1 ΙΟΥΝ.

$\boxed{\text{PCA}}$ (συνέχεια)

X = πίνακας δεδομένων (N)

$X - M \longrightarrow B$ * ΚΑΝΟΝΙΚΟΠ. ΔΕΔΟΜΕΝΑ

$\rightarrow \frac{1}{N-1} \cdot BB^T = \Sigma$

$\Sigma \longrightarrow \lambda_i^*, \ \vec{u}_i$ νέο $\hat{\Sigma}$ διαγώνιος

Θέτω $Y = P \cdot X$ $\longrightarrow$ νέα δεδομένα

(P = ιδιοδιαν. σε στήλες) ασυσχέτιστα

$cov(x_i, y_i ..) = 0$

Υπολογιστικά μέθοδος:

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΩ:

$$A = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \cdot B^T$$

$\boxed{\text{ΚΑΝΩ SVD}}$ (γιατί $\Sigma = A^T A$).

γιατί: $A^T A = \frac{1}{\sqrt{N-1}} B \cdot \frac{1}{\sqrt{N-1}} B^T$

$$= \frac{1}{N-1} \cdot BB^T = \Sigma$$

σ_i^2 του πίνακα της SVD $= \lambda_i$

(οι ιδιοτιμές του Σ)

$\rightarrow$ λ_i χωρίς υπολογισμό του Σ

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Κύριες συνιστώσες ΠΟΣΕΣ?

Αν $\sum (\text{var } x_i) \geq 70\%$ του συνολικού $\text{Var}(x)$

πχ

$$\begin{bmatrix} 12 & & & & 0 \\ & 10 & & & \\ & & 9 & & \\ 0 & & & 6 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \Sigma^{(5\times5)}$$

$\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 9$

(5 μεταβλητές) Συνολική $\text{Var}(x_i) = 38$

$$\frac{12}{38} + \frac{10}{38} + \frac{9}{38} = 0{,}81 = 81\%$$

ΘΑ ΠΑΡΩ 3 κύριες συνιστώσες

ΠΙΝΑΚΑΣ διακύμανσης

$$\Sigma$$

$\boxed{X_i \longrightarrow \mu_x, \sigma_x}$

$\boxed{1 \text{ μεταβλητή}}$

πολ/ζω $\cdot a$: $y_i = a \cdot x_i$

$$\mu_y = a \cdot \mu_x, \quad \sigma_y = |a| \cdot \sigma_x \; *$$

Προσθέτω $+b$: $y_i = x_i + b$

$$\mu_y = \mu_x + b$$

$$\sigma_y = \sigma_x$$

πολλές μεταβλητές: ΠΙΝΑΚΕΣ

X_i μεταβλητές $\longrightarrow \vec{\mu}, \Sigma_x$

$(E(x) = \mu)$

μέσοι όροι

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

ΠΟΛ/ΖΩ ΤΑ x_i με πίνακα A

$$Y_i = A \cdot X_i \quad (\text{νέα data})$$

- $E(Y) = A \cdot E(x) = A \cdot \mu$

- $Var(Y_i) = Var(A x_i) =$ (Απόδειξη:)

$$\boxed{Var(x) = E\left((x-\mu)(x-\mu)^T\right)}$$

Ορισμός

$$E\left[(Ax-E(Ax))(Ax-E(Ax))^T\right]$$

$$= E\left[A(x-E(x))\cdot(x-E(x))^T A^T\right]$$

$$A\,E\left[(x-E(x))(x-E(x))^T\right]A^T =$$

$$A\,E\left[(x-\mu)(x-\mu)^T\right]A^T =$$

$$\boxed{A\Sigma_x A^T = \Sigma_y}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

R (r)

r = συντελ. γραμμικής συσχέτισης

$$y = a_0 + bx \qquad (\text{ΜΕΤ})$$

πχ με (x, y)

$$R = \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & 1 & r \\ y & r & 1 \end{array}$$

με (x, y, z):

$$R = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & r(x,y) & r(x,z) \\ y & r(x,y) & 1 & r(y,z) \\ z & r(x,z) & r(y,z) & 1 \end{array}.$$

$$R = R^T$$

συμμετρικός

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(x) & Cov(x,y) \\ Cov(x,y) & Var(y) \end{bmatrix}$$

(συμμετρικοί: Σ, R)

$$\boxed{R = \Delta^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot \Delta^{-1/2}}$$

