Μαθηματικές Μέθοδοι, Φροντιστήριο 1

1 Ομογενείς γραμμικές αναδρομικές σχέσεις

1.1 Με διακριτές ρίζες

Άσκηση 1. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 3, x_1 = 7$.

Λύση
Χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 2^n + c_2 3^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{r} x_0 = 2 \\ x_1 = 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 3c_2 = 7 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = 2,\ \ c_2 = 1$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = 2^{n+1} + 3^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Άσκηση 2. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 2, x_1 = -1$.

Λύση
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 2^n + c_2 4^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{r} x_0 = 2 \\ x_1 = -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 4c_2 = -1 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = 9/2,\ \ c_2 = 5/2$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = (9/2)2^n + (5/2)4^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Άσκηση 3. $x_{n+2} = 4x_n$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 2, x_1 = 0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $x_{n+2} - 4x_n = 0$. Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 0\lambda - 4 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 2^n + c_2(-2)^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{c} x_0 = 2 \\ x_1 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 - 2c_2 = 0 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 1$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = 2^n + (-2)^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Άσκηση 4. $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, x_1 = 0$.

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{c} x_0 = 2 \\ x_1 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 - 2c_2 = 0 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = 2,\ \ c_2 = -1$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = 2(-1)^n - 1(-2)^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

1.2 Με διπλή ρίζα

Άσκηση 5. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 2, x_1 = 10$.

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ με διπλή ρίζα $\lambda = 2$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = c_1 2^n + c_2 n 2^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{c} x_0 = 2 \\ x_1 = 10 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 = 2 \\ 2c_1 + 2c_2 = 10 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = 2,\ \ c_2 = 3$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = 2^{n+1} + 3n2^n = (2 + 3n)2^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Σημείωση: αν έχω πολλαπλή ρίζα r βαθμού d, τότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι της μορφής $r^n, nr^n, n^2r^n, \cdots, n^{d-1}r^n$.

1.3 Υψηλοτερου βαθμού

Άσκηση 6. $x_{n+3} - 3x_{n+2} - 2x_n = 0$, με αρχικές συνθήκες x_0, x_1, x_2.

Λύση
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^3 + 0\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$ ή $(\lambda+1)^2(\lambda-2)$ με ρίζες $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 2$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n + c_3\lambda_3^n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 2^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2, c_3 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η γενική λύση βρίσκεται όπως στις προηγούμενες ασκήσεις.

Άσκηση 7. $x_{n+4} - 2x_{n+2} + x_n = 0$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = x_1 = x_2 = 0, \chi_3 = 1$.

Λύση
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^4 + 0\lambda^3 - 2\lambda + 1 = 0$ ή $(\lambda^2-1)^2$ με ρίζες $\lambda_1 = 1$ (διπλή) και $\lambda_2 = -1$ (διπλή) Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n + c_3\lambda_2^n + c_4 n\lambda_2^n = c_1 + c_2 n + c_3(-1)^n + c_4 n(-1)^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2, c_3, c_4 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 - c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 3c_2 - c_3 - 3c_4 = 1 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = -1/4, c_2 = 1/4, c_3 = 1/4, c_4 = -1/4$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = (1/4)(-1 + n + (1-n)(-1)^n), n = 0, 1, 2, \cdots.$$

2 Μη ομογενείς

Άσκηση 7. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = 8n^2$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0, x_1 = -1$.

Λύση
Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n^o = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1(-1)^n + c_2(-3)^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου οι c_1, c_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των αρχικών συνθηκών στο βήμα 3.

Βήμα 2: Ειδική λύση. Θέτουμε $f(n) = (8n^2)\times 1^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 1 δεν είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = B_1 n^2 + B_2 n + B_3$, (γιατί $f(n) = 8n^2 + 0n + 0$), όπου οι B_1, B_2, B_3 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε προκύπτει ότι

$$B_1(n+2)^2 + B_2(n+2) + B_3 + 4(B_1(n+1)^2 + B_2(n+1) + B_3) + 3(B_1 n^2 + B_2 n + B_3) = 8n^2 \Leftrightarrow$$
$$8B_1 n^2 + (-20B_1 + 8B_2)n + (16B_1 - 10B_2 + 8B_3) = 8n^2.$$

