

25 ΜΑΙΟΥ

$$E(x) = \sum x_i p_i$$

$$\sigma^2 = \underline{\text{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2}$$

↑ μεταβλητή x_i

$$\bar{x} = E(x), \quad \sigma^2 = \text{Var}(x)$$

- 2 χωριστές μεταβλητές X, Y

$$x_i, y_i \dots E(x), E(y)$$

$$\text{Var}(x), \text{Var}(y)$$

$$\text{Cov}(x, y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y)$$

Σ = πίνακας διακύμανσης -
συνδιακύμανσης
(Covariance Matrix)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix}$$

↓
 $\text{Cov}(Y, X)$

$\Sigma = \Sigma^T$

Σ διαγωνοποιείται.

(Φασμ. Θώρημα)

(Ορθώνια Διαγωνοποίηση)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

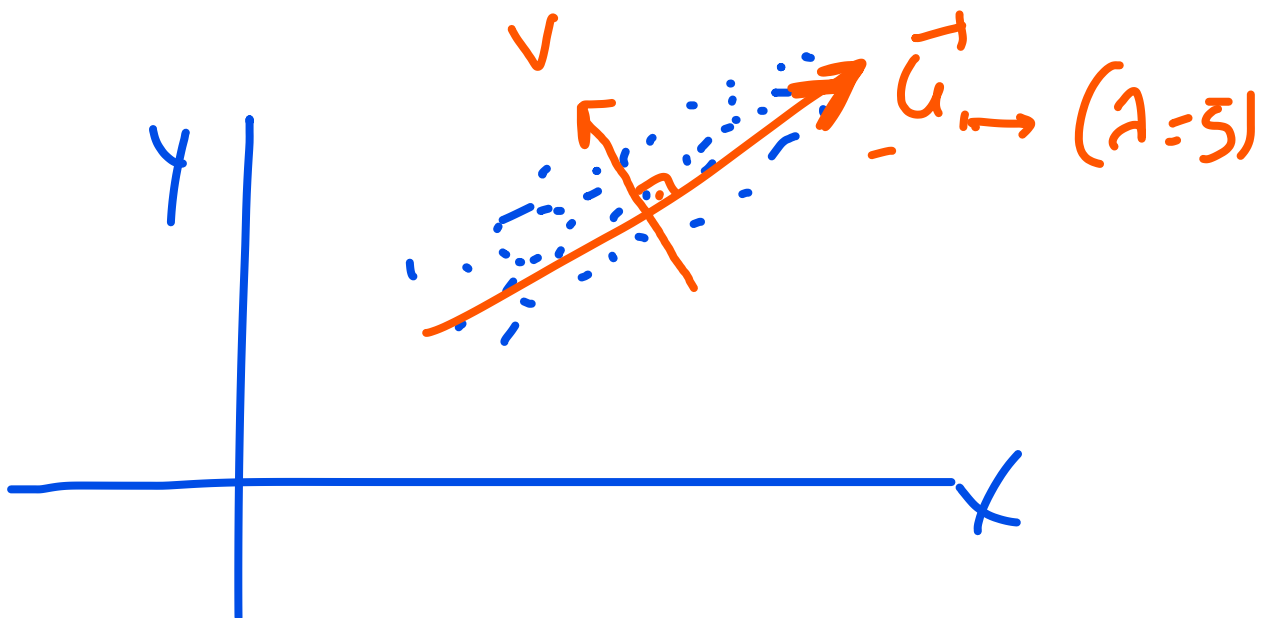
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \underline{3} & \underline{2} \\ \underline{2} & \underline{3} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 5$$

$$\Sigma \text{ υπολογική Var} = 6$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 2 > 0 \quad \text{Άρα:}$$



