13 Μαΐου

Παραγοντοποιήσεις πινάκων:

$A = QR$, $\underline{A = U\Sigma V^T}$

S.V.d

διάσπαση ιδιόμορφων τιμών

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

$A = LU$, cholesky

ΠΟΛΙΚΗ ΔΙΑΣΠΑΣΗ: $A = Q|A|$

polar decomposition

Όπως ξέρουμε αν $A = A^T \Longrightarrow$

$$A = Q \underbrace{\Lambda}_{\lambda_i} Q^T \quad (Q = \text{ορθογώνιος})$$

<u>A τυχαίος : $(m \times n)$</u> $\quad A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

Σ → περίπου διαγώνιος, σ_i

<u>U, V = ορθογώνιοι</u>

$\boxed{30 = 2 \cdot 3 \cdot 5}$ παραγοντοποίηση

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{U}_{m \times m} \cdot \underbrace{\Sigma}_{m \times n} \cdot \underbrace{V^T}_{n \times n}$$

ορθογώνιοι (U, V)

• $A : m \times n \longrightarrow \underbrace{A^T A}_{n \times n}$ ή $\underbrace{A A^T}_{m \times m}$

όχι ιδιοτιμές

(έχουν ιδιοτιμές)

$\boxed{\text{ΙΔΙΕΣ}} \rightarrow \lambda_i$

Ονομάζω $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

Σ

$\underline{U}$: σε στήλες τα ιδιοδιανύσματα του AA^T

$\underline{V}$: σε στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A^TA

$\underline{n \times 1}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $\text{rank}(A) = 1$

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

τάξη 1

$$\begin{bmatrix} \bullet & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

U: $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές:

$\lambda = 18, 0, 0$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{18}, 0}$$

(ΘΕΤΙΚΑ ΗΜΙΟΡΙΣΜΕΝΟΣ)

Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Σ: $\begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

V:

$$A^TA = \begin{bmatrix}1&2&2\\1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9&9\\9&9\end{bmatrix}$$

ιδιοτιμές λ: 18, 0

Ιδιοδιανύσματα: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$V = \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}.$$

Άρα $A = U\Sigma V^T \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&4\\3&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{18}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

Gram-Schmidt στις στήλες για

ορθογώνιος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$A^{m\times n}$.

rank(A) = r.

U: • Πρώτες r στήλες:

Βάση του $R(A)$

• τελευταίες m−r στήλες:

Βάση του $N(A^T) = R(A)^{\perp}$

$r\times r$: $\Delta_{r\times r}$.

Σ: $\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} =$

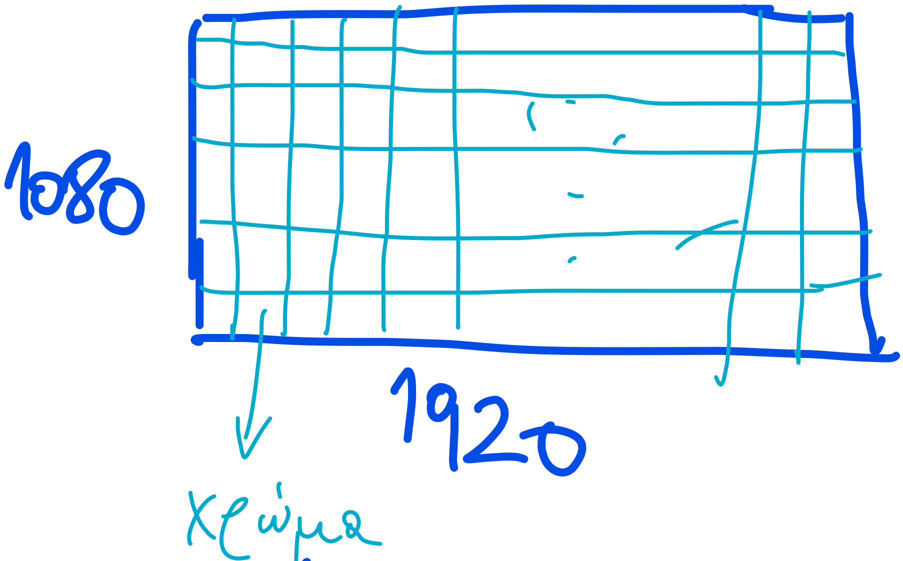
ιδιάζουσες τιμές.

V: • Πρώτες r στήλες:

Βάση του $R(A^T)$

• Οι επόμενες n−r στήλες:

Βάση $N(A) = R(A^T)^{\perp}$



(Επεξεργασία Εικόνας).

RGB ...

χρώμα → αριθμός

A = πίνακας 1080×1920

πχ Διάστημα → 1000×1000 (jpeg)

10^6 αριθμοί.

Παίρνω τον πίνακα: SVD

$$A = U \Sigma V^T$$

εικόνα συμπιεσμένη

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \sigma_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

1000 σ_i

μηδέν

Κρατάω 60 πχ (σ_i) τις πιο μεγάλες.
(Σβήνω 940)

Στέλνει : 60 στήλες του U
: 60 στήλες του V

(60 × 2000 αριθμούς)

$\boxed{\text{αντί για } 10^6}$

120000

$12 \cdot 10^4$

(1000 ο U
1000 ο V)

Ακόμα πιο συμπιεσμένο:

$$.wav \xrightarrow{\text{συμπίεση}} .mp3$$

$$A = \overset{60}{U} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{matrix}}^{\,60 \times 60} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \overset{60}{V}^T$$

(1000×1000)

Αν $\sigma_k \leq 10^{-3}$ το σβήνεις

<u>ΚΑΙ</u> τις στήλες U, V

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{U}_{m \times m} \underset{m \times n}{\Sigma} \underset{n \times n}{V^T}$$

<u>πχ</u> $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3×1 <u>SVD</u>

rank = 1

$\left(\|A\| = \sqrt{9} = 3 \right)$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

SVP

Data compression

NOISE REDUCTION

(κόβεις τα $\sigma_i \simeq 0$)

$\boxed{\text{CLUSTERING}}$

(ομαδοποίηση δεδομένων)