Συγκρίνοντας τα παραπάνω ταυτοτικά πολυώνυμα έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{r} 8B_1 = 8 \\ -20B_1 + 8B_2 = 0 \\ 16B_1 - 10B_2 + 8B_3 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} B_1 = 1 \\ B_2 = 5/2 \\ B_3 = 9/8 \end{array}$$

Επομένως η ειδική λύση είναι

$$x_n^\varepsilon = n^2 + (5/2)n + (9/8), n = 0, 1, 2, \cdots$$

Βήμα 3: Γενική λύση. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = x_n^o + x_n^\varepsilon = c_1(-1)^n + c_2(-3)^n + n^2 + (5/2)n + (9/8),$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{r} x_0 = 0 \\ x_1 = -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} c_1 + c_2 = 9/8 \\ -c_1 - 3c_2 + 1 + 5/2 + 9/8 = -1 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = -9/2, c_2 = 27/8$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = (-9/2)(-1)^n + (27/8)(-3)^n + n^2 + (5/2)n + (9/8), n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Άσκηση 8. $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = 3n$. Να βρεθεί ειδική λύση.

Λύση
Θέτουμε $f(n) = 3n \times 1^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 1 δεν είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = B_1 n + B_2$, (γιατί $f(n) = 3n + 0$), όπου οι B_1, B_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} B_1(n+2) + B_2 + B_1(n+1) + B_2 - B_1 n - B_2 = 3n &\Leftrightarrow \\ 3B_1 + B_2 + B_1 n = 3n& \end{aligned}$$

Επομένως, $B_1 = 3$ & $3B_1 + B_2 = 0$, δηλαδή $B_2 = -9$. Η ειδική λύση είναι

$$x_n^\varepsilon = 3n - 9, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Άσκηση 9. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2^n$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Λύση
Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n^o = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 + c_2 3^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου οι c_1, c_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των αρχικών συνθηκών στο βήμα 3.

Βήμα 2: Ειδική λύση. Θέτουμε $f(n) = 2^n = 2^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 2 δεν είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = B2^n$, όπου B είναι σταθερά που θα προσδιοριστεί. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} B2^{n+1} - 42^{n+1} + 32^n B = 2^n &\Leftrightarrow \\ 4B - 8B + 3B = 2 &\Leftrightarrow \\ B = -1& \end{aligned}$$

Επομένως η ειδική λύση είναι
$$x_n^\varepsilon = -2^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Βήμα 3: Γενική λύση. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή
$$x_n = x_n^o + x_n^\varepsilon = c_1 + c_2 3^n + n^2 - 2^n,$$
όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες
$$\begin{array}{c} x_0 = 0 \\ x_1 = -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 + c_2 - 1 = 0 \\ c_1 + 3c_2 - 2 = 1 \end{array}$$
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = 0, c_2 = 1$. Επομένως η γενική λύση είναι
$$x_n = 3^n + n^2 - 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Άσκηση 10. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 3n^2 - 14n + 12$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, x_1 = 4$.

Λύση
Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$.
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή
$$x_n^o = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 4^n + c_2 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$
όπου οι c_1, c_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των αρχικών συνθηκών στο βήμα 3.

Βήμα 2: Ειδική λύση. Θέτουμε $f(n) = 3n^2 - 14n + 12 = (3n^2 - 14n + 12) \times 1^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 1 δεν είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = B_1 n^2 + B_2 n + B_3$, όπου B_1, B_2, B_3 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε, συγκρίνοντας τα ταυτοτικά πολυώνυμα και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει έχουμε ότι $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 2$. Επομένως η ειδική λύση είναι
$$x_n^\varepsilon = n^2 + 2n + 2, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Βήμα 3: Γενική λύση. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή
$$x_n = x_n^o + x_n^\varepsilon = c_1 4^n + c_2 2^n + n^2 + 2n + 2,$$
όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες
$$\begin{array}{c} x_0 = 1 \\ x_1 = 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 + c_2 + 2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 5 = 4 \end{array}$$
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = -3/2, c_2 = 1/2$. Επομένως η γενική λύση είναι
$$x_n = (-3/2)4^n + (1/2)2^n + n^2 + 2n + 2, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Άσκηση 11. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = (n + 1)2^n$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Λύση
Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.

Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n^o = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 + c_2 3^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου οι c_1, c_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των αρχικών συνθηκών στο βήμα 3.