$$(\vec{v} \rightarrow \lambda=1)$$

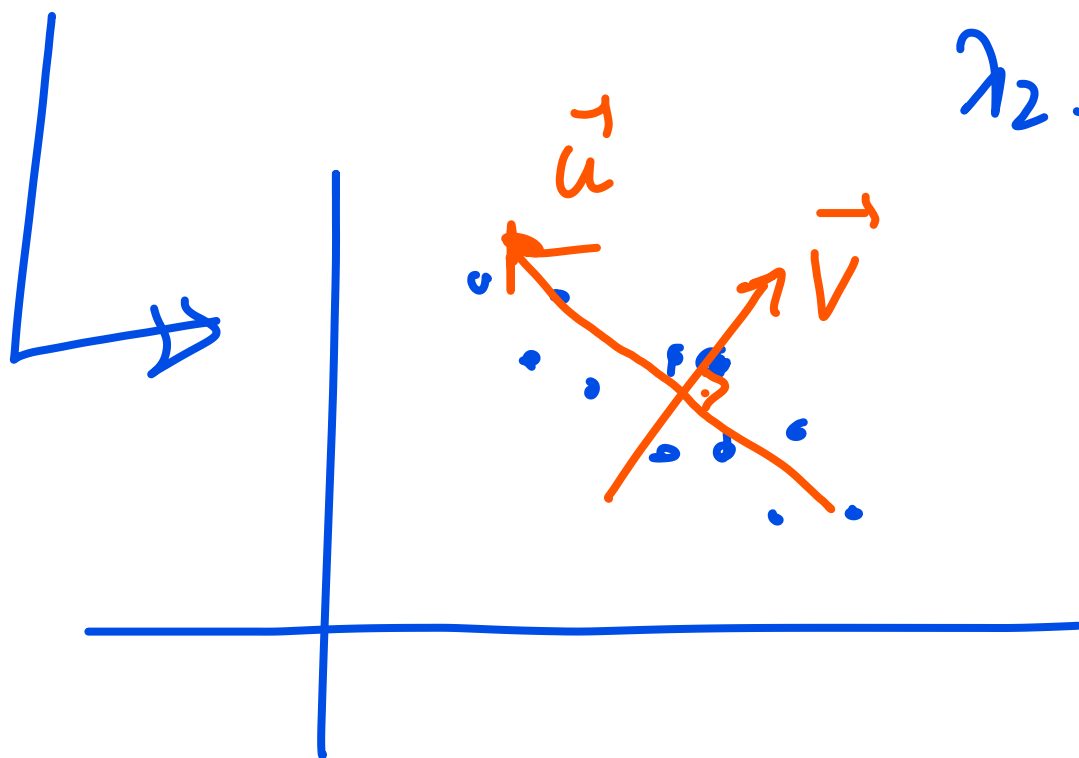
$n \times 2$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{cov}(x, y) = -2 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \vec{v}$$

