2 ΙΟΥΝ. **Φροντιστήριο**

1 Πίνακας συσχέτισης R

Σ : πίνακας διακύμανσης $\rightarrow$ PCA

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} B B^T$$

(Από data)

$$R = \Delta^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot \Delta^{-1/2}$$

όπου $\Delta = diag(\Sigma)$

πχ
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8,1 \\ 1 & 16 & 18 \\ 8,1 & 18 & 81 \end{bmatrix}$$

(ΚΑΝΟΝΙΚΑ: $\begin{bmatrix} 81 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ αν θέλω PCA)

σύνολο VAR = 98

R ?

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Άρα $R = \Delta^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot \Delta^{-1/2} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8{,}1 \\ 1 & 16 & 18 \\ 8{,}1 & 18 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 & 0{,}9 \\ 0{,}25 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{-1 \leq r \leq +1}$$

② (Προηγούμενο φροντιστήριο)

X = ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗ, Y = Χρόνια που μένεις στο σπίτι

Y \ X	1	2	3	4
1	. .	.	.	.
2	.	.	.	.

Y=1: <6 χρόνια

Y=2: ≥6 χρόνια

$$\Rightarrow \dots \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0{,}7019 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$\boxed{Cov(X,Y) = -0{,}5}$ r? $\boxed{R?}$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0{,}7019 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.7019}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0{,}5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1,193 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \Delta^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot \Delta^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & -0,12 \\ -0,12 & 1 \end{bmatrix}$$

---

3 ΨΕΥΔΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ

A^{+} αντί για A^{-1}.

- $A^{n \times n} \to \cancel{A^{-1}}\ A^{+}$ (Αν $\det A = 0$)
- $A^{m \times n} \longrightarrow A^{+}\ (n \times m)$

A^{+} έχει σχέση με τον A^{T}.

- $Ax = b \Rightarrow \underbrace{\hat{x} = A^{+}b}$

$\boxed{\text{ΛΕΤ}}$

Θεωρία ευθεία ελαχίστων τετραγώνων:

$$Ax = b \Rightarrow$$

$$A^T A x = A^T b \Rightarrow$$

$$\hat{x} = \underbrace{(A^T A)^{-1} \cdot A^T}_{A^{+}} b = A^{+} b$$

$$\boxed{A^{+} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T}$$

Εντολές

(όχι χρήσιμος για υπολογισμούς)

ginv

R: Pseudoinverse

(με SVD)

4 σχέσεις:

(1) $AXA = A$ (3) $(AX)^T = AX$

(2) $XAX = X$ (4) $(XA)^T = XA$

$$\Longrightarrow X = A^+$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\det(A) = 0)$$

$\text{rank}(A) = 1$

$$X = \begin{bmatrix} -1/4 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

να αποδειχτεί ότι $X = A^+$

Οι 4 σχέσεις ικανοποιούνται;

③ $AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (AX)^T \checkmark$$

④ $XA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (XA)^T \checkmark$$

① $AXA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} = A \checkmark$$

② $\underbrace{XAX}$ $= \begin{bmatrix} +1/2 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -1/4 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = X \checkmark$$

β) Έστω το σύστημα.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = -\underline{1} \end{cases}$$

$\boxed{Ax = b}$ από (α) ερώτημα.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται

$\longrightarrow \hat{u} = A^+ b$

$\boxed{b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Άρα $\hat{u} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$

$$\hat{u} : \begin{cases} x = -3/4 = -0{,}75 \\ y = \frac{3}{4} = 0{,}75 \end{cases}$$