όπου $\Delta = diag(\Sigma) = \{\sigma_i\}$

$$\boxed{\Sigma = \Delta^{1/2} \cdot R \cdot \Delta^{1/2}}$$

- r = συσχέτιση (Pearson) (γραμμική)

  $-1 \leq r \leq 1$ (ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $cov(x,y) \longrightarrow$ συνδιακύμανση

  <u>ΜΟΝΑΔΕΣ</u>: γινόμενο των μονάδων $x \cdot y$

$\underline{n \times 1:}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \Delta^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot \Delta^{-1/2} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες του R:

1) $\Sigma \geq 0$, $R \geq 0$

θετικά ημιορισμένοι.
$(\lambda_i \geq 0)$

2) $\operatorname{rank}(\Sigma) = \operatorname{rank}(R)$ $\Sigma^{n \times n}$

Αν $\det(\Sigma) = 0$ (δεν αντιστρέφ. ο Σ)

$\Rightarrow \operatorname{rank}(\Sigma) < n \Rightarrow$

οι στήλες των δεδομένων **ΔΕΝ** είναι γραμμ. ανεξάρτητες

Ο ΨΕΥΔΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ A^+

A^{-1} δεν υπάρχει $\longrightarrow A^+$

- $A^{n \times n}$ μή αντιστρέψιμος
  $[\det(A) = 0] \Longrightarrow$

  $A^+ \ (n \times n)$

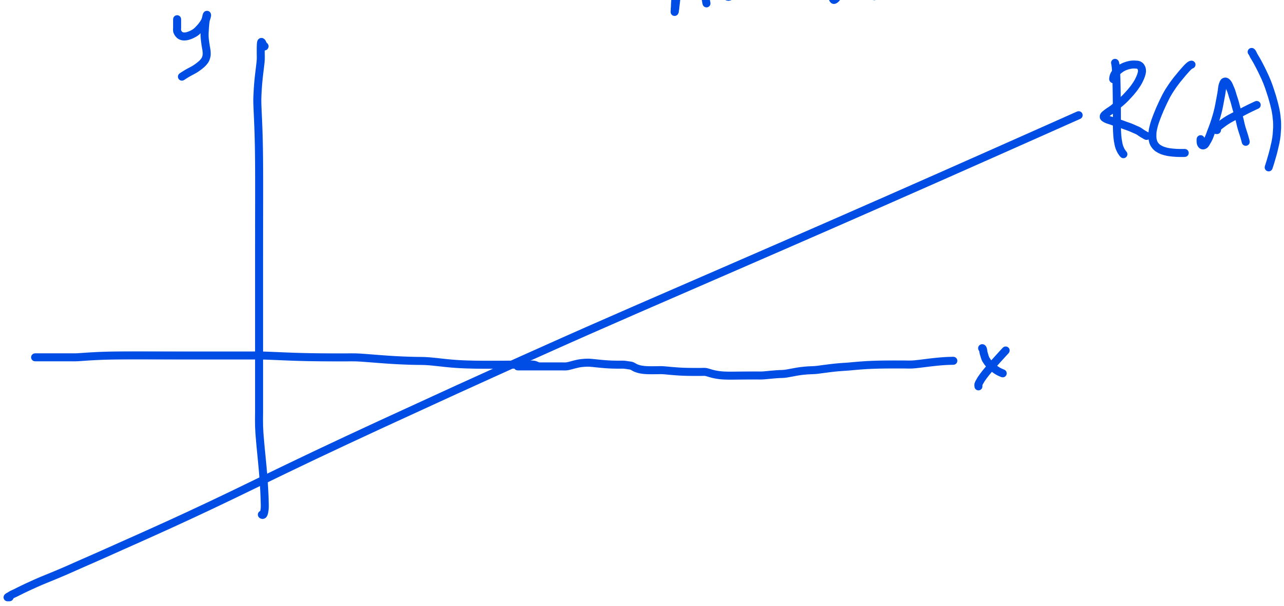
- $A^{m \times n} \longrightarrow A^+ \ n \times m$

R : εντολή pseudoinverse

Matlab : pinv

Τι είναι;

Αν $A^{2\times 2}$ δεν αντιστρ.



