_2 + 2z_2 = 0 \rightarrow z_1 + z_2 = 0.$$

$$\boxed{z_3 = 2z_2} \qquad \rightarrow \boxed{z_1 = -z_2}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Τώρα, $e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}$$