$$\lambda_2 = 5 \rightarrow \vec{u}$$

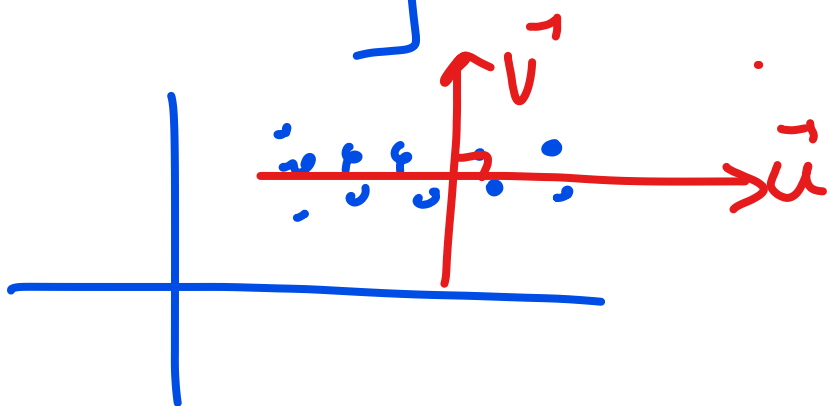


$n \times 3$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

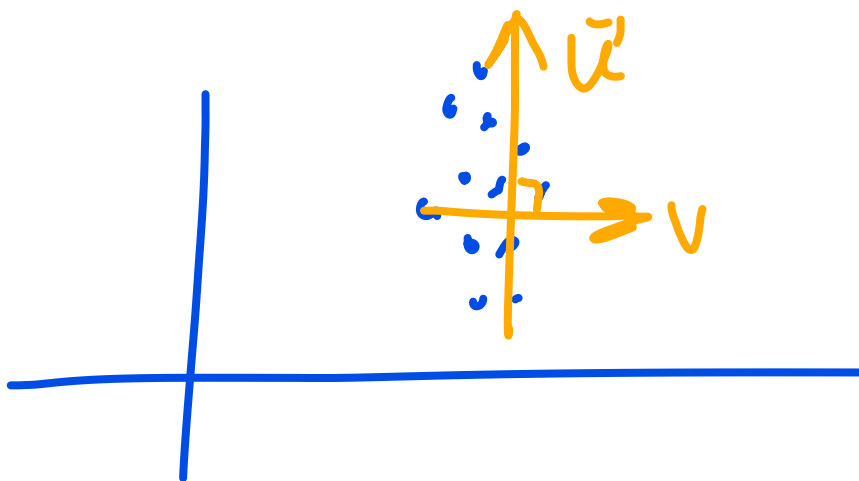
$$\lambda_1 = 5 \rightarrow \vec{u}$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \vec{v}$$



$n \times 4$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

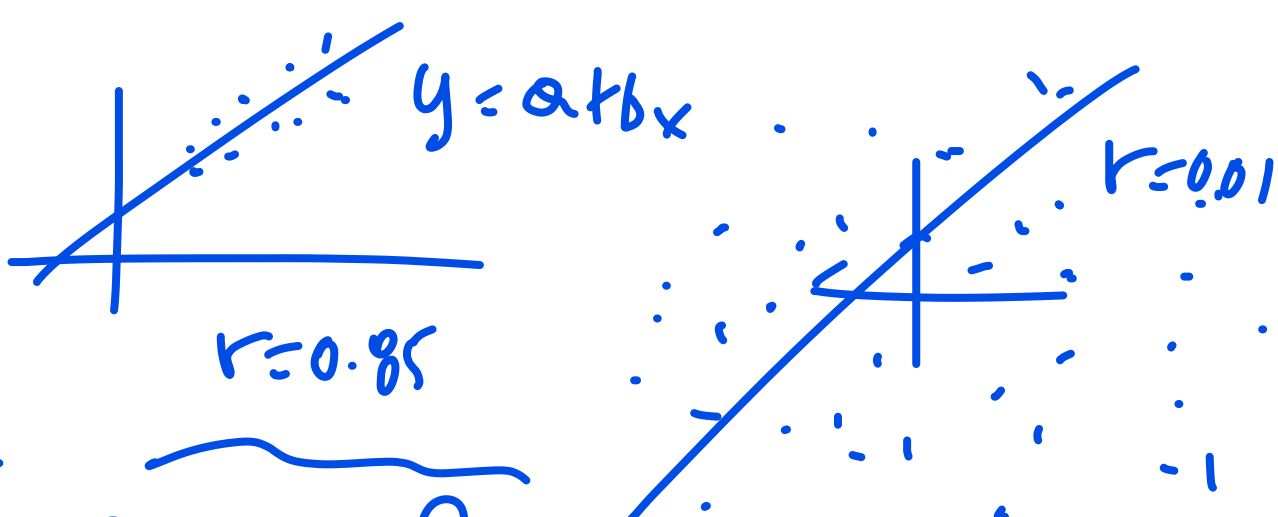


$$\text{cov}(x, y) = 0?$$



$$r = ?$$

$$\text{cov}(x, y)?$$



A

ανο πιθανότητες:

1 ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

X	1	2	3
P(X=x)	0,5	0,3	0,2

$$E(X) = 0,5 + 0,6 + 0,6 = 1,7 = \bar{x}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$0,5 + 1,2 + 1,8 - 1,7^2 = 0,61$$

$$\sigma = 0,781$$

2 ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

X:

	4	5	Συνολο
Y: 3	0,1	0,3	0,4
7	0,4	0,2	0,6
	0,5	0,5	1

Σ?

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\cdot E(X) = \sum x_i p(x_i) = 4 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = 4,5$$

$$\cdot E(X^2) = \sum x_i^2 p(x_i) = 4^2 \cdot 0,5 + 5^2 \cdot 0,5 =$$

20,5.

$$\text{Var}(X) = 20,5 - 4,5^2 = 0,25$$

$$E(Y) = \sum y_i \cdot P(y_i) = 3 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,6 = 5,4$$

$$E(Y^2) = \sum y_i^2 \cdot P(y_i) = 3^2 \cdot 0,4 + 7^2 \cdot 0,6 = 33$$

Ala $\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 =$

$$33 - 5,4^2 = 3,84$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,25 & \cdot \\ \cdot & 3,84 \end{bmatrix}$$

To cov(X, Y)?