Βήμα 2: Ειδική λύση. Θέτουμε $f(n) = (n+1) \times 2^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 2 δεν είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = B_1 n + B_2$, όπου B_1, B_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε, συγκρίνοντας τα ταυτοτικά πολυώνυμα και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει έχουμε ότι $B_1 = -4, B_2 = -12$. Επομένως η ειδική λύση είναι

$$x_n^\varepsilon = (-4n - 12)2^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Βήμα 3: Γενική λύση. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = x_n^o + x_n^\varepsilon = c_1 + c_2 3^n + (-4n - 12)2^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} c_1 + c_2 - 12 = 0 \\ c_1 + 3c_2 - 32 = 1 \end{matrix}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = 21/2, c_2 = 3/2$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = 21/2 + (3/2)3^n + (-4n - 12)2^n, n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Άσκηση 12. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = (n+1)2^n$, με αρχικές συνθήκες x_0, x_1.

Λύση

Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$.

Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ με ρίζες $\lambda = 2$ (διπλή). Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n^o = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = c_1 + c_2 n 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου οι c_1, c_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των αρχικών συνθηκών στο βήμα 3.

Βήμα 2: Ειδική λύση. Θέτουμε $f(n) = (n+1) \times 2^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 2 είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = n^2(B_1 n + B_2)2^n$, όπου B_1, B_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε, συγκρίνοντας τα ταυτοτικά πολυώνυμα και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει έχουμε ότι $B_1 = 1 - 6, B_2 = 1$. Επομένως η ειδική λύση είναι

$$x_n^\varepsilon = n^2(-(1/6)n + 12^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Σημείωση: Αν η ρίζα ήταν απλή, δηλαδή πολλαπλότητας 1, τότε η ειδική λύση θα ήταν της μορφής $x_n^\varepsilon = n^1(B_1 n + B_2)2^n$. Αν η ρίζα ήταν τριπλή, δηλαδή πολλαπλότητας 3, τότε η ειδική λύση θα ήταν της μορφής $x_n^\varepsilon = n^3(B_1 n + B_2)2^n$. Αν η ρίζα ήταν 4πλή, δηλαδή πολλαπλότητας 4, τότε η ειδική λύση θα ήταν της μορφής $x_n^\varepsilon = n^4(B_1 n + B_2)2^n$, κ.ο.κ.

Βήμα 3: Γενική λύση. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = x_n^o + x_n^\varepsilon = c_1 + c_2 n 2^n + n^2(-(1/6)n + 12^n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2(1/6+1) = 1 \Leftrightarrow c_2 = -2/3 \end{array}$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = 21/2 + (3/2)3^n + (-4n - 12)2^n, n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Άσκηση 13. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2$, με αρχικές συνθήκες x_0, x_1.

Λύση
Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.
Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n^o = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n = c_1 + c_2 n 3^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου οι c_1, c_2 είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των αρχικών συνθηκών στο βήμα 3.

Βήμα 2: Ειδική λύση. Θέτουμε $f(n) = 2 \times 1^n$. Παρατηρούμε ότι ο όρος 1 είναι λύση της χ.ε. Οπότε, υποθέτουμε ότι ο γενικός τύπος της ειδικής λύσης είναι $x_n^\varepsilon = nB$, όπου B είναι σταθερά που θα προσδιοριστεί. Θέτοντας στην αρχική εξίσωση όπου x_n το x_n^ε, έχουμε

$$(n+2)B - 4B(n+1) + 3Bn = 2 \Leftrightarrow Bn + 2B - 4Bn - 4B + 3Bn = 2 \Leftrightarrow B = -1.$$

Επομένως η ειδική λύση είναι

$$x_n^\varepsilon = -n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Βήμα 3: Γενική λύση. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_n = x_n^o + x_n^\varepsilon = c_1 + c_2 n 3^n - n,$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 - 1 = 1 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = -1, c_2 = 1$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$x_n = -1 + 3^n - n, n = 0, 1, 2, \cdots .$$

3 Ρητογραμμικές αναδρομικέ εξισώσεις

Άσκηση 14. $x_{n+1} = \dfrac{5x_n - 3}{x_n + 1}$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 5$.

