Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

tutorial 10
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

15 Μαΐου 2018

1. Εστω τα δεδομένα Να βρέθει ο πίνακας συνδιακυμάνσεων.

$Y\backslash X$	1	2	
3	0.3	0.2	0.5
4	0.2	0.3	0.5
	0.5	0.5	1

Λύση:

Εχουμε οτι
$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5$$
και
$$\mathbb{E}(Y) = 4 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 3.5$$
και
$$\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot 0.3 + 2 \cdot 3 \cdot 0.2 + 1 \cdot 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 4 \cdot 0.3 = 5.3$$
αρα και
$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 5.3 - 1.5 \cdot 3.5 = 0.05.$$
Εχουμε ακομα οτι
$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2 = 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.5 - (1.5)^2 = 0.25$$
και
$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2 = 9 \cdot 0.5 + 16 \cdot 0.5 - (3.5)^2 = 0.25.$$
Αρα εν τέλει ο πίνακας συνδιακύμανσης θα είναι
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.05 \\ 0.05 & 0.25 \end{bmatrix}$$

◁

2. Εστω N φοιτητές που έχουν γράψει 3 διαγωνισματα. των οποιων ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$
Να βρεθει ένας δείκτης της απόδοσης των φοιτητών της μορφής $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, όπου $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ αν x_i τα διαγωνίσματα.

Λύση:

Παρατηρούμε οτι συνολική διακύμανση είναι ίση με $trace(\Sigma) = 5+6+7 = 18$. Αρα το 1ο διαγώνισμα εξηγει το 5/18 της μεταβλητοτητας, το 2ο το 6/18 και το 3ο το 7/18. Βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Σ βλέπουμε οτι είναι ισες με 3,6,9. Αρα κυρια συνιστώσα είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμη 9 με αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{u} = (k, 2k, 2k)^\top$ για $k \in \mathbb{Z}$, πχ το $\boldsymbol{u} = (1,2,2)^\top$. Ευκολα βλέπουμε οτι $||u|| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$. Ετσι το αντιστοιχο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα θα είναι

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Αρα εν τέλει ο δείκτης θα είναι

$$y = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3.$$

$\triangleleft$

3. Εστω $f(x,y) = xy(2x+4y+1)$. Βρειτε τα ακροτατα.

Λυση:

Ας φτιάξουμε λίγο την μορφη της f για να είναι ευκολότερη η παραγώγιση:

$$(x,y) = xy(2x+4y+1) = 2x^2y + 4y^2x + xy.$$

Ας παρουμε τις μερικές τις παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y^2 + y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 8xy + 2x^2 + x$$

και ας τις μηδενίσουμε

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 4xy + 4y^2 + y = 0 \\ 8xy + 2x^2 + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = -\tfrac{4y^2}{y} - \tfrac{y}{4y} \; \Big\} \Rightarrow \quad x = -y - \tfrac{1}{4} \quad (y \neq 0)$$

Για την ειδικη περίπτωση οπου $y = 0$ έχουμε οτι $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = 0$. Αν αντικαταστησουμε την εκφραση του y που βρηκαμε στην 2η εξισωση προκύπτει οτι $y = -\frac{1}{12}$ και άρα $x = -\frac{1}{6}$ και $y = -\frac{1}{4}$ και άρα $x = 0$. Αρα πιθανά σημεια για ακροτατα είναι τα $A(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ και $B(0, -\frac{1}{2})$. Για να τα επαληθευσουμε ας υπολογίσουμε τις δευτερες παραγώγους. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x + 8y + 1$$

αρα πινακας του Hess εχει την μορφη

$$H = \begin{bmatrix} 4y & 4x + 8y + 1 \\ 4x + 8y + 1 & 8x \end{bmatrix}.$$

Για το σημειο $A(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ παρατηρουμε οτι $\det(H) = \frac{3}{9} > 0$ και ο H ειναι αρνητικά ορισμένος αρα έχει τοπικό μεγιστο, το $f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12})$.
Για το σημειο $B(0, -\frac{1}{2})$ παρατηρουμε οτι $\det(H) = -1 < 0$ αρα έχουμε σαγματικό σημειο. Για την ειδικη περιπτωση οπου $y = 0$ που εξετασαμε προηγουμένως, θα πρεπει να ελεγξουμε τα σημεια $\Gamma(0, -\frac{1}{2})$ και $\Delta(0,0)$. Εξετάζοντας τα βλεπουμε οτι δεν εχει ουτε μεγιστο ουτε ελαχιστο.

$\triangleleft$

4. Εστω η συνάρτηση $f(x,y) = (3x+4y, 2x+5y)$. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x,y)$.

Λυση:

Ο πίνακας της συνάρτησης ως προς την κανονική βάση είναι ο

$$A_f = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο αντίστροφος πίνακας που δίνει την $f^{-1}(x,y)$ είναι ο

$$A_f^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Αρα, $f^{-1}(x,y) = \frac{1}{7}(5x - 4y, -2x + 3y)$.

5. Μας δίνονται τα παρακάτω δεδομένα, βαθμοί απο τεστ φοιτητων.

Τεστ 1	10	8	6	5	3
Τεστ 2	8	7	4	6	3

Να βρεθεί ο πίνακας διακυμανσης - συνδιακύμανσης.

Λυση:
Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.4 \\ 5.6 \end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρώντας τον μέσο απο κάθε x_i οποτε τα δεδομένα μας γίνονται ως εξης

$$B = \begin{bmatrix} 3.6 & 1.6 & -0.4 & -1.4 & -3.4 \\ 2.4 & 1.4 & -1.6 & 0.4 & -2.6 \end{bmatrix}.$$

Απ΄ τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1}BB^\top = \begin{bmatrix} 7.3 & 4.95 \\ 4.95 & 4.3 \end{bmatrix}$$