$A(-0.75, 0.75)$

$\boxed{\text{ΝΕΤ}}$

<u>ΚΑΝΟΝΙΚΑ</u> $Ax = b$ είναι

ΑΔΥΝΑΤΟ

$\hat{u}$ = λύση προσεγγιστική, με ελάχιστη νόρμα

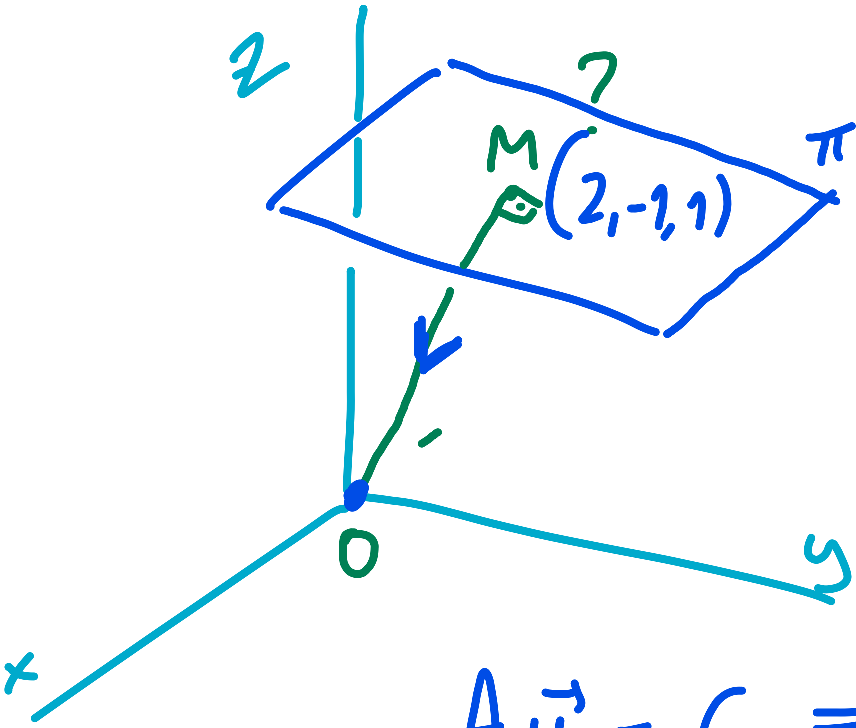
4

ΠΙΝΑΚΑΣ: $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ (3×1)

$\longrightarrow$ $A^t: (1\times 3)$

$\mathbb{R}^3$ $\boxed{2x-y+z=6}$ ΕΠΙΠΕΔΟ π

$\downarrow$ με μορφή πινάκων:



$A\vec{u}=6 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=6$$

$\rightarrow$ $\hat{u}$ = ΛΥΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ

(= η πιο μικρή απόσταση από την αρχή των αξόνων)

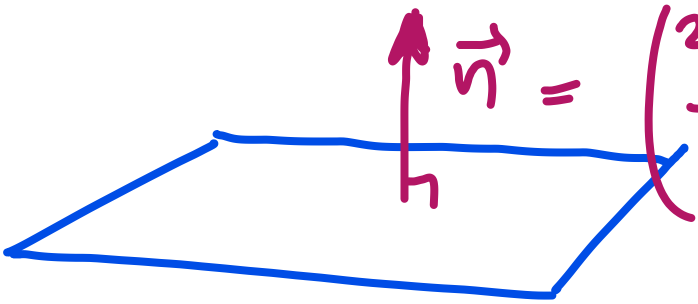
$A u = 6 \Rightarrow \vec{u} = A^{+} \cdot 6$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{+} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$

Άρα $\vec{u} = A^{+} \cdot 6 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>Β' τρόπος</u> με γεωμετρία

<u>Εξίσωση ευθείας:</u> $\vec{r} = \underbrace{(\quad)}_{\text{σημείο}} + t \underbrace{(\quad)}_{\text{διάνυσμα}}$



$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2x - y + z = 6$

Η ευθεία είναι:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to$$

παραμετρ.
$$\boxed{\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}} \to \boxed{2x - y + z = 6}$$

.... $t = 1$ Άρα

$\underline{x = 2,\ y = -1,\ z = 1}$

5 PCA ?

x	1	3	4	-2
y	2	4	6	0

Κανονικοποιώ τα data:

$$\vec{M}: \begin{cases} \frac{\Sigma x_i}{4} = \frac{6}{4} = 1,5 \\ \frac{\Sigma y_i}{4} = \frac{12}{4} = 3 \end{cases} \qquad \vec{M} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Κανονικοποιώ: $(X - M)$:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} x' & -1/2 & 1,5 & 2,5 & -3,5 \\ \hline y' & -1 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 5/2 & -7/2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{4-1} \cdot BB^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 21 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 7 & 6{,}67 \\ 6{,}67 & 6{,}67 \end{bmatrix}$$

Συνολική διακύμανση $= \underline{13{,}67}$

- ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ του Σ:

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & 6{,}67 \\ 6{,}67 & 6{,}67-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - \frac{41}{3}\lambda + \frac{20}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\lambda_1 = 13,5}, \quad \lambda_2 = 0,165$$

1η κύρια συνιστώσα

Θέτω

$$\boxed{Y = PX}$$

ιδιοδιαν.

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 13,5 & 0 \\ 0 & 0,165 \end{bmatrix}$$

Ιδιοδιάνυσμα : ($\lambda = 13,5$)

$$\boxed{\Sigma \vec{u} = 13,5\, \vec{u}} \rightarrow$$

.... $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0,716 \\ 0,698 \end{pmatrix}$ (ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΟ)

Δείκτης: $\boxed{W = 0,716\,x + 0,698 \cdot y}$