Λύση
Η χ.ε. είναι

$$\lambda = \frac{5\lambda - 3}{\lambda + 1} \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda = \lambda - 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \tag{1}$$

Η (1) έχει **δύο διακριτές ρίζες** $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Οπότε,

βήμα 1:

$$x_{n+1} - \lambda_1 = \frac{5x_n - 3}{x_n + 1} - 1 = \frac{5x_n - 3 - x_n - 1}{x_n + 1} = \frac{4x_n - 4}{x_n + 1}$$

δηλαδή

$$x_{n+1} - \lambda_1 = \frac{4x_n - 4}{x_n + 1} \tag{2}$$

βήμα 2:

$$x_{n+1} - \lambda_2 = \frac{5x_n - 3}{x_n + 1} - 3 = \frac{5x_n - 3 - 3x_n - 3}{x_n + 1} = \frac{2x_n - 6}{x_n + 1}$$

δηλαδή

$$x_{n+1} - \lambda_2 = \frac{2x_n - 6}{x_n + 1} \tag{3}$$

βήμα 3: Διαιρούμε τις (2) και (3) κατά μέλη έχουμε

$$\frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} = \frac{\frac{4x_n - 4}{x_n + 1}}{\frac{2x_n - 6}{x_n + 1}} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 3} = \frac{4x_n - 4}{2x_n - 6}$$

δηλαδή

$$\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 3} = 2\frac{x_n - 1}{x_n - 3}. \tag{4}$$

βήμα 4: Θέτουμε

$$u_n := \frac{x_n - 1}{x_n - 3}, n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{5}$$

Επομένως η αρχική αναδρομική σχέση μετασχηματίζεται στην

$$u_{n+1} = 2u_n$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$u_n = 2^n u_0,$$

(γιατί για $n = 1 : u_1 = 2u_0$, για $n = 2 : u_2 = 2u_1 = 2^2 u_0$, για $n = 3 : u_3 = 2u_2 = 2^3 u_0$ κ.ο.κ.)
όπου $u_0 = \dfrac{x_0 - 1}{x_0 - 3} = \dfrac{5 - 1}{5 - 3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Από τον ορισμό του u_n προκύπτει επομένως ότι

$$x_n = \frac{3u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{3u_0 2^n - 1}{u_0 2^n - 1}, n = 1, 2, \cdots$$

Άσκηση 15. $x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 4}{x_n + 3}$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 6$.

Λύση
Η χ.ε. είναι
$$\lambda = \frac{7\lambda - 4}{\lambda + 3} \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 7\lambda - 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \tag{6}$$
Η (6) έχει **μία διπλή ρίζα** τη $\lambda = 2$.

Οπότε,

βήμα 1:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \lambda &= \frac{7x_n - 4}{x_n + 3} - 2 \\ &= \frac{7x_n - 4 - 2x_n - 6}{x_n + 3} \\ &= \frac{5x_n - 10}{x_n + 3} \\ &= \frac{5(x_n - 2)}{x_n + 3} \\ &= \frac{5(x_n - 2)}{(x_n - 2) + 5} \\ &= \frac{1}{(x_n - 2) + 5} \times \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{5(x_n - 2)}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{x_n - 2}} \end{aligned}$$

δηλαδή
$$x_{n+1} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{x_n - 2}}$$
και αντιστρέφουμε του όρους κατά μέλη
$$\frac{1}{x_{n+1} - 2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{x_n - 2} \tag{7}$$

βήμα 2: Θέτουμε
$$u_n := \frac{1}{x_n - 2}, n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{8}$$
Επομένως η αρχική αναδρομική σχέση μετασχηματίζεται στην
$$u_{n+1} = \frac{1}{5} + u_n$$
από την οποία προκύπτει ότι
$$u_n = u_0 + \frac{n}{5},$$
(γιατί για $n = 1 : u_1 = (1/5) + u_0,$ για $n = 2 : u_2 = (1/5) + u_1 = 2(1/5) + u_0,$ για $n = 3 : u_3 = (1/5) + u_2 = 3(1/5) + u_0$ κ.ο.κ.)
όπου $u_0 = \dfrac{1}{x_0 - 2} = \dfrac{1}{6 - 2} = \dfrac{1}{4}$.

Από τον ορισμό του u_n προκύπτει επομένως ότι
$$x_n = 2 + \frac{1}{u_n} = 2 + (1/4 + n/5)^{-1}, n = 1, 2, \cdots$$