ΓΡΑΜΜΙΚΗ 1:

πχ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 0$

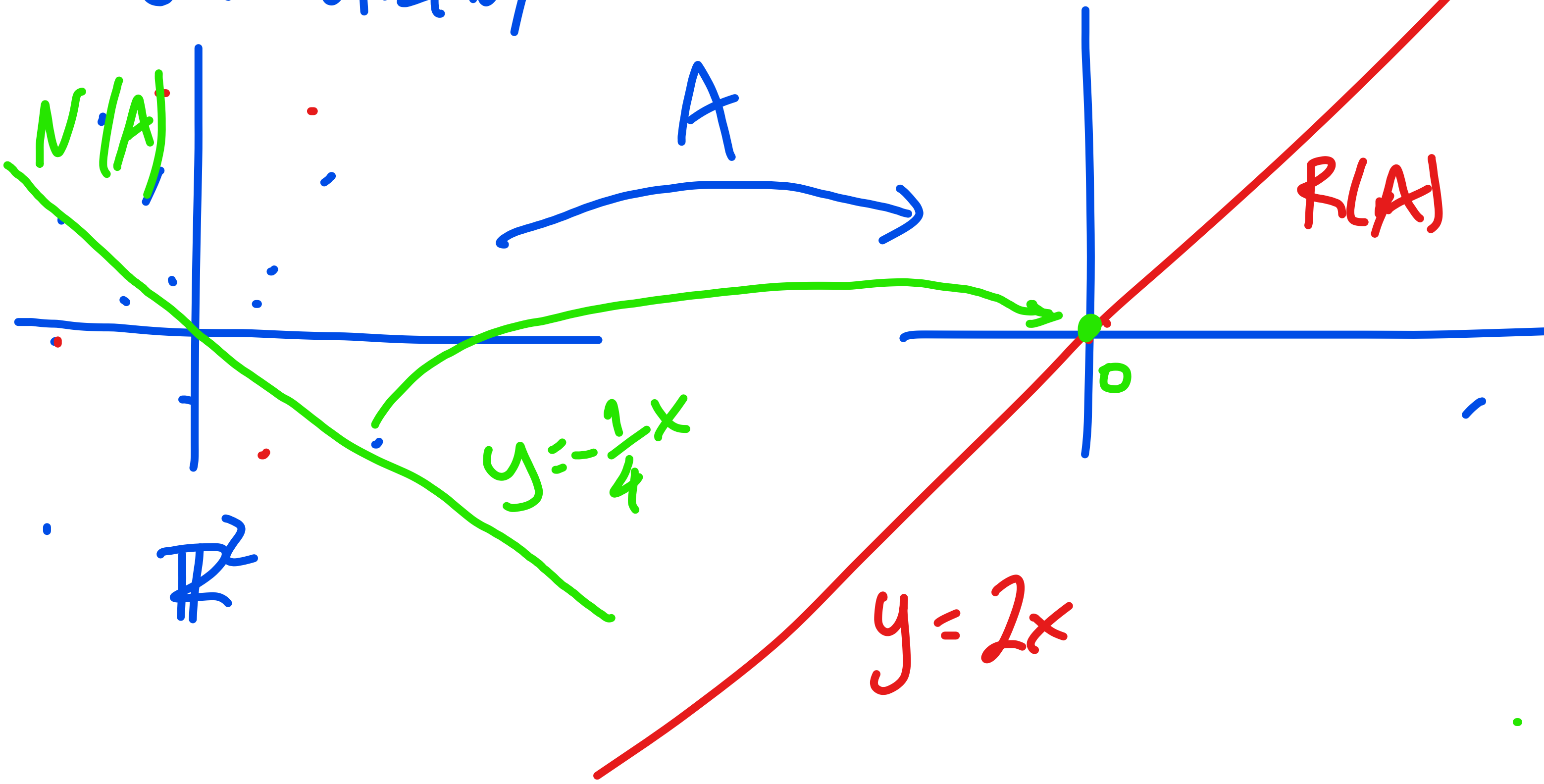
A^{-1} ? δεν υπάρχει

$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 4y \\ 2x + 8y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$$

$: \underline{y = 2x}$ (ΕΥΘΕΙΑ)

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ



ΜΗΔΕΝΟΧΩΡΟΣ N(A): $N\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 0 \\ \cancel{2x + 8y = 0} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{4}x \longrightarrow N(A)$$

