8 Ιουνίου

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN $A^{n \times n}$

ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

$$\left(A = P \Delta \cdot P^{-1}\right) \longrightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

ιδιοδιανύσματα σε στήλες.
(πλήρης η βάση από ιδιοδιανύσματα)

ιδιοδιανύσματα, και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

- Χαρ/κο πολυώνυμο. $P_A(x) \to$ ιδιοτιμές

- ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\longrightarrow$ block, μικρά block $\to$ 1, 1, ..

πχ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rank(A) = 1

$\lambda_i = 0, 0, 3.$ 2 ιδιοδιαν.

ΔΕΝ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ $\longrightarrow$ (JORDAN)

$$\begin{cases} h_A(x) = x^2(x-3) & \text{(χαρ/κο)} \\ P_A(x) = x(x-3) & \text{(ΕΛΑΧΙΣΤΟ)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(A(A-3I) = \mathbb{O}\right)$

Μεγάλο Block

<u>πχ2</u>

χαρ/κο : $\boxed{h_A = (x-1)^3(x-3)^4}$

ελάχιστο $\boxed{p_A = (x-1)^2(x-3)^2}$

υπο.block (μικρά block)

ΠΙΘΑΝΕΣ ΜΟΡΦΕΣ JORDAN:

$\boxed{A^{7\times 7}}$

2 πιθανές λύσεις

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ή

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

---

nx3   χαρ/κο : $(x+5)^3(x-6)^2$

5x5   <u>ελάχιστο</u> : $(x+5)^2(x-6)$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = J$$

Χαρ/κο: $(x-2)^3(x+4)^2$

5x5

ΕΛΑΧΙΣΤΟ = ΙΔΙΟ

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{matrix} \end{bmatrix} = J$$

Άρα $\boxed{A = P \cdot J \cdot P^{-1}}$

ιδιοδιανύσματα + {γενικευμένα ιδιοδιανύσματα..}

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ:

$A^{n\times n}$ → της ιδιοτιμής λ : $\vec{u}$

$$(A-\lambda I)^p \vec{u} = \vec{0}$$

για κάποιο $p \in \mathbb{N}^+$.

για $p=1$: $(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{u} = \lambda\vec{u}$
ιδιοδιάνυσμα

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 4$ (3πλή).

χαρ/κο πολυώνυμο: $h_A(x) = (x-4)^3$

ελάχιστο " : $p_A(x) = (x-4)^2$

Ιδιοδιανύσματα: $A\vec{u} = 4\vec{u} \Rightarrow$

.... $\vec{u} = \begin{pmatrix} \kappa+\lambda \\ \kappa \\ \lambda \end{pmatrix} =$

$\kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Βάση του ιδιόχωρου

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ΛΕΙΠΕΙ ΕΝΑ. (γενικευμένο

ΑΡΑ: (A) $(A-\lambda I)\vec{x}_3 = \vec{x}_1$ ή (B) $(A-\lambda I)\vec{x}_3 = \vec{x}_2$

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=1 \\ 0=1 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

ΠΑΜΕ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (B)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_2} \Rightarrow$$

$-x+y+z=1 \to$ η ίδια εξίσωση

$0=0$

$-x+y+z=1 \to \boxed{x=y+z-1}$

$$\begin{pmatrix} k+\lambda-1 \\ k \\ \lambda \end{pmatrix} = \vec{x}_3$$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

πχ

$\underline{\underline{k=\lambda=1}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_3$

Άρα $P = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$
$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ή $P = \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_1 \end{array}$
$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $*$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} *$$

Απο 2ο $\to$ X_3

ή $$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A όμοιος B $\Longleftrightarrow$ $J_A = J_B$

$$\boxed{A = C \cdot B \cdot C^{-1}}$$