8 Απρ.

# ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

(διακριτά) $x_{k+1} = A \cdot x_k$

$x_{k+1}$: αύριο

$A$: πίνακας μετάβασης

$x_k$: σήμερα

πχ

$\boxed{\text{με σταθερό σύνολο}}$

$A$: i) πιθανότητες (ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ)

ii) ή παράγοντες που επηρεάζουν το σύστημα.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ:

πχ i) Ο ΚΑΙΡΟΣ

$$A = \begin{array}{cc} H & BP \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} H \\ BP \end{array} \end{array}$$

στοχαστικός

πιθανότητες

$0 \le p(k) \le 1$

(Η $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = A^T$ άθροισμα γραμμής $= 1$)

$\vec{x_0}$ = αρχική κατάσταση =

ΣΗΜΕΡΑ ΗΛΙΟ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ΑΥΡΙΟ? $x_1 = A \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$

ΜΕΘΑΥΡΙΟ? $x_2 = A \cdot x_1 = A^2 x_0 = \dots$

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,76 \\ 0,24 \end{bmatrix}$$

k μέρες μετά? $A^k$ $k \to \infty$?

$\vec{S} \longrightarrow 1 =$ ιδιοτιμή $=$ ιδιοδιάνυσμα

$\boxed{\lambda = 1} \Longrightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙΡΟΣ

$= \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\text{Ήλιος}) \\ P(\text{Βροχή}) \end{pmatrix}$

Γιατί? $\boxed{A\vec{u} = \lambda \vec{u}}$ $\lambda = 1$

$\vec{S} =$ ιδιοδιάν.

$\Rightarrow A\vec{S} = 1 . \vec{S} \Rightarrow$

$A^K \vec{S} = 1^K . \vec{S} = \vec{S}$

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ:

Βιβλίο Strang
Κεφ. 5.3

Προηγούμενο παράδειγμα

$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} 0,76 \\ 0,24 \end{pmatrix}, \ldots \rightarrow \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

Αλυσίδα του Markov:

(Αλυσίδα του Markov)

ακολουθία τυχαίων γεγονότων στον χρόνο.

- Χρόνος: διακριτός
- Κατάσταση (state) του κάθε βήματος $\longrightarrow$ πιθανότητες ή τιμές
- Χωρίς μνήμη.

2016

$$M = \begin{array}{c|ccc} & D & R & L \\ \hline D & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ R & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ L & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{array}$$

Σ στήλη = 1

ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ $x_0$ $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}40 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$ D R L

$A^k \longrightarrow$ ? ΜΕΜΟΝ $A^k \cdot \vec{x_0}$ $= x_k$

D: 55%   R: 40%   L: 5%

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ – ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ του M

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0,6 \\ \lambda_3 = 0,3 \end{cases}$$

διαγωνοποιείται.

$$M = P D P^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,502 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -0,535 \\ 0,836 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -0,267 \\ 0,227 & 0 & 0,802 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$M^K = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^K & 0 \\ 0 & 0 & 0,3^K \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$(K \to +\infty)$

$$M^k = P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}$$

$$\text{Άρα } x_k = \lim_{k\to\infty} M^k \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}0{,}55\\0{,}40\\0{,}005\end{bmatrix}}_{x_0} =$$

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0{,}321\\0{,}536\\0{,}143\end{bmatrix} & \begin{array}{c}D\\R\\L\end{array}\end{array} \qquad R \longrightarrow \underline{\underline{\text{WIN}}}$$

## ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΤΟΙΧΗΜΑΤΟΣ?

$D: \dfrac{1}{0{,}321} = 3{,}1 = \underline{\underline{3}}$

$\underline{\underline{R}}: \dfrac{1}{0{,}536} = \underline{\underline{1{,}8}}$

$\underline{L}: \dfrac{1}{0{,}143} = 7$

ii) πχ ΒΙΟΠΟΙΚΙΛΙΑ (κλειστό σύστημα)

# ΑΛΕΠΟΥΔΕΣ - ΚΟΥΝΕΛΙΑ

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & K \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ K \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ -0{,}2 & 1{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

όχι στοχαστικός

0,5: μόνο Α, (όχι Κ) → 0,5 κάθε μήνα

-0,2: τα Κ μειώνονται 20% τον μήνα

0,6: τι παθαίνουν Α από Κ

1,5 μόνο Κ → 150% το μήνα

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}64 \quad \lambda_2 = 1{,}36$$

Ιδιοδιαν.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -0,974 \\ -0,226 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -0,572 \\ -0,82 \end{pmatrix}$

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} 0,64 & 0 \\ 0 & 1,36 \end{bmatrix} P^{-1} \Rightarrow$$

Μετα απο καιρό? $A^K \cdot x_0$

$$A^K \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = P D^K P^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} =$$

$$P \begin{bmatrix} \boxed{0,64^K} & 0 \\ 0 & 1,36^K \end{bmatrix} P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} =$$

$K \to \infty$: $0,64^K = 0$, $1,36^K \to +\infty$

$(K \to \infty)$

$$P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1,36^k \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$A \to 0$

$k \to +\infty$

---

7η

Γεράκια _ Πουλάκια

$$A = \begin{array}{cc} \Gamma & \Pi \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,2 & 1,1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \Gamma \\ \Pi \end{array} \end{array}$$

$\lambda = 0,9$

$\lambda = 0,7$

$$A^k_{x_0} = P \cdot \begin{bmatrix} 0,9^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} P^{-1} \vec{x_0}$$

$0,9^k \to 0$

$0,7^k \to 0$

$k \to +\infty$

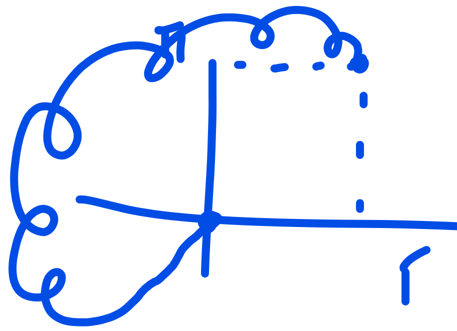
$$A^k_{x_0} = P \cdot \mathbb{O} \cdot P^{-1}_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$\boxed{Ax_k = x_{k+1}}$$

• <u>όλες $\lambda_i$</u> : $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ ευσταθής

• Αν $|\lambda_i| = 1$,



υπόλοιπες $|\lambda_i| < 1$

Ουδέτερα ευσταθές σύστημα

(MARKOV) $\longrightarrow S$

• $|\lambda_i| > 1$ (κάποιο $\lambda_i$)

ΑΣΤΑΘΕΣ ΔΥΝ. ΣΥΣΤ.