$$\boxed{Ax = b} \not\Rightarrow x = A^{-1}b$$

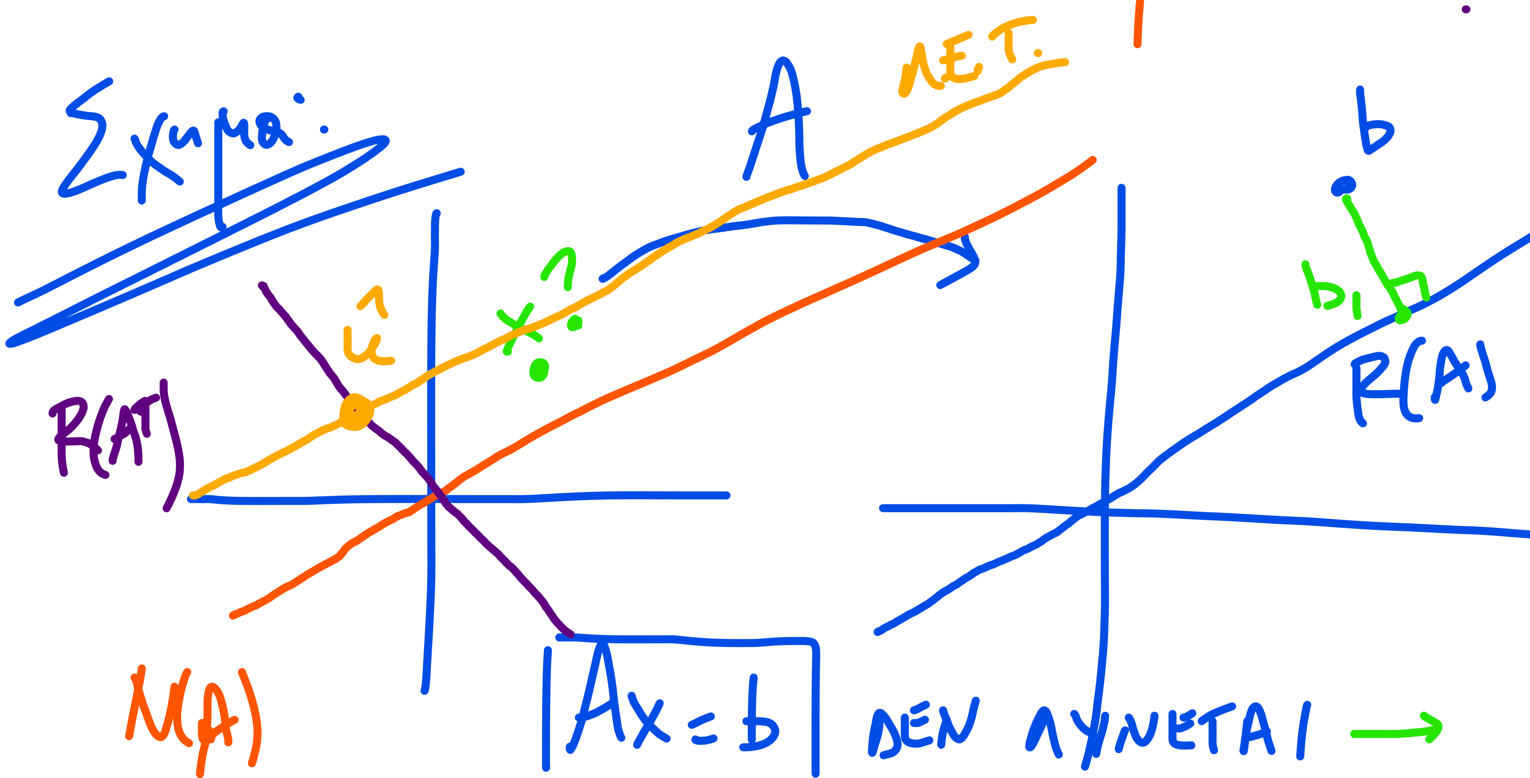
λύση

Αν A^{-1} δεν υπάρχει?

ΤΟΤΕ: $\hat{u} = A^{+}b$

Λ.Ε.Τ. του συστήματος

Σχήμα:



$b \notin R(A) \qquad Ax = b_1$

(λύνεται)

$\Longrightarrow \boxed{\hat{x} = A^+ b} \qquad A\hat{x} = b_1$

βέλτιστη λύση

A^+ = ψευδοαντίστροφος

(Moore-Penrose αντίστροφος)

A^+ **4 ιδιότητες**

$\boxed{A \cdot A^+ \cdot A = A}$, $\boxed{A^+ A A^+ = A^+}$

$\boxed{(A^+ A)^T = A^+ A}$, $\boxed{(A A^+)^T = A A^+}$

Ορισμός του A^+: Ο μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί και τις 4 ιδιότητες

Βασική χρήση 1) $Ax = b \Rightarrow$

$\hat{x} = A^+ b$

Λ.Ε.Τ.

2) $A \cdot A^+ = P_A$ = προβολή στο $R(A)$