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

4,5 5,4

$$E(x, y) = \sum x_i \cdot y_i \cdot P(x_i, y_i) =$$

$$3 \cdot 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 3 \cdot 0,3 +$$

$$4 \cdot 7 \cdot 0,4 + 5 \cdot 7 \cdot 0,2 =$$

$$\underline{\underline{23,9}}$$

$$\text{Cov}(x, y) = 23,9 - 4,5 \cdot 5,4 = -0,4$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0,25}} & -0,4 \\ -0,4 & \underline{\underline{3,84}} \end{bmatrix}$$

Σχόλιο : Ολική διασπορά :

$$0,25 + 3,84 = 4,09.$$

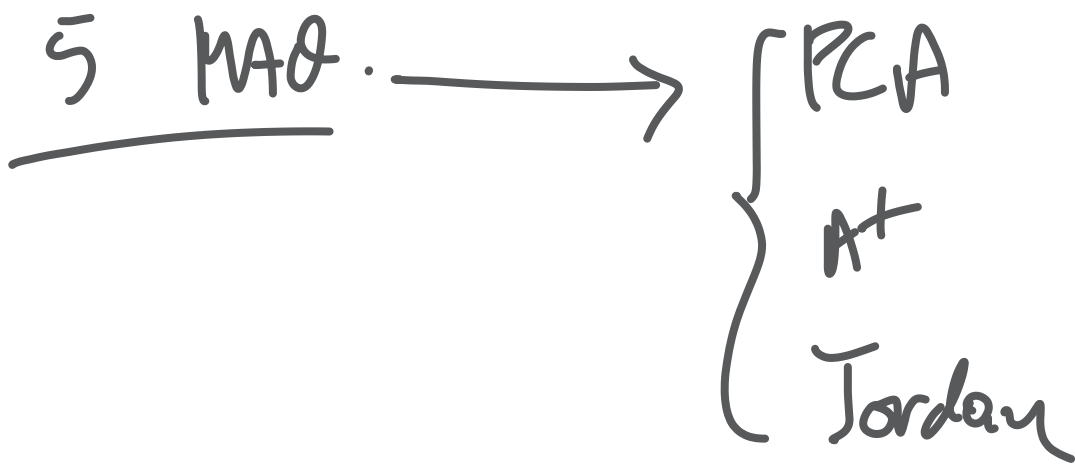
T_0	0,25	$\rightarrow X$
T_0	3,84	$\rightarrow Y$

$$X:$$

$$\frac{0,25}{4,09} =$$

$$6\%$$

ha 20 Y: $\frac{3,84}{4,09} = 94\%$.



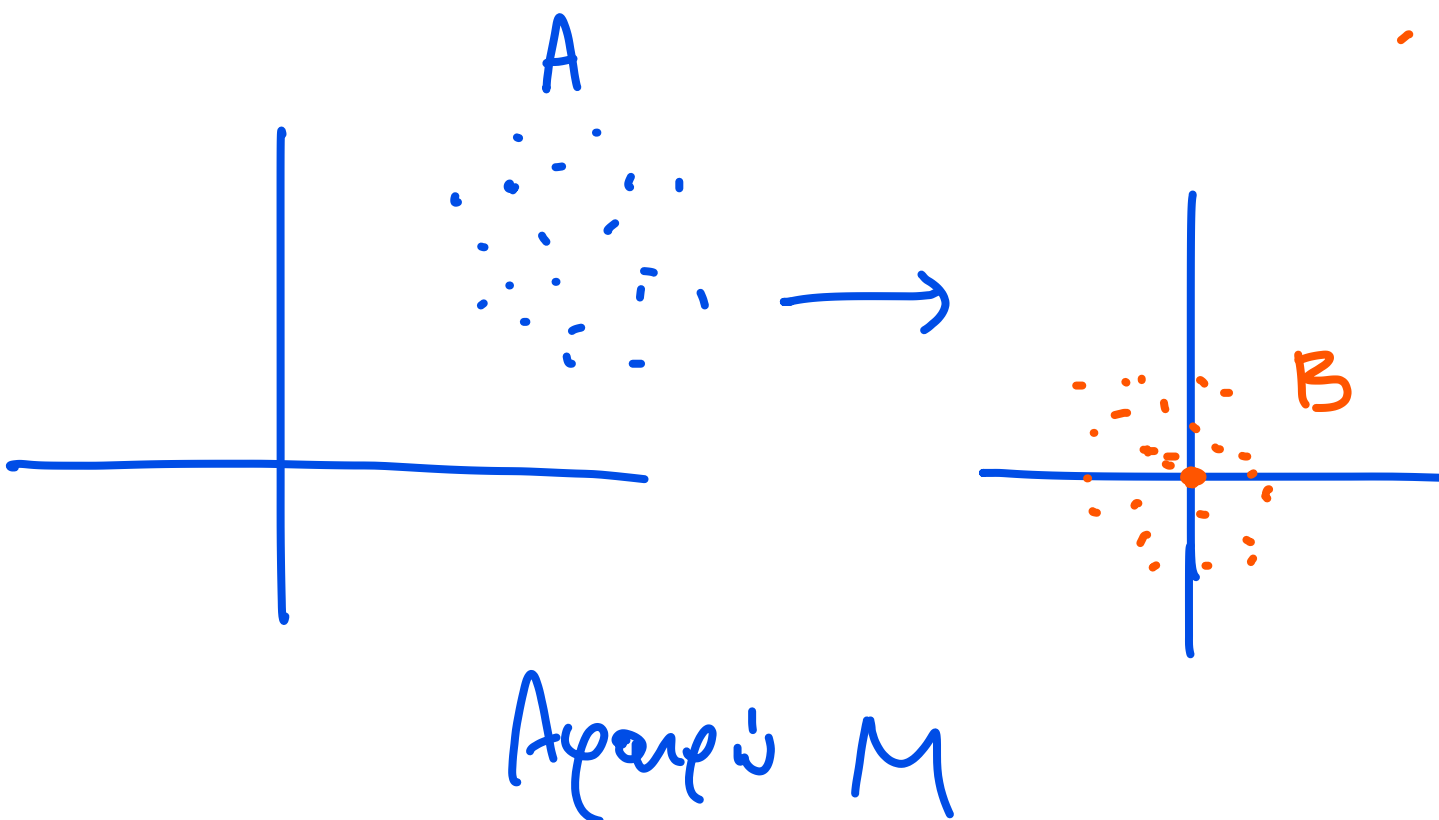
(B) In περίπτωση:
από
 $\Sigma \rightarrow$ δεδομένα

Δεδομένα μηχανή \rightarrow πίνακας A

• $\vec{M} =$ διάνομα μέσων \bar{x}
 $= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}$ με γραμμές

• κάθε σημείο - M \rightarrow ΚΕΝΤΡΑΡΕΙΣ

νέες σημεία : πίνακας \textcircled{B} μηχανή τυχαίος



$$\bullet \Sigma = \frac{1}{N-1} \cdot B B^T$$

$\text{Kg} \xleftarrow{0.45}$	(lb) Βαρος	120	125	125	135	145
$\text{cm} \xleftarrow{2.5}$	(inch) Ύψος	61	60	64	68	72

5 άτομα

ο.1 \bar{x} βάρους

\bar{x} υψους ?

$$\downarrow$$

$$\frac{\Sigma \text{Βαρών}}{5} = 130$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\Sigma \text{υψών}}{5} = 65$$

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} 130 \\ 65 \end{bmatrix}$$

β) Αφαιρώ το M από κάθε στήλη

$$\begin{bmatrix} 120 \\ 61 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 125 \\ 60 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 125 \\ 64 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 135 \\ 68 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 145 \\ 72 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

νέα
δεδομένα
"ΚΕΝΤΡΑ-
ΠΙΣΜΕΡΑ"

Νέος πίνακας δεδομένων:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 & 5 & 15 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{5-1} B B^T \Rightarrow$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 100 & 47,5 \\ 47,5 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Συνολική διασπορά} = \underline{\underline{125}}$$

$$\frac{\text{Βασος}}{\frac{100}{125}}$$

συντελεστή
συν
διαστροφής

$$80\%$$

$$\Upsilon\psi\sigma\varsigma \rightarrow 20\%$$

Ιδιότητες

$$\begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 123 \\ \searrow \lambda_2 = 2 \end{matrix}$$

διαγωνίσιος $